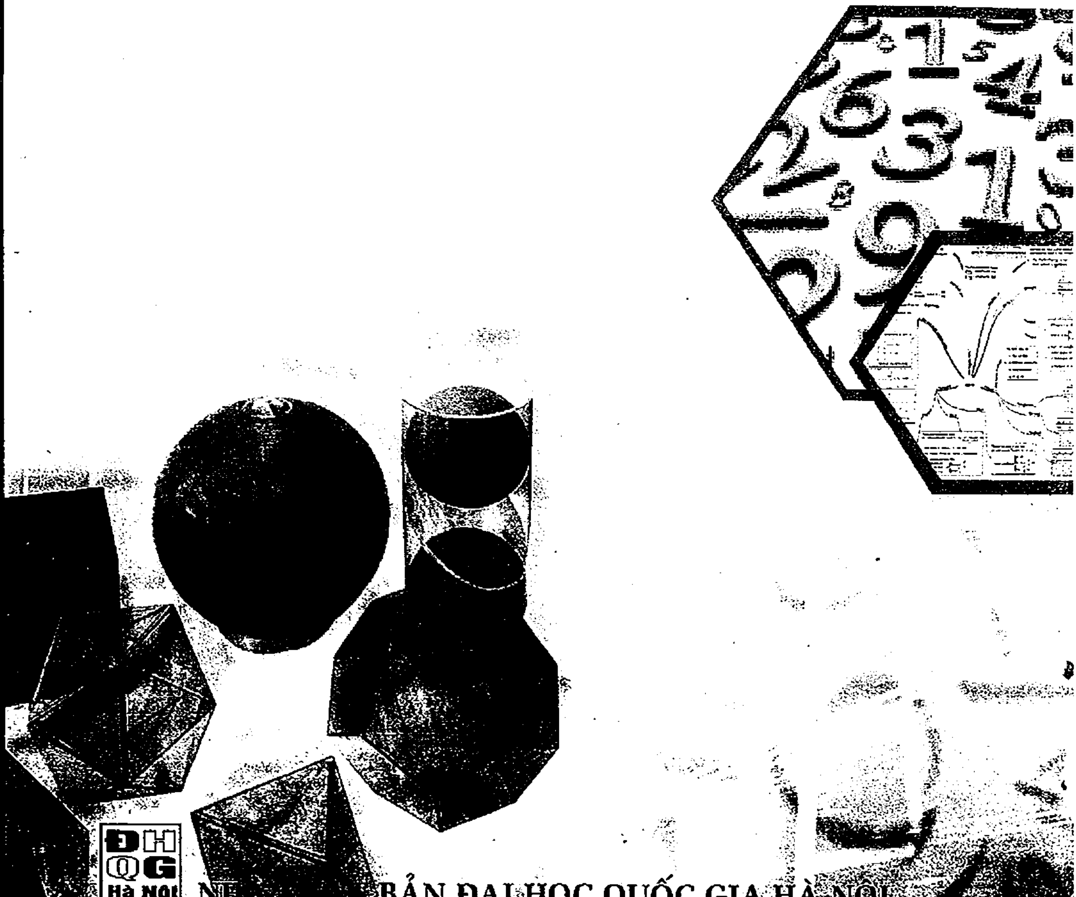
LƯƠNG ĐỨC TRỌNG - NGUYỄN NHƯ THẮNG - KIỀU TRUNG THỦY

ôn luyện THI TRẮC NGHIỆM THPT QUỐC GIA năm 2017

MÔN TOÁN



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LƯƠNG ĐỨC TRỌNG – NGUYỄN NHƯ THẮNG –
KIỀU TRUNG THỦY

ÔN LUYỆN THI TRẮC NGHIỆM
THPT QUỐC GIA NĂM 2017
MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập - Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011;
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập : ***TS. PHẠM THỊ TRÂM***

Biên tập xuất bản : *Trịnh Thị Thu Hà*

Biên tập chuyên ngành : *Trịnh Thị Thu Hà*

Sửa bài : *Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm*

Chế bản : *Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm*

Trình bày bìa : *Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm*

Đối tác liên kết xuất bản : *Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm.*

SÁCH LIÊN KẾT

Ôn luyện thi trắc nghiệm THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán

Mã số: 1L-629PT2016
In 5.000 cuốn, khổ 17 x 24cm tại Công ty TNHH thương mại Thiên Thành
Số xuất bản: 3726-2016/CXB,IPH/11-314/ĐHQGHN, ngày 31/10/2016
Quyết định xuất bản số: 654LK-TN QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 17/11/2016
In xong và nộp lưu chiểu năm 2016.

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Thực hiện chủ trương tổ chức kì thi THPT Quốc gia và tuyển sinh đại học, cao đẳng hệ chính quy năm 2017 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, theo Công văn số 4818/BGDĐT-KTKĐCLGD ngày 28/09/2016, công ty TNHH Dịch vụ Văn hóa Sư Phạm liên kết với Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội tổ chức biên soạn và phát hành bộ sách: Ôn luyện thi trắc nghiệm trung học phổ thông quốc gia năm 2017 (theo các bài thi: Toán, Tiếng Anh, Khoa học tự nhiên, Khoa học xã hội) và Ôn luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Ngữ Văn.

Bộ sách được biên soạn bởi các tác giả là giảng viên, chuyên gia giáo dục uy tín của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và giáo viên dạy giỏi ở các trường trung học phổ thông – những người đã có nhiều kinh nghiệm tham gia công tác tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Nội dung bộ sách được xây dựng bám sát chương trình giáo dục Trung học phổ thông, đồng thời được cập nhật, bổ sung theo Phương án tổ chức Kì thi THPT Quốc gia năm 2017 của Bộ giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc mỗi cuốn sách gồm 3 phần chính:

Phần một: Định hướng chung kì thi trung học phổ thông quốc gia và tuyển sinh đại học, cao đẳng chính quy 2017 (theo từng môn học)

Phần hai: Các chủ đề/ nội dung ôn luyện

Các nội dung ôn luyện tập trung vào kiến thức của lớp 12. Trong đó, có phần tóm tắt lý thuyết, bài tập mẫu, bài tập tự luyện, hệ thống các câu hỏi trắc nghiệm ở cấp độ cơ bản nhằm phục vụ học sinh ôn luyện để đạt được mục đích xét công nhận tốt nghiệp THPT và các câu hỏi phân hóa để đạt mục đích xét tuyển đại học, cao đẳng.

Phần ba: Một số đề thi tham khảo

Các đề thi này có đáp án hoặc hướng dẫn giải. Học sinh được rèn luyện và nâng cao kỹ năng thực hiện trọn vẹn một đề thi trong thời gian quy định. Đồng thời học sinh có thể tự mình hệ thống hóa được kiến thức và kĩ năng cần thiết cho kì thiTHPT Quốc gia và tuyển sinh đại học, cao đẳng hệ chính quy.

Cùng với bộ sách trên, công ty TNHH Dịch vụ Văn hóa Sư Phạm tiếp tục giới thiệu và phát hành bộ sách **Phương pháp siêu tốc giải trắc nghiệm** gồm các môn Toán, Tiếng Anh, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Địa Lý, Lịch sử và cuốn **Bí quyết chinh phục môn Ngữ văn bằng sơ đồ tư duy** nhằm phục vụ học sinh ôn luyện thi THPT quốc gia và tuyển sinh đại học cao đẳng hệ chính quy.

Xin trân trọng giới thiệu!

CÔNG TY TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA SƯ PHẠM

LỜI NÓI ĐẦU

Năm học 2016 - 2017, lần đầu tiên môn Toán cùng với các môn Địa lí, Lịch sử, Giáo dục Công dân thi với hình thức trắc nghiệm trong kì thi THPT Quốc gia và tuyển sinh Đại học, Cao đẳng 2017.

Đề thi trắc nghiệm Toán gồm 50 câu, thời gian làm bài 90 phút. Đề thi có phần kiểm tra kiến thức cơ bản, dùng để xét tốt nghiệp; và phần nâng cao, dùng để sàng lọc thí sinh trong tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng.

Như chúng ta đã biết kiểm tra – đánh giá là khâu cuối cùng của quá trình dạy và học. Sự thay đổi mang tính đột phá này của Bộ Giáo dục sẽ làm thay đổi ít nhiều cách dạy và học ở trung học phổ thông hiện nay.

Cũng bởi vậy, không ít các học sinh và thầy cô đang băn khoăn không biết sẽ phải dạy, học, ôn tập thế nào để vượt qua kì thi quan trọng sắp tới. Một kì thi đặc biệt quan trọng không chỉ với các em mà còn đối với cả ngành giáo dục khi lần đầu tiên hình thức thi trắc nghiệm được áp dụng với môn Toán.

Cuốn sách **Ôn luyện thi trắc nghiệm trung học phổ thông quốc gia năm 2017 môn Toán** ra đời nhằm đáp ứng các yêu cầu, đòi hỏi thiết thực đó. Nội dung cuốn sách không chỉ hệ thống hóa những kiến thức cơ bản cần nắm vững trong chương trình, mà còn thiết lập một ngân hàng câu hỏi và bài tập trắc nghiệm khá phong phú bám sát 7 chuyên đề chính trong chương trình học lớp 12 gồm:

- Hàm số
- Hàm số mũ và logarit
- Nguyên hàm, tích phân
- Số phức
- Khối đa diện
- Khối tròn xoay
- Phương pháp tọa độ trong không gian

Chúng tôi hi vọng rằng cuốn sách sẽ là tài liệu hướng dẫn hữu ích cho học sinh và các thầy cô giáo trong việc dạy, học và thi THPT Quốc gia, tuyển sinh Đại học, Cao đẳng hệ chính quy môn Toán.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song không thể tránh khỏi những thiếu sót trong quá trình biên soạn, các tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo, các em học sinh, và bạn đọc.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN MỘT:

ĐỊNH HƯỚNG CHUNG KÌ THI THPT QUỐC GIA VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG HỆ CHÍNH QUY MÔN TOÁN

Ngày 28/09/2016, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã chính thức phê duyệt Phương án tổ chức Kì thi THPT Quốc gia năm 2017, trong đó quy định thí sinh thi 4 bài thi gồm: 3 bài thi bắt buộc Toán, Ngữ văn, Ngoại ngữ và 1 bài thi tự chọn: Khoa học Tự nhiên hoặc Khoa học Xã hội. Ngoài 4 bài thi nói trên, thí sinh có quyền đăng kí thêm các môn thi còn lại của kì thi để sử dụng cho việc đăng kí tuyển sinh đại học, cao đẳng theo yêu cầu của các ngành đào tạo do từng trường đại học, cao đẳng quy định trong Đề án tuyển sinh của trường đó.

Các bài thi Toán, Ngoại ngữ, Khoa học Tự nhiên và Khoa học Xã hội thi theo hình thức trắc nghiệm khách quan; mỗi thí sinh trong cùng phòng thi có một mã đề thi riêng; thí sinh làm bài thi trên phiếu trả lời trắc nghiệm; Phiếu trả lời trắc nghiệm của thí sinh được chấm bằng phần mềm máy tính. Bài thi Ngữ văn, thi theo hình thức tự luận.

Nội dung đề thi THPT Quốc gia 2017 nằm trong chương trình học lớp 12, tăng cường câu hỏi mở, câu hỏi gắn với thực tiễn và câu hỏi vận dụng đảm bảo độ phân hóa. Trong mỗi đề thi sẽ có phần kiến thức cơ bản – dùng để xét tốt nghiệp và phần nâng cao – dùng để sàng lọc thí sinh trong tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng.

Đề thi đảm bảo cả 4 mức độ nhận biết, thông hiểu, vận dụng, vận dụng cao, đòi hỏi học sinh vận dụng kiến thức tổng hợp để làm bài, giải quyết các vấn đề liên quan đến thực tiễn cuộc sống. Công tác ra đề thi tiếp tục được đổi mới theo hướng không quá dài, không quá sâu, không nặng nề câu chuyện tính toán cồng kềnh và trong bài tập sẽ có những phương pháp giải rất ngắn gọn.

Đề thi môn Toán ở dạng trắc nghiệm khách quan với 50 câu hỏi và thời gian làm bài là 90 phút.

PHẦN HAI:
NỘI DUNG ÔN LUYỆN

CHƯƠNG 1
HÀM SỐ

CHUYÊN ĐỀ 1.1
Tính đơn điệu của hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa tính đơn điệu của hàm số

Cho I là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và hàm số f xác định trên I.

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên I nếu

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên I nếu

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên I được gọi chung là hàm số đơn điệu trên I.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

a) Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Chú ý: Ta có thể mở rộng khái niệm hàm số đơn điệu trên một tập bất kỳ.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.

Chú ý: Khoảng I trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung thêm giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó".
Chú ý: Trong thực hành giải toán, ta thường dùng dạng mở rộng sau của định lý trên: "Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, $\forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên I". Thông thường, trong chương trình phổ thông, hầu hết các hàm số đều tự động thỏa mãn điều kiện đạo hàm triệt tiêu tại hữu hạn điểm, nên ta thường chỉ cần kiểm tra tính không âm của đạo hàm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số

Phương pháp giải: Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta làm như sau

- Tìm tập xác định.
- Tính y'. Tìm các điểm x_i mà tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Lập bảng xét dấu cho y' và kết luận.

VÍ DỤ 1.1 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?*

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ *B.* $(0; +\infty)$ *C.* $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ *D.* $(-\infty; 0)$

GIẢI. Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3$. Do đó y đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.2. *Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$ thỏa mãn tính chất nào sau đây:*

A. Đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ *và nghịch biến trên* $(-1; 3)$.

B. Nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ *và nghịch biến trên* $(-1; 3)$.

C. Đồng biến trên $(-\infty; -1)$ *và* $(3; +\infty)$, *nghịch biến trên* $(-1; 3)$.

D. Nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ *và* $(3; +\infty)$, *đồng biến trên* $(-1; 3)$.

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = x^2 - 2x - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số *đồng biến trên mỗi khoảng* $(-\infty; -1)$ *và* $(3; +\infty)$, *nghịch biến trên* $(-1; 3)$.
Vậy đáp án là C. □

Nhận xét: Về bản chất, việc xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thường được qui về việc xét dấu của đạo hàm $f'(x)$. Trong khuôn khổ chương trình SGK, dấu của $f'(x)$ thường được xác định thông qua định lý dấu tam thức bậc hai: "**trong trái, ngoài cùng**", tức là trong khoảng hai nghiệm, tam thức bậc hai trái dấu với hệ số bậc hai và ngoài khoảng hai nghiệm thì tam thức bậc hai sẽ cùng dấu với hệ số bậc hai.

VÍ DỤ 1.3. *Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định?*

A. $y = x^3 + 2x - \sin x$ *B.* $y = x^3 - 3x^2 + 9x$

C. $y = x - \dfrac{3}{x}$ *D.* $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

GIẢI. Ta tính các đạo hàm các hàm số trên.

$$y = x^3 + 2x - \sin x \Rightarrow y' = 3x^2 + 2 - \cos x > 0.$$
$$y = x^3 - 3x^2 + 9x \Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 3) > 0.$$
$$y = x - \frac{3}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{x^2} > 0.$$
$$y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow y' = -\frac{4}{(x-2)^2} < 0.$$

Vậy đáp án là D. □

Chú ý: Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, đồng biến trên các khoảng xác định khi và chỉ khi $ad - bc > 0$ và nghịch biến trên các khoảng xác định khi và chỉ khi $ad - bc < 0$.

Dạng 2: **Tìm điều kiện tham số để hàm số đơn điệu trên tập** D

Phương pháp giải:

- Tính y'. Điều kiện để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên D là $y' \geq 0$ ($y' \leq 0$) trên D và phương trình $y'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm trên D.
- Rút tham số m, đưa về dạng $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$ trên D.
- Khảo sát hàm số $g(x)$ trên D và rút ra kết luận.

Chú ý: Ta thường chỉ xét D là một đoạn, một khoảng hay nửa khoảng trên $\mathbb{R}$ và với hạn chế trong chương trình SGK, điều kiện đạo hàm triệt tiêu tại hữu hạn điểm thường tự động đúng.

VÍ DỤ 1.4. *Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số* $y = -x^4 + 2mx^2 + m + 2$ *nghịch biến trên* $[3; +\infty)$*:*

A. $m < 3$ *B.* $m \leq 3$ *C.* $m \leq 9$ *D.* $m < 9$

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 4mx = 4x(m - x^2)$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow m \leq x^2, \forall x > 3$. Suy ra $m \leq \min\limits_{[3;+\infty)} x^2 = 9$.

Vậy đáp án là C. □

Trong ví dụ này học sinh dễ nhầm lẫn đáp án C và D. Điều kiện để hàm số đồng biến trên khoảng I là $y' \geq 0, \forall x \in I$ và có thể $y' = 0$ tại một số hữu hạn điểm. Do đó ta vẫn chấp nhận được giá trị $m = 9$.

VÍ DỤ 1.5 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số* $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ *đồng biến trên khoảng* $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ *hoặc* $1 \leq m < 2$ B. $m \leq 0$

C. $1 \leq m < 2$ D. $m \geq 2$

GIẢI. Đặt $\tan x = t, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Vì hàm số $\tan x$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $g(t) = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
Tập xác định của hàm số $t \neq m$, như vậy $m \notin (0; 1)$.
Hàm số có dạng phân thức như trên luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên các khoảng xác định. Điều kiện đồng biến là $ad - bc = -m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 2$. Kết hợp hai điều kiện ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [1, 2)$.
Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.6. *Cho hàm số* $y = \dfrac{\cos 2x + 2(m+1)\cos x + 2m^2 + 2m + 1}{\cos x + m}$. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên đoạn* $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $m \leq -\dfrac{1}{2}$ B. $m < -1$ C. $m \geq 0$ D. $m > 0$

GIẢI. Điều kiện xác định: $\cos x + m \neq 0$ với mọi $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Do hàm đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $-m \notin [0; 1]$ hay $m < -1$ hoặc $m > 0$. Như vậy, loại A và C.
Thử trực tiếp với $m = -2$, khi đó $y = \dfrac{\cos 2x - 2\cos x + 5}{\cos x - 2} = 2\cos x + 2 + \dfrac{8}{\cos x - 2}$, ta được

$$y'(x) = -2\sin x + \frac{8\sin x}{(\cos x - 2)^2} = 2\sin x \cos x \frac{4 - \cos x}{(\cos x - 2)^2} \geq 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Vậy $m = -2$ thỏa mãn, tức là D sai.
Vậy đáp án là B. □

Chú ý: *Có thể làm trực tiếp kiểu tự luận như sau: Thay* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ *rút gọn y ta được* $y = 2\cos x + 2m + \dfrac{2m^2}{\cos x + m}$. *Từ đó*

$$y'(x) = -2\sin x + \frac{2m^2 \sin x}{(\cos x + m)^2} = -2\sin x \cos x \frac{\cos x + 2m}{(\cos x + m)^2} \geq 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos x + 2m \leq 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta được $m \leq -\dfrac{1}{2}$. *Kết hợp điều kiện ta được* $m < -1$.

Nhận xét: *Các Ví dụ 1.5, 1.6 minh họa rõ nét sự khác biệt giữa* cách làm bài tự luận truyền thống *và* cách làm bài trắc nghiệm *bằng phương pháp loại trừ. Với kiểu bài trắc nghiệm chỉ có một phương án, trong khi cách làm theo phong cách tự luận cần lập luận để tìm chính xác yêu cầu rồi so sánh với các đáp án để chọn phương án đúng, cách làm loại trừ chỉ cần chỉ ra* một đặc điểm *để loại bỏ đáp án sai. Vì vậy, trong nhiều trường hợp cách làm loại trừ* cho lời *giải ngắn gọn và tối ưu hơn về thời gian. Các em học sinh cần vận dụng linh hoạt cả hai cách làm trên khi giải quyết một câu hỏi cụ thể.*

***Dạng 3:* Tìm điều kiện tham số để hàm số bậc ba đơn điệu trên khoảng có độ dài l**

Phương pháp giải: Xét hàm số $y = f(x, m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Hàm số đơn điệu trên khoảng (x_1, x_2) sao cho $|x_2 - x_1| = l$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, $|x_2 - x_1| = l$.
  Điều kiện là $\Delta > 0$ và $l = \sqrt{S^2 - 4P}$, trong đó S, P lần lượt là tổng và tích của hai điểm cực trị, được suy ra từ định lý Viet.

VÍ DỤ 1.7. *Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2mx - m^2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2?*

A. $m = 0$ B. $m < \dfrac{3}{2}$ C. $m = \dfrac{3}{2}$ D. Không tồn tại m

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 2m$. Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 $\Leftrightarrow$ $y' \leq 0$ trên khoảng (x_1, x_2) sao cho $|x_2 - x_1| = 2$.

Điều kiện là $\Delta' = 9 - 6m > 0$. Khi đó theo định lý Viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{2m}{3} \end{cases}$

$$|x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 - 2\frac{2m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.1. Hàm số $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; -\dfrac{7}{3}\right)$ B. $\left(-\dfrac{7}{3}; -1\right)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(-\infty; -1)$

BÀI TẬP 1.2. Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; -1)$ B. $(-4; -1)$

C. $(-\infty; -4)$ D. $(-\infty; -4)$ và $(-1; 2)$

BÀI TẬP 1.3. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{2-x}$. Tìm khẳng định đúng:

A. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên tập $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP 1.4. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây:

A. $(-\infty; -3)$ B. $(-3; -1)$ C. $(-1; 1)$ D. $(1; +\infty)$

BÀI TẬP 1.5. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(3; +\infty)$?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$ B. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

C. $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$ D. $y = -x^2 + 5x - 2$

BÀI TẬP 1.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

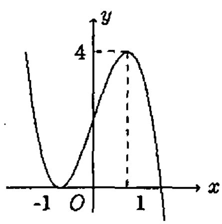
BÀI TẬP 1.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.



BÀI TẬP 1.8. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định?

A. $m \le -\dfrac{1}{2}$ B. $m > -\dfrac{1}{2}$ C. $m < -\dfrac{1}{2}$ D. $m \ge -\dfrac{1}{2}$

BÀI TẬP 1.9. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$?

A. $-2 < m \le 1$ B. $\forall m \in \mathbb{R}$ C. $-2 < m < 2$ D. $-1 \le m < 2$

BÀI TẬP 1.10. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2mx + m^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. $m > \dfrac{3}{2}$ B. $m \ge \dfrac{3}{2}$ C. $m \ge 0$ D. $m > 0$

BÀI TẬP 1.11. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. $m \le \dfrac{4}{3}$ B. $m \ge 4$ C. $m > 4$ D. $m > \dfrac{4}{3}$

BÀI TẬP 1.12. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - mx + 2m$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. $m \le \dfrac{3}{5}$ B. $m < \dfrac{3}{5}$ C. $m \le \dfrac{4}{3}$ D. $m < \dfrac{4}{3}$

BÀI TẬP 1.13. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = -x^4 + 2(m^2-1)x^2 - 3m + 1$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. $m < 5$ B. $m \le 5$ C. $m \le \sqrt{5}$ D. $-\sqrt{5} \le m \le \sqrt{5}$

BÀI TẬP 1.14. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 2m^2$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. $m > -1$ B. $m > 1$ C. $m \ge -1$ D. $m \ge 1$

BÀI TẬP 1.15. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = mx + \cos x - 2$ đồng biến trên tập xác định?

A. $m \le -1$ B. $m \ge 1$ C. $m > 1$ D. $-1 \le m \le 1$

BÀI TẬP 1.16. Tìm tất cả giá trị của tham số m thì hàm số $y = \sin 2x - mx$ nghịch biến trên tập xác định?

A. $m \le -2$ B. $m \ge 2$ C. $m \le -1$ D. $m \le 1$

BÀI TẬP 1.17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + mx - 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn nhất bằng 2?

A. $m \leq 9$ B. $m \leq 12$ C. $m > -3$ D. $m = 9$

BÀI TẬP 1.18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 9x^2 - mx - 1$ nghịch biến trên khoảng chứa nhiều nhất 3 số nguyên?

A. $m \leq -15$ B. $m > -24$

C. $-24 < m < -15$ D. $-24 < m \leq -15$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.1. Ta dùng phương pháp loại trừ. Vì hàm bậc 3 với hệ số $a > 0$ chỉ nghịch biến trong khoảng hai nghiệm của $y' = 0$ nên loại A, C, D.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.2. Viết $y = x - 6 + \dfrac{9}{x+1}$. Do đó, $y'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x+1)^2}$. Xét $y' \leq 0$ khi và chỉ khi $x \in [-4; 2], x \neq -1$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(-4; -1)$ và trên $(-1; 2)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.3. Vì hàm phân thức đơn giản, dễ thấy $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.4. Tập xác định $D = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. Dễ thấy $y'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.
Đáp án đúng là D.
Chú ý: Có thể lập luận đơn giản hơn bằng phương pháp loại trừ. Từ TXĐ thấy loại cả B,C vì không nằm trong TXĐ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ nên loại A. Vậy chọn D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.5. Thử A, y' là tam thức bậc hai hệ số dương, nên $y' > 0$ khi x ngoài khoảng hai nghiệm, loại A. Thử B, $y' = -3x^2 + 12x - 9 = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 3$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(3; +\infty)$. Đáp án B đúng.
Đáp án đúng là B.
Chú ý: Cấu trúc đề thi THPTQG 2017 chỉ chọn một đáp án, do đó khi thử được đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán không cần xét các trường hợp còn lại. □

GIẢI BÀI TẬP 1.6. Từ bảng biến thiên ta thấy khẳng định trong A, B, C đúng.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.7. Từ đồ thị hàm số, các khẳng định A,B,D đúng, C sai.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.8. Vì hàm phân thức đơn giản, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $2m+1>0$ hay $m>-\frac{1}{2}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.9. Từ điều kiện xác định $-\frac{m}{2}\notin\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ hay $m\geq -1$. Từ đó loại A,B,C.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.10. Ta có $y'=-3x^2+6x-2m$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi $-3x^2+6x-2m\leq 0\ \forall x\in(-\infty;0)$ hay $m\geq\frac{6x-3x^2}{2}\ \ \forall x<0$. Hàm bậc hai $y=\frac{6x-3x^2}{2}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$, ta được $m\geq 0$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.11. Ta có $y'=3x^2+6x+(m-1)$. Vì y là hàm bậc khi ba, y đồng biến trên $(-\infty;0)$ khi và ,chỉ khi $y'\geq 0\ \forall x<0$ hay $m\geq(1-6x-3x^2)\ \forall x<0$. Từ tính chất hàm bậc 2, hàm $g(x)=1-6x-3x^2$ đạt GTLN bằng $g(-1)=4$. Vậy $m\geq\max\limits_{(-\infty;0)} g(x)=4$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.12. Ta có $y'=3x^2-4mx-m$.
Điều kiện cần tính đồng biến: $3x^2-4mx-m\geq 0\quad\forall x\in(1;2)$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.13. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.14. *Đáp án đúng là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.15. TXĐ là $\mathbb{R}$. Từ điều kiện cần của hàm đồng biến, $y'=m-\cos x\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó, $m\geq 1$. Vậy, chỉ còn lại hai phương án B và C. Khi $m=1$, $y'=1-\cos x\geq 0$ trên $\mathbb{R}$ và trên mỗi đoạn hữu hạn $y'(x)=0$ có hữu hạn nghiệm. Do đó, y đồng biến trên mọi khoảng hữu hạn. Vì thế, y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.16. Ta có $y'=2\cos 2x-m$. Hàm số nghịch biến kéo theo

$$2\cos 2x-m\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq 2\cos 2x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq\max(2\cos 2x)=2$$

Đáp án đúng là B.

□

GIẢI BÀI TẬP 1.17. Ta có $y'=3x^2+12x+m$. Nếu $\Delta'=36-3m\leq 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi $\Delta'>0\Leftrightarrow m<12$, hàm số đồng biến trên khoảng có độ dài lớn nhất $(x_1;x_2)$ với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $y'=0$. Do đó, $|x_1-x_2|=2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=4$ hay $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$. Sử dụng định lý Viet: $x_1+x_2=-4, x_1x_2=\frac{m}{3}$. Thế vào ta được $4^2-4\frac{m}{3}=4$. Vậy $m=9$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.18. Ta có $y' = 3x^2 + 18x - m$.
Hàm số có khoảng nghịch biến nên $\Delta' = 81 - 3m > 0$.
Kí hiệu $x_1 = -6 - \sqrt{9 + \frac{m}{3}}, x_2 = -6 + \sqrt{9 + \frac{m}{3}}$ là hai nghiệm của $y' = 0$. Hàm số nghịch biến trên khoảng lớn nhất (x_1, x_2). Dễ thấy $-6 \in (x_1; x_2)$. Khoảng này chứa nhiều nhất 3 số nguyên khi và chỉ khi $-5 \le x_1 < -4 < -2 < x_2 \le -1$. Thay công thức x_1, x_2 ta được

$$1 < \sqrt{9 + \frac{m}{3}} \le 2 \Leftrightarrow -24 < m \le -15.$$

Đáp án đúng là D.
Chú ý: Lời giải theo phong cách truyền thống như trên chặt chẽ nhưng khá phức tạp. Nếu dùng phương pháp loại trừ có thể lập luận đơn giản như sau: Với $-m$ lớn, hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại A. Thử trực tiếp $m = -15$, hàm số trở thành $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 1$. $y' = 3x^2 + 18x + 15 = 0$ ta được $x_1 = -5, x_2 = -1$. Như vậy $m = -15$ thỏa mãn. Loại C. Thử trực tiếp $m = 0$ không thỏa mãn, loại B.
Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 1.2
Cực trị của hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa cực trị của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Ta nói:

a) Hàm số f đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h;x_0+h)$ và $x \neq x_0$. $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại của hàm số.

b) Hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h;x_0+h)$ và $x \neq x_0$. $f(x_0)$ gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lý 1: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $I = (x_0-h;x_0+h)$ hoặc $I \setminus \{x_0\}$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Định lý 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng $I = (x_0-h;x_0+h)$ với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm cực trị của hàm số

Phương pháp giải: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta làm như sau:

- Tìm tập xác định.
- Tính y'. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Lập bảng biến thiên và kết luận.

VÍ DỤ 1.8. *Hàm số* $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. *Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?*

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, *đạt cực tiểu tại* $x=0$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ *và* $x=0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ *và* $x=0$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$, *đạt cực đại tại* $x=0$.

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = \dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0$.
y' không xác định tại $x = -1$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.
Vậy đáp án là A. □

Nhận xét: Vì hàm số liên tục khác không trên một khoảng sẽ có dấu xác định trên khoảng đó, nên để xét dấu y' trên từng khoảng, ta có thể thử trực tiếp dấu của y' tại một điểm nằm trong khoảng đó. Tuy nhiên, dấu của y' khi qua từng điểm tới hạn của hàm số, có thể không đổi dấu.

VÍ DỤ 1.9. *Hàm số $y = x - \sin x + 2016$ có bao nhiêu điểm cực trị?*

A. 0 *B. 1* *C. 2* *D. vô số*

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y'(x) = 1 - \cos x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Xét tại mỗi $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, đạo hàm $y'(x)$ mang dấu dương khi x qua $k2\pi$. Do đó, $x = k2\pi$ không là điểm cực trị của hàm số.
Vậy đáp án là A. □

Chú ý: Câu này học sinh dễ chọn nhầm phương án D, khi quên không kiểm tra điều kiện đủ tại các điểm tới hạn
Phương pháp giải 2: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta làm như sau

- Tìm tập xác định.
- Tính y'. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó đạo hàm $y' = 0$.
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

VÍ DỤ 1.10 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số là*

A. $y_{CD} = 4$ *B.* $y_{CD} = 1$ *C.* $y_{CD} = 0$ *D.* $y_{CD} = -1$

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
$y'' = 6x$. Suy ra $y''(1) = 6 > 0, y''(-1) = -6 < 0$ nên $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.
$y_{CĐ} = y(-1) = 4$.
Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.11. *Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$. Tìm khẳng định đúng*

A. *y đạt cực trị tại điểm $x = \pm\sqrt{2}$ và $x = 0$.*

B. *y đạt cực tiểu tại $x = 0$.*

C. *y đạt cực đại tại $x = 0$.*

D. *y đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$.*

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 4x^3 + 8x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$y'' = 12x^2 + 8$, $y''(0) = 8 > 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
Vậy đáp án là B. □

Nhận xét: Chúng ta thường sử dụng Quy tắc 2 khi tìm điểm cực trị của các hàm bậc ba và bậc bốn. Các hàm số này có đạo hàm cấp một trên toàn trục số và dễ dàng tính được các đạo hàm cấp hai.

Khi gặp bài toán chứa tham số, chúng ta xét các điểm cực trị theo các phương pháp trên.

VÍ DỤ 1.12. *Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi*

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m > 0$ D. $m < 0$

GIẢI. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$, $y'' = 6x - 6$.
$x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số khi và chỉ khi $y'(2) = 0, y''(2) > 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.13. *Hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x$ đạt cực đại tại $x = 2$ khi*

A. $m = -3$ B. $m = -2$ C. $m = 0$ D. $m = -1$

GIẢI. Ta có $y' = 3mx^2 + 6x + 12$, $y'' = 6mx + 6$.
$x = 2$ là điểm cực đại của hàm số khi và chỉ khi $y'(2) = 0, y''(2) < 0 \Leftrightarrow 12m + 24 = 0, 12m + 6 < 0 \Leftrightarrow m = -2$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.14. *Hàm số nào sau đây chỉ có cực đại mà không có cực tiểu ?*

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ B. $y = \dfrac{1-x}{2+x}$

C. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ D. $y = -\dfrac{x^4}{2} - x^2 + 1$

GIẢI. Hàm phân thức dạng bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị do y' luôn giữ nguyên dấu. Đáp án A, $y' = -3x^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hàm số có cả cực đại và cực tiểu.
Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.15. *Hàm số $y = 2|x| + \cos 2x - 2016$ có bao nhiêu điểm cực trị?*

A. 0 *B. 1* *C. 2* *D. vô số*

GIẢI. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.
Ta có $y'(x) = 2 - 2\sin 2x\ \forall x > 0$ và $y'(x) = -2 - 2\sin 2x\ \forall x < 0$.
Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$.
Xét tại $x = 0$. Vì $y'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 0 nên $x = 0$ là một điểm cực tiểu của hàm số.
Xét tại mỗi điểm tới hạn $x_* \neq 0$. Khi đó, đạo hàm $y'(x)$ luôn mang dấu dương khi x qua $x_* > 0$ và mang dấu âm nếu khi qua $x_* < 0$. Do đó, hàm số không có điểm cực trị nào khác 0.
Vậy đáp án là B. □

Dạng 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Phương pháp giải: Bài toán về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị thường xét đối với hàm số bậc ba và hàm phân thức.

- Xét hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dùng phương pháp chia đa thức, ta viết được $y = y'(x)q(x) + Ax + B$ trong đó $q(x)$ là thương, $Ax + B$ là phần dư khi chia $y(x)$ cho $y'(x)$. Tại các điểm cực trị $y' = 0$, do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình $y = Ax + B$. Ngoài ra, đồ thị hàm bậc ba có tâm đối xứng là **điểm uốn** của đồ thị hàm số. Điểm uốn cũng chính là trung điểm đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (nếu tồn tại cực trị).
- Xét hàm phân thức $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, trong đó $u(x), v(x)$ là các đa thức bậc hai và bậc nhất. Tại các điểm cực trị $y' = 0 \Leftrightarrow u'v - v'u = 0$. Do đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.

VÍ DỤ 1.16. *Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ có hệ số góc là:*

A. $k = -1$ *B.* $k = 2$ *C.* $k = 6$ *D.* $k = 4$

GIẢI. Hàm số dạng phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Các điểm cực trị có hoành độ thỏa mãn $y' = 0 \Leftrightarrow u'v - v'u = 0$, do đó tọa độ hai điểm cực trị thỏa mãn phương trình $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = 4x + 1$, hệ số góc $k = 4$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.17. *Biết rằng hàm số* $y = \dfrac{2x^2 - 7x + m - 5}{x+3}$ *đạt cực trị tại các điểm* x_1, x_2. *Giá trị của biểu thức* $P = \left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right|$ *là:*

A. $P = 2$ *B.* $P = 6$ *C.* $P = 4$ *D.* $P = 3$

GIẢI. $k = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ là hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị $(x_1; f(x_1))$ và $(x_2; f(x_2))$ của hàm số. Đường thẳng này là $y = 4x - 7$, do đó $P = |k| = 4$.
Vậy đáp án là C. □

Dạng 3: **Tìm tham số m để hàm số có n cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước**

Phương pháp giải: Bài toán về số cực trị xét với hàm số bậc ba và bậc bốn trùng phương.
Hàm số có n cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.
Các điều kiện trong bài toán cực trị có thể chia thành hai nhóm:

- Điều kiện liên quan đến biểu thức đại số.
  Xét hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Điều kiện đưa về tính chất nghiệm của tam thức bậc hai y'. Ta sử dụng định lý Viét.
- Điều kiện liên quan đến yếu tố hình học.
  Chúng ta lưu ý tính chất đặc biệt của các điểm cực trị của hàm bậc bốn trùng phương. Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$. Hàm số luôn có cực trị tại điểm $x = 0$, điểm cực trị $A(0; c)$ của đồ thị hàm số nằm trên trục tung.
  Khi $ab < 0$, đồ thị hàm số có thêm hai điểm cực trị $B(x_0; y_0), C(-x_0; y_0)$ đối xứng nhau qua trục tung Oy. ΔABC cân tại A. Các tính chất đặc biệt của ΔABC thường được xét đến là:
  - ΔABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
  - ΔABC đều $\Leftrightarrow AB = BC$.
  - ΔABC có diện tích S cho trước.

VÍ DỤ 1.18. *Hàm số* $y = x^3 - mx^2 - x + 1$ *có hai điểm cực trị* x_1, x_2 *thỏa mãn điều kiện* $3(x_1 + x_2) = 2$ *khi:*

A. $m = -1$ *B.* $m = 0$ *C.* $m = 1$ *D.* $m = 2$

GIẢI. $y' = 3x^2 - 2mx - 1$. $\Delta' = m^2 + 3 > 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2.
Theo định lý Viét, $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{3}$. Do đó $3(x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow m = 1$.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.19. *Tìm tham số m để hàm số* $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ *có hai điểm cực trị* x_1, x_2 *thỏa mãn điều kiện* $x_1^2 + x_2^2 = 3$?

A. $m = 1$ *B.* $m = -1$ *C.* $m = \dfrac{2}{3}$ *D.* $m = \dfrac{3}{2}$

GIẢI. $y' = 3x^2 - 6x + m$. $\Delta' = 9 - 3m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.
Theo định lý Viet, $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = \dfrac{m}{3}$. Do đó

$$3 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.20. *Tìm tham số m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + 4x_2 = 0$?*

A. $m = \pm\dfrac{9}{2}$ *B.* $m = \pm\dfrac{3}{2}$ *C.* $m = \pm\dfrac{1}{2}$ *D.* $m = 0$

GIẢI. $y' = 12x^2 - 2mx - 3$. $\Delta' = m^2 + 36 > 0$.
Nhận thấy điều kiện đối với hai điểm cực trị khó biểu diễn lại qua định lý Viet, vì thế ta tính trực tiếp nghiệm và thay vào phương trình $y' = 0$. Ta có $x_1.x_2 = -\dfrac{1}{4}, x_1 = -4x_2$. Suy ra $x_2 = \pm\dfrac{1}{4}$. Thay vào phương trình $y' = 0$ ta có

$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{16} - \frac{2m}{4} - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{2}$$
$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{16} + \frac{2m}{4} - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.21. *Tìm tất cả tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ có hai điểm cực trị với hoành độ cùng dấu?*

A. $-2 \le m < 2$ *B.* $-2 < m \le 2$ *C.* $-2 < m < 2$ *D.* $-1 < m < 3$

GIẢI. $y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (m+2) = 0$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hai điểm cực trị với hoành độ cùng dấu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1.x_2 > 0$. Điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - (m+2) > 0 \\ x_1.x_2 = m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.22 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.*

A. $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ *B.* $m = -1$ *C.* $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ *D.* $m = 1$

GIẢI. $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = -m$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 0$.
Tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0;1), B(\sqrt{-m}; 1-m^2), C(-\sqrt{-m}; 1-m^2)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$.
ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = m^4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = \pm 1$.
Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta được $m = -1$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.23. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$:*

A. $m = \pm 1$ *B.* $m = \pm\sqrt{3}$ *C. Không tồn tại* m *D. Đáp án khác*

GIẢI. $y' = 4x^3 + 4(1-m^2)x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = m^2 - 1$. Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$.
Tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0; m+1), B(\sqrt{m^2-1}; m+1-(m^2-1)^2), C(-\sqrt{m^2-1}; m+1-(m^2-1)^2)$.
Khoảng cách từ A đến đường thẳng $BC: y = m+1-(m^2-1)^2$: $d = |y_A - y_B| = (m^2-1)^2$.
$BC = 2\sqrt{m^2-1}$. Suy ra $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow (m^2-1)^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.24. *Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9x + m + 4$. Tìm điều kiện của m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 8y - 49 = 0$?*

A. $m = -1$ *B.* $m = 1$ *C.* $-1 < m < 0$ *D.* $m = 0$

GIẢI. A,B đối xứng qua $d: y = \dfrac{x-49}{8}$ khi và chỉ khi $AB \perp d$ và trung điểm M của AB nằm trên d. Trung điểm của AB là điểm uốn của đồ thị hàm số: $y''(x) = 6x - 6m = 0 \Leftrightarrow x = m$. Ta được tọa độ $M(m; -2m^3 - 8m + 4)$. Điểm $M \in d \Leftrightarrow m - 8(-2m^3 - 8n + 4) - 49 = 0 \Leftrightarrow 16m^3 + 65m - 81 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
Vậy đáp án là B. □

Chú ý: Trong lời giải trên ta thấy điều kiện trung điểm hai điểm cực trị thuộc d dùng để thu được $m = 1$. Đây chỉ là điều kiện cần. Do đó loại cả A,C và D. Do chỉ có một đáp án đúng nên chọn B. Trong một số tình huống khác, có thể kiểm tra điều kiện đường thẳng qua hai điểm cực trị vuông góc với d trước như sau: Vì $y' = 3x^2 - 6mx - 9$. Chia đa thức y cho y', ta được $y(x) = y'(x)\dfrac{x-m}{3} - 2(m^2+3)x + 4$. Ta được phương trình qua hai điểm cực trị là $y = -2(m^2+3)x + 4$. Trước hết, $AB \perp d \Leftrightarrow -2(m^2+3)\dfrac{1}{8} = -1 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Trong trường hợp cụ thể này, cách làm sau dài hơn. Tuy nhiên, cần kết hợp linh hoạt dùng điều kiện nào trước trong từng tình huống cụ thể.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.19. Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $f'(x_0) = 0$.

B. $f'(x_0)$ không tồn tại.

C. $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

D. $f(x_0) = 0$.

BÀI TẬP 1.20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Chọn mệnh đề đúng!

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x_0) = 0$.

B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x)$ đổi dấu khi qua x_0.

D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

BÀI TẬP 1.21. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Chọn khẳng định SAI:

A. Nếu hàm số có cực trị thì hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành.

D. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

BÀI TẬP 1.22. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$. Chọn khẳng định SAI:

A. Hàm số luôn luôn có cực trị.

B. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

C. Phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm.

D. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành.

BÀI TẬP 1.23. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu cực trị?

A. 2 B. 0 hoặc 2 C. 0 hoặc 1 hoặc 2 D. 1 hoặc 2

BÀI TẬP 1.24. Hàm số bậc bốn trùng phương có thể có bao nhiêu cực trị?

A. 0 B. 0 hoặc 3 C. 0 hoặc 1 hoặc 3 D. 1 hoặc 3

BÀI TẬP 1.25. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

C. Hàm số không có cực trị D. Hàm số có 2 điểm cực trị

BÀI TẬP 1.26. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 12$ có mấy điểm cực trị:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

BÀI TẬP 1.27. Hàm số $y = (2-x)^5(x+1)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị:

A. 7 B. 5 C. 3 D. 1

BÀI TẬP 1.28. Cho hàm số $y = 3x^3 - 4x^2 - mx - m^2$ phụ thuộc tham số m. Hàm số đạt cực trị tại 2 điểm x_1, x_2. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{8}{9}$ D. 1

BÀI TẬP 1.29. Đồ thị hàm số $y = x + 1 + \frac{x}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng $y = ax + b$ thì tích $a.b$ bằng:

A. 0 B. 2 C. 4 D. -2

BÀI TẬP 1.30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số tiếp xúc với đường tròn $(x - m + 1)^2 + (y + 3m)^2 = 5$

A. $m = -1$ B. $m = -11$ hoặc $m = -1$

C. $m = 11$ D. $m = -11$

BÀI TẬP 1.31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho điểm $O(0;0)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m - 2$?

A. $m \leq 0$ B. $m > 2$

C. $m = 2$ D. $m = 0$ hoặc $m = 2$

BÀI TẬP 1.32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì đường thẳng $d : y = x + m$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$?

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 3$

BÀI TẬP 1.33. Gọi A, B lần lượt là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khi đó diện tích tam giác ABC, với $C(1;1)$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

BÀI TẬP 1.34. Khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ đến đường phân giác góc phần tư thứ hai trong hệ trục Oxy là:

A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

BÀI TẬP 1.35. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}$ có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ thì giá trị của $T = a + 2b$ là:

A. -1 B. 0 C. 1 D. -2

BÀI TẬP 1.36. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $d : y = 2x - 1$ khi:

A. $m = \dfrac{1}{2}$ B. $m = \dfrac{2}{3}$ C. $m = 6$ D. $m = \dfrac{3}{2}$

BÀI TẬP 1.37. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với với đường thẳng $d : x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45°$ khi:

A. $m = -\dfrac{1}{2}$ B. $m = \dfrac{1}{2}$ C. $m = \pm\dfrac{1}{2}$ D. Đáp án khác

BÀI TẬP 1.38. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$?

A. $m = -\dfrac{15}{4}$ B. $m = \dfrac{4}{15}$ C. $m = -\dfrac{4}{15}$ D. $m = \dfrac{15}{4}$

BÀI TẬP 1.39. Điều kiện của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có hai điểm cực trị là:

A. $m \geq 3$ B. $m < 3$

C. $m \in \mathbb{R}$ D. Không tồn tại m

BÀI TẬP 1.40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m - 2)^2x^2 + m^2$ có 3 điểm cực trị?

A. $m > 2$ B. $m < 2$ C. $m = 2$ D. $m \neq 2$

BÀI TẬP 1.41. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (2m - 1)x^2 + m + 1$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. $m < \dfrac{1}{2}$ B. $m \leq \dfrac{1}{2}$ C. $m > \dfrac{1}{2}$ D. $m \geq \dfrac{1}{2}$

BÀI TẬP 1.42. Từ dáng điệu đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x|$ có mấy cực tiểu?

A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

BÀI TẬP 1.43. Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 B. 6 C. 7 D. 3

BÀI TẬP 1.44. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2(m - 1)x^2 + 3$ có cực đại mà không có cực tiểu khi:

A. $m \leq 1$ B. $m < 1$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

BÀI TẬP 1.45. Đồ thị hàm số nào sau đây chỉ có 1 điểm cực trị?

A. $y = 3x^4 - 4x^2 + 2$ B. $y = (m^2 + 4)x^4 + 9x^2 - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$ D. $y = -x^4 + (m^2 + 1)x^2 + 2$

BÀI TẬP 1.46. Số điểm cực trị của hàm $y = \cos x - x$ là

A. vô số B. 2 C. 1 D. 0

BÀI TẬP 1.47. Hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 4}{x + m}$ luôn có cực trị khi:

A. $m = 0$ B. $m = 1$

C. $m \in \mathbb{R}$ D. Không tồn tại m

BÀI TẬP 1.48. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 2$. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$ bằng:

A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

BÀI TẬP 1.49. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có các điểm cực đại, cực tiểu thỏa mãn $x_{\text{CĐ}}^2 = x_{\text{CT}}$?

A. $m = 0$ B. $m = 0$ hoặc $m = 3$

C. $m = -3$ D. $m = -3$ hoặc $m = 0$

BÀI TẬP 1.50. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 - (m^2 - 2m)x + 12$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của trục tung?

A. $0 < m < 2$ B. $0 \leq m \leq 2$ C. $m > 2$ D. $m < 0$

BÀI TẬP 1.51. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm ở góc phần tư thứ nhất.

B. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía của trục hoành.

C. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về cùng một phía của trục hoành.

B. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về cùng một phía của trục tung.

BÀI TẬP 1.52. Tìm tất cả các giá trị của m thì đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân?

A. $m = -2$ B. $m = \pm 1$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

BÀI TẬP 1.53. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2m + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc O?

A. $m = -\frac{2}{3}$ B. $m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \frac{1}{3}$

BÀI TẬP 1.54. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc O?

A. $m = -\frac{3}{4}$ B. $m = \frac{4}{3}$ C. $m = -\frac{4}{3}$ D. $m = \frac{3}{4}$

BÀI TẬP 1.55. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng $120°$?

A. $m = 0$ B. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ hoặc $m = 0$ D. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.19. *Đáp án đúng là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.20. Dễ thấy A,B,C sai và D đúng.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.21. Đáp án D sai vì khi $y = x^3$ không có cực trị mặc dù $y' = 3x^2 = 0$ có nghiệm.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.22. Đáp án D sai vì chẳng hạn, đồ thị $y = x^4 + 1$ luôn nằm trên trục hoành. Các đáp án A,B,C đúng từ tính chất của hàm bậc bốn trùng phương.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.23. Nếu đạo hàm $y' = 0$ có nghiệm kép hay vô nghiệm thì hàm số đơn điệu nên số cực trị bằng 0. Ngược lại, nếu $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hàm số có 2 điểm cực trị.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.24. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.25. Dễ thấy $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị: $x = -1; x = 1$. Suy ra đáp án C sai.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.26. Vì $y' = 4x^3 - 2x$ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có 3 cực trị.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.27.

$$y'(x) = 5(2-x)^4(x+1)^3(2-x)' + (2-x)^5.3(x+1)^2(x+1)' = (2-x)^4(x+1)^2(1-8x)$$

Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{8}, x_2 = 2$. Xét tại $x_1 = -1$ (hoặc $x_2 = 2$) dễ thấy $y'(x)$ cùng dấu với $1-8x$ nên luôn mang dấu dương (âm) khi qua x_1 (qua x_2). Do đó, hàm số không đạt cực trị tại x_1, x_2. Xét tại x_3, $y'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua $x_3 = \frac{1}{8}$. Do đó, hàm số chỉ có một điểm cực trị tại x_3.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.28. Ta viết hàm bậc 3 có tâm đối xứng I có hoành độ là nghiệm của $y''(x) = 18x - 8 = 0$. Ta được hoành độ $x_I = \frac{4}{9}$. Vì tâm đối xứng là trung điểm đoạn thẳng nối hai điểm cực trị nên $x_1 + x_2 = 2x_I = \frac{8}{9}$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.29. Viết lại $y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$. Sử dụng phương trình đường thẳng qua cực trị của đồ thị hàm phân thức, ta được $y = \frac{(x^2+x-1)'}{(x-1)'} = 2x+1$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.30. $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Từ đó, được 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $A(0;4), B(2;0)$. Từ đó, AB có phương trình $2x + y - 4 = 0$. Đường tròn tâm $I(m-1;-3m)$, bán kính $\sqrt{5}$ nên $d(I, AB) = \frac{|2(m-1) - 3m - 4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-m-6| = 5$. Ta được $m \in \{-11, -1\}$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.31. Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2m$. Đồ thị hàm số có cực trị khi và chỉ khi $2m \neq 0$ hay $m \neq 0$. Khi đó, tọa độ 2 điểm cực trị là $A(0; m-2)$, $B(2m; -4m^3 + m - 2)$. Ta được $\overrightarrow{AB}\,(2m; -4m^3) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA}(0; m-2)$. Dễ thấy AB đi qua O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương hay $\frac{0}{2m} = \frac{m-2}{-4m^3}$. Ta được $m = 2$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.32. $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$. Ta được hai điểm cực trị $A(1;4), B(3;0)$. Trung điểm đoạn nối AB là $M(2;2)$. Thay vào phương trình của d, ta được $2 = 2 + m$ hay $m = 0$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.33. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Tọa độ hai điểm cực trị $A(0;2), B(2;-2)$. Từ đó, $\overrightarrow{AB} = (2;-4)$ và AB có vecto pháp tuyến $\vec{n}(2;1)$. Ta được $AB = 2\sqrt{5}$ và phương trình tổng quát $2x + y - 2 = 0$. Diện tích S của tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{|2.1+1-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 1.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.34. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Ta được hai điểm cực trị $A(0;1), B(2;-3)$. Điểm cực đại là $A(0;1)$. Đường phân giác góc phần tư thứ hai trong hệ Oxy có phương trình $x + y = 0$. Do đó, khoảng cách cần tính $d = \dfrac{|0+1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.35. Sử dụng tính chất hàm phân thức đơn giản, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là $y = 2x - 2$. Do đó, $T = 2 + 2(-2) = -2$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.36. Ta có $y'(x) = 3x^2 - 6x + m$. Chia đa thức y cho y' ta được

$$y(x) = y'(x)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \frac{4m}{3}.$$

Ta được phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = \left(\dfrac{2m}{3} - 2\right)x + \dfrac{4m}{3}$.

Đường thẳng này song song với $d: y = 2x - 1$ ta được $\dfrac{2m}{3} - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 6$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.37. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$. Đồ thị hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Chia đa thức y cho y' ta được: $y(x) = y'(x)\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{2m}{3} - 2\right)x + \left(\dfrac{m}{3} + 2\right)$. Ta được đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = \left(\dfrac{2m}{3} - 2\right)x + \left(\dfrac{m}{3} + 2\right)$. Đường thẳng hệ số góc k này tạo với $d: y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{4}{5}$ một góc 45^0 khi và chỉ khi $\left|\dfrac{k + \frac{1}{4}}{1 - k\frac{1}{4}}\right| = 1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{5}{3}, k = \dfrac{3}{5}$. Thử nếu $\dfrac{2m}{3} - 2 = \dfrac{3}{5} \Rightarrow m = \dfrac{39}{10} > 3$ (loại).

Nếu $\dfrac{2m}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.38. Ta có $y' = 3x^2 - 2mx + 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, \Rightarrow y'(2) = 3.2^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{15}{4}$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.39. Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta' = 36 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.40. Ta có $y' = 3x^4 - 2(m-2)^2x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 2$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.41. Với hàm bậc bốn trùng phương, đồ thị hàm số có đúng 1 điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 4x^3 + 2(2m-1)x = 0$ có duy nhất nghiệm hay $2m - 1 \geq 0$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.42. Vẽ phác họa đồ thị hàm số hoặc lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai cực tiểu $x = 0, x = 4$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.43. Hàm bậc 4 trùng phương có nhiều nhất 3 điểm cực trị. Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ nhận được từ đồ thị $y = ax^4 + bx^2 + c$ bằng cách giữa nguyên đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới. Do đó, ngoài 3 điểm cực trị thông thường, có thêm tối đa 4 điểm cực trị là các giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với trục hoành. Vậy đồ thị hàm số có đã cho có tối đa 7 điểm cực trị.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.44. Ta có $y' = -4x^3 + 4(m-1)x$. Vì hệ số cao nhất âm, đồ thị hàm trùng phương chỉ có cực đại mà không có cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow$ $4x(m - 1 - x^2) = 0$ có duy nhất nghiệm hay $m - 1 \leq 0$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.45. Đối với hàm số bậc bốn trùng phương, đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ chỉ có một nghiệm. Thử trực tiếp.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.46. TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có $y' = -\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Hàm số có vô số điểm tới hạn. Tại các điểm tới hạn này, đạo hàm $y' = -\sin x - 1$ luôn âm khi qua các điểm tới hạn, do đó, các điểm tới hạn không là các điểm cực trị.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.47. Dễ thấy $y = x + \dfrac{4}{x+m}$. Do đó, $y' = 1 - \dfrac{4}{(x+m)^2} = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.48. Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + x_2 = 2m, x_1x_2 = -1$. Do đó, $A = \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \dfrac{4m^2+2}{1}$. Dễ thấy A đạt GTNN bằng 2 khi $m = 0$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.49. Ta thử trực tiếp, với $m = 0$, hàm số dạng $y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1 < x_2 = 1$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, cực tiểu tại $x = 1$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.
Thử với $m = 3$, $y' = 3x^3 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, cực tiểu tại $x = 4$. Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.50. $y' = -3x^2 + 2x - m^2 + 2m$. Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm hai phía trục tung khi và chỉ khi các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có hoành độ trái dấu hay $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu. Ta được $(-1)(-m^2 + 2m) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.51. Tính trực tiếp $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Ta được hai điểm cực trị $A(-1; 3), B(1; -1)$. Do đó, A, C, D sai và B đúng.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.52. Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2-m}$ với $m < 2$. Ta được ba điểm cực trị $A(0; m^2 - 5m + 5), B(-\sqrt{2-m}; 1-m), C(\sqrt{2-m}; 1-m)$. Do đó, $AB = AC = \sqrt{(2-m)^2 + (m^-4m+4)^2}, BC = 2\sqrt{2-m}$. Vì ΔABC cân tại A nên tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^0$ hay $BC^2 = 2AB^2 \Leftrightarrow 4(2-m) = 2(2-m)^2 + 2(2-m)^4 \Leftrightarrow 2 = (2-m) + (2-m)^3$. Giải ta được $2 - m = 1$ hay $m = 1$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.53. Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{6m+2}$ với $m > -\frac{1}{3}$. Đồ thị hàm số có ba cực trị $A(0; 2m+2), B(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 6m + 1), C(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 6m + 1)$. Do đó, gốc O là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $x_A + x_B + x_C = 0$ luôn đúng và $y_A + y_B + y_C = -18m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}, m = -\frac{2}{3}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.54. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$. Ta được ba điểm cực trị $A(0; m+2), B(-1; m+1), C(1; m+1)$. Gốc O là trong tâm của ΔABC khi và chỉ khi $x_A + x_B + x_C = 0, y_A + y_B + y_C = 0 \Leftrightarrow m + 2 + (m+1) + (m+1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.55. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m}$ với $m > 0$. Khi đó, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; m^2 + m), B(-\sqrt{m}; m), B(\sqrt{m}; m)$. Ta được $AB = AC = \sqrt{m + m^4}, BC = 2\sqrt{m}$. Vì tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC có một góc bằng 120^0 khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 120^0$. Sử dụng định lí hàm cosin, ta được

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m + m^4) - 4m}{2(m + m^4)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(m + m^4) - 4m = -(m + m^4) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 1.3
Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số f xác định trên tập D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$.

2. Định lý

Hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$**

Phương pháp giải: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau

- Tính y'. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.
- Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất trong các số trên. Ta có

$$M = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)\} = \max_{[a;b]} f(x);$$
$$m = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)\} = \min_{[a;b]} f(x).$$

VÍ DỤ 1.25 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ *trên đoạn* $[2; 4]$*:*

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$ B. $\min\limits_{[2;4]} y = -2$ C. $\min\limits_{[2;4]} y = -3$ D. $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$

GIẢI. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \forall x \in [2; 4]$.
$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$. Ta có $x = 3 \in (2; 4)$.
Tính $y(2) = 7$, $y(3) = 6$, $y(4) = \dfrac{19}{3}$. Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y = 6$.
Vậy đáp án là A. □

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

Phương pháp giải: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ ta làm như sau

- Tính y'. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng đó.

VÍ DỤ 1.26. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số* $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ *trên* $\mathbb{R}$:

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$ B. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -1$ C. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 2$ D. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2}$

GIẢI. Ta có $y' = \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \forall x \in \mathbb{R}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.27 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gập tấm nhôm lại nhưu hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất*

A. $x = 6$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

GIẢI. Sau khi cắt và ghép hình vuông ta thu được hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $12 - 2x$ (cm) và chiều cao x (cm).
Thể tích của hộp là

$$y = x(12-2x)^2 = 4(x^3 - 12x^2 + 36x),\ x \in (0;6).$$

Ta có

$$y' = 4(3x^2 - 24x + 36) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 6 \text{ (loại)}.$$

Lại có

$$y(0) = 0, y(2) = 128, y(6) = 0$$

Bảng biến thiên

x	0		2		6
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Vậy đáp án là C. □

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất bất đẳng thức, các bất đẳng thức cơ bản.

VÍ DỤ 1.28. *Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^4 x + \sin^3 x$ trên $\mathbb{R}$ là:*

A. 2 *B.* $\sqrt{2}$ *C.* 1 *D.* 0

GIẢI. Vì $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ nên ta có ước lượng $\cos^4 x \leq \cos^2 x$ và $\sin^3 x \leq \sin^2 x$. Cộng các vế bất đẳng thức cùng chiều, thu được $y = \cos^4 x + \sin^3 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Dấu đẳng thức có thể xảy ra, chẳng hạn khi $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do đó, giá trị lớn nhất của y là 1.

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.29. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 12\cos x - 5\sin x$ trên $\mathbb{R}$:*

A. 7 *B.* 13 *C.* 17 *D.* 12

GIẢI. Gọi φ là góc sao cho $\sin\varphi = \dfrac{12}{13}$ và $\cos\varphi = -\dfrac{5}{13}$. Ta có

$$y = 13(\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x) = 13\sin(x+\varphi).$$

Suy ra $-13 \leq y \leq 13$.

Vậy đáp án là B. □

Chú ý: Trong ví dụ trên ta sử dụng bất đẳng thức cơ bản của biểu thức bậc nhất chứa $\sin x, \cos x$: nếu $y = a\sin x + b\cos x$ thì $\max y = \sqrt{a^2+b^2}$, $\min y = -\sqrt{a^2+b^2}$.

VÍ DỤ 1.30. *Với mọi giá trị thực của m, tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m^2-1}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ bằng:*

A. 0 *B.* 1 *C.* -1 *D.* $-\dfrac{1}{4}$

GIẢI. Xét trường hợp đặc biệt $m = 1$, $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Theo bất đẳng thức Cauchy: $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ và $x = 1$. Do đó, giá trị nhỏ nhất, lớn nhất lần lượt là $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$. Tích số là $-\dfrac{1}{4}$.

Vậy đáp án là D. □

Chú ý: Trong ví dụ trên, nếu trực tiếp tính đạo hàm, khảo sát hàm số có chứa tham số m có thể khá mất thời gian, trong khi không tận dụng được thông tin quan trọng được ẩn trong đề bài là tích số của GTLN và GTNN không phụ thuộc vào m. Có thể làm trực tiếp chặt chẽ theo kiểu tự luận bằng cách khảo sát hàm số hoặc phương pháp miền giá trị.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.56. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số có ít nhất một tiệm cận.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số đạt cực tiểu bằng -1.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1.

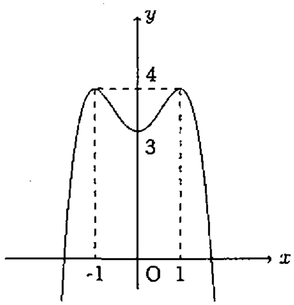
BÀI TẬP 1.57. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất.

D. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.



BÀI TẬP 1.58. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$:

A. $\min\limits_{[0;2]} y = \dfrac{2}{3}$ B. $\min\limits_{[0;2]} y = \dfrac{4}{3}$ C. $\min\limits_{[0;2]} y = 2$ D. $\min\limits_{[0;2]} y = -7$

BÀI TẬP 1.59. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - x$ trên $[0; +\infty)$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Đáp án khác

BÀI TẬP 1.60. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2} - x$ là:

A. 5 B. $5\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

BÀI TẬP 1.61. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$ là:

A. 2 B. 6 C. 1 D. -2

BÀI TẬP 1.62. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin 2x - 6\cos^2 x + 3$ là:

A. -7 B. 1

C. -5 D. không có giá trị nhỏ nhất

BÀI TẬP 1.63. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x + \sin x$ là:

A. $-\dfrac{8}{9}$ B. 0 C. $-\dfrac{7}{8}$ D. -1

BÀI TẬP 1.64. Hàm số $y = x^2 + \dfrac{16}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; \infty)$ tại:

A. $x = \dfrac{1}{2}$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 1$

BÀI TẬP 1.65. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 3$ trên đoạn $[-1; 3]$ là:

A. 25 B. 22 C. 16 D. 13

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.56. Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, nên A đúng. Hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = -1$, nên C đúng. Hơn nữa, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1, tức D đúng.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.57. Dễ thấy khẳng định A, B và C đúng.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.58. Ta có $y = x - 2 + \dfrac{4}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$.
Do đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -3(L)$. Ta được một điểm tới hạn $x = 1$.

Tính trực tiếp $y(0) = 2, y(2) = \frac{4}{3}, y(1) = \frac{2}{3}$. Vậy $\min\limits_{[0;2]} y = \frac{2}{3}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.59. Ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \leq 0\ \forall x > 0$. Hàm số liên tục trên $[0; \infty)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $[0; \infty)$. Vậy $\max\limits_{x\in[0;+\infty)} y(x) = y(0) = 1$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.60. Ta có $(\sqrt{16-x^2} - x)^2 \leq 2\left((16-x^2) + (-x)^2\right) = 32 \Rightarrow y \leq 4\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{16-x^2} = -x$, chẳng hạn $x = -2\sqrt{2}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.61. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$. Sử dụng $y' = 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$, hạn chế thuộc $(-1; 1)$ ta được $x = 0$. So sánh trực tiếp $y(-1) = 2, y(0) = 1, y(1) = 6$. Do đó, $\max\limits_{x\in[-1;1]} = 1$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.62. Ta có $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$ là hàm bậc nhất của $\sin 2x, \cos 2x$ nên $\min y = -\sqrt{4^2 + (-3)^2} = -5$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.63. Từ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, viết lại $y = 1 + \sin x - 2\sin^2 x$. Đặt $\sin x = t, t \in [-1; 1]$. Khảo sát $g(t) = 1 + t - 2t^2$ trên $[-1; 1]$ ta được $\min\limits_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = -2$; $\max\limits_{[-1;1]} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là $-2 + \frac{9}{8} = -\frac{7}{8}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.64. Thử trực tiếp.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.65. Dễ thấy $y' = -4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -2; 2\}$. Do đó, có hai điểm tới hạn $x = 0, x = 2$ trong $(-1; 3)$. Ta có $y(-1) = 10, y(0) = 3, y(2) = 19, y(3) = -6$. Vậy tổng của GTLN và GTNN là $-6 + 19 = 13$.
Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 1.4
Đường tiệm cận

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa các đường tiệm cận

Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu có một trong các điều kiện

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu có một trong các điều kiện

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

2. Các đường tiệm cận của hàm phân thức

Đồ thị hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị

- Ta thường xét tiệm cận đứng $x = x_0$ đối với những hàm số có dạng $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, với $v(x_0) = 0$.
- Để tìm tiệm cận ngang ta cần xét giới hạn khi $x \to \infty$.

VÍ DỤ 1.31 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ *và* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. *Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?*

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ *và* $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ *và* $x = -1$.

GIẢI. Đề bài xét hai giới hạn khi $x \to \infty$, tức là xét tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Đồ thị có hai tiệm cận ngang $y = 1$ khi $x \to +\infty$ và $y = -1$ khi $x \to -\infty$.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.32. *Đồ thị hàm số* $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$ *có các đường tiệm cận là:*

A. $x = 1, x = -2$ *B.* $x = -1, y = 1$ *C.* $x = 1, y = 2$ *D.* $x = 1, y = -2$

GIẢI. Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ta kiểm tra được

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{1-x} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -2$$

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.33. *Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:*

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1 ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. *Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.*

B. *Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.*

C. *Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$.*

D. *Hàm số có một giá trị cực trị là -1.*

GIẢI. Hàm số không xác định tại $x = -1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \infty$ do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, B đúng.
Mặt khác, $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, A đúng, C sai.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$, giá trị cực trị $y = -1$ nên D đúng.
Vậy đáp án là C. □

Dạng 2: **Tìm điều kiện tham số m để thỏa mãn tính chất về tiệm cận**

VÍ DỤ 1.34 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.*

A. Không tồn tại m *B. $m < 0$* *C. $m = 0$* *D. $m > 0$*

GIẢI. Hàm số có tiệm cận ngang nghĩa là ta cần xét giới hạn khi $x \to \infty$. Điều kiện để biểu thức dưới dấu căn có nghĩa là $mx^2 + 1 > 0$, $\forall x$, do đó $m \geq 0$.
Khi $m > 0$, dễ kiểm tra được $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
Vậy đáp án là D. □

Chú ý: Khi tính giới hạn $x \to \infty$ của hàm số dạng phân thức hoặc chứa căn thức, nếu bậc của x ở tử số mà không lớn hơn bậc của x ở mẫu thì giới hạn hữu hạn và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

VÍ DỤ 1.35. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 + m}$ chỉ có một tiệm cận đứng.*

A. $m \in \mathbb{R}$ B. $m < 0$ *hoặc* $m > 4$

C. $m \leq 0$ *hoặc* $m \geq 4$ D. $m < 0$ *hoặc* $m \geq 4$.

GIẢI. Ta dùng phương pháp loại trừ bằng thử trực tiếp. Với $m = 0$, $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $x = 0$ và $x = 3$. Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu. Do đó, chỉ còn chọn B hoặc D.
Thử với $m = 4$, rút gọn $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 4} = \dfrac{1}{(x-2)^2}$. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = 2$. Vậy $m = 4$ thỏa mãn. Do đó loại B.
Vậy đáp án là D. □

Nhận xét: Một lần nữa chúng ta lưu ý đến sự khác biệt khi làm bài trắc nghiệm bằng phương pháp loại trừ. Để loại bỏ phương án sai chỉ cần tìm ra một đặc điểm không phù hợp của phương án đó, chẳng hạn chọn một vài giá trị đặc biệt và thử trực tiếp, trong khi muốn khẳng định đáp án đúng phải khảo sát khá vất vả. Tất nhiên không phải lúc nào cũng làm được bằng cách loại trừ (chẳng hạn nếu trong các đáp án có đáp án khác); hoặc ngay cả khi làm được bằng phương pháp loại trừ thì cũng chưa thể đảm bảo đó là cách tối ưu. Do vậy, cần lưu ý vận dụng linh hoạt phương pháp loại trừ và phương pháp trực tiếp kiểu tự luận trong những tình huống cụ thể.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.66. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{1+x}$ có các đường tiệm cận là:

A. $x = 1, x = 2$ B. $x = -1, y = 1$ C. $x = -1, y = -1$ D. $x = -1, y = 1$

BÀI TẬP 1.67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$1 \searrow -\infty$		‖	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$	

Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có một cực trị.

BÀI TẬP 1.68. Đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $\dfrac{2x+1}{x+1}$ B. $\dfrac{x-1}{2x+1}$ C. $\dfrac{1+x}{1-x}$ D. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

BÀI TẬP 1.69. Đường thẳng $x = -1$ KHÔNG là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $\dfrac{2x+1}{x+1}$ B. $\dfrac{1+x}{\sqrt{x-2}}$ C. $\dfrac{3x+2}{x^2-1}$ D. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

BÀI TẬP 1.70. Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây không có tiệm cận đứng ?

A. $\dfrac{2x+1}{x^2-1}$ B. $\dfrac{x-1}{2x+1}$ C. $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ D. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

BÀI TẬP 1.71. Đường thẳng $y = -2$ KHÔNG là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $\dfrac{2x+1}{1-x}$ B. $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ C. $\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ D. $e^x - 2$

BÀI TẬP 1.72. Đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $\dfrac{2x+1}{x+1}$ B. $\dfrac{1-x}{2x-1}$ C. $\dfrac{1+x}{\sqrt{4x^2+1}}$ D. $\dfrac{2x^2+1}{x-2}$

BÀI TẬP 1.73. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+4x-3}{x^2-1}$ là?

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

BÀI TẬP 1.74. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-2mx+m^2-1}{x-2}$ có tiệm cận đứng?

A. $m \neq 1$ B. $m = 1$ C. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$ D. $m \neq 1, 3$

BÀI TẬP 1.75. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x-m}$ có hai tiệm cận đứng?

A. $m > -1$ B. $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ C. $\forall m \in \mathbb{R}$ D. $m < 1$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.66. Tập xác định $x \neq -1$, $\lim\limits_{x\to -1} y = \infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{1+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$, nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.67. Hàm số không xác định tại $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = 1$, nên đồ thị nhận $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

D. đúng do điểm $(1; -1)$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.68. Các hàm số được xét đều có dạng phân thức, tập xác định của hàm số $\dfrac{1+x}{1-x}$ là $x \neq 1$.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{1-x} = \infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.69. Tập xác định của các hàm số lần lượt là $x \neq -1$, $x > 2$, $x \neq \pm 1$, $x \neq -1$.
Hơn nữa

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{x+1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1} \frac{3x+2}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của ba đồ thị này.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x}{\sqrt{x-2}}$ không có ý nghĩa nên $x = -1$ không là tiệm cận đứng.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.70. Tập xác định của các hàm số lần lượt là $x \neq \pm 1$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $x < 1$, $\mathbb{R}$.
Hơn nữa

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x+1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \infty$$

ba đồ thị này có tiệm cận đứng.

Trong D. hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên không có tiệm cận đứng.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.71. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{1-x} = -2$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} = 2$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 2) = 0$.

nên ba đồ thị này có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x}{x-1} = \infty$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

Đáp án đúng là C.

Trong bài này bằng cách nhẩm bậc của x ở tử và mẫu số ta dễ dàng loại bỏ hai đáp án A. và B., nhận đáp án C. Ta kiểm tra thêm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ và cần ghi nhớ tính chất của hàm số mũ. □

GIẢI BÀI TẬP 1.72. Ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2.$$

Đáp án đúng là A.

Ta kiểm tra được tiệm cận ngang của hai hàm số tiếp theo lần lượt là $y=-\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{2}$, còn hàm số $\frac{2x^2+1}{x-2}$ không có tiệm cận ngang do bậc ở tử cao hơn bậc ở mẫu. □

GIẢI BÀI TẬP 1.73. Tập xác định: $x\neq\pm1$. Ta có

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-3}{x^2-1}=\infty,\ \lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x-3}{x^2-1}=\infty.$$

nên $x=\pm1$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.74. Tập xác định: $x\neq2$. Để hàm số có tiệm cận đứng, điều kiện là

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-2mx+m^2-1}{x-2}=\infty.$$

Điều kiện là $2^2-4m+m^2-1\neq0\Rightarrow m\neq1, m\neq3$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.75. Tập xác định: $x^2+2x-m\neq0$. Để hàm số có hai tiệm cận đứng, điều kiện là phương trình $x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm $x\neq1$.

Điều kiện là $\Delta'=1+m>0$ và $m\neq3$.

Vậy đáp án là B. □

CHUYÊN ĐỀ 1.5
Đồ thị hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa điểm uốn

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua điểm x_0 thì $U(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2. Đồ thị hàm phân thức

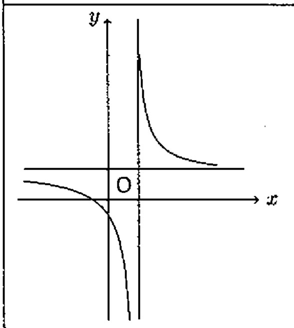
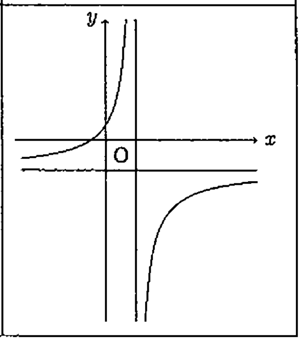
Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0, ad - bc \neq 0$.

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ và một tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Các dạng đồ thị:

$ad - bc < 0$	$ad - bc > 0$
	

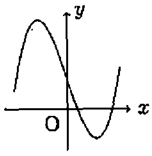
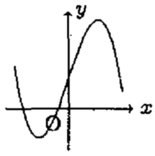
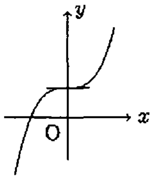
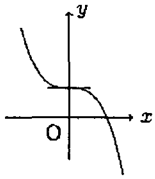
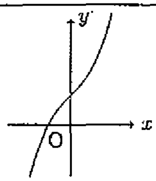
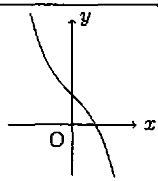
3. Đồ thị hàm bậc ba

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$.

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số luôn có một điểm uốn có hoành độ $x = -\dfrac{b}{3a}$, và nhận điểm uốn làm tâm đối xứng. Nếu đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì điểm uốn là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị đó. Đồ thị hàm số bậc ba không có tiệm cận.

Các dạng đồ thị:

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
$y' = 0$ có nghiệm kép		
$y' = 0$ vô nghiệm		

4. Đồ thị hàm bậc bốn trùng phương

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

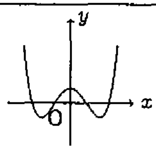
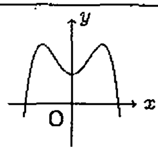
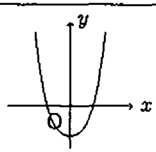
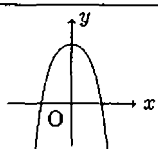
Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số có thể không có hoặc có hai điểm uốn.

Đồ thị hàm bậc bốn không có tiệm cận.

Các dạng đồ thị:

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		
$y' = 0$ có 1 nghiệm		

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Đọc hiểu bảng biến thiên và đồ thị hàm số

Phương pháp giải: Từ bảng biến thiên, hiểu được tính đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số.

VÍ DỤ 1.36 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. *Hàm số có đúng một cực trị.*

B. *Hàm số có giá trị cực tiểu bằng* 1.

C. *Hàm số có giá trị lớn nhất bằng* 0 *và giá trị nhỏ nhất bằng* -1.

D. *Hàm số đạt cực đại tại* $x = 0$ *và đạt cực tiểu tại* $x = 1$.

GIẢI. Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có hai điểm cực trị, do đó [A.] sai.
Điểm đạt cực tiểu là $x = 1$, giá trị cực tiểu bằng -1, do đó [B.] sai.
Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, [C.] sai.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = 1$.
Vậy đáp án là D. □

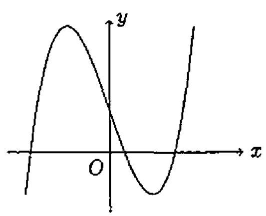
VÍ DỤ 1.37 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?*

A. $y = -x^2 + x - 1$

B. $y = -x^3 + 3x + 1$

C. $y = x^4 - x^2 + 1$

D. $y = x^3 - 3x + 1$



GIẢI. Từ đồ thị ta thấy $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$ do đó loại phương án [A.] và [B.].
Đây là dạng đồ thị hàm số bậc 3, loại đáp án [C.].
Vậy đáp án là D. □

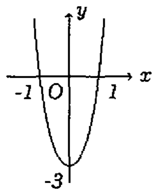
VÍ DỤ 1.38. *Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ*

A. $y = -x^4+4x^2-3$

B. $y = x^4 + x^2 - 3$

C. $y = 5x^4 - 2x^2 - 3$

D. $y = x^4 + 2x^2 - 3$



GIẢI. Vì $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$ do đó ta loại đáp án A. Trong B, đồ thị hàm số không đi qua điểm $(\pm1;0)$. Trong C, $y' = 20x^3 - 4x^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, do đó đồ thị có 3 điểm cực trị. Đáp án C sai.
Vậy đáp án là D. □

***Dạng 2:* Tìm điểm uốn, tâm đối xứng của đồ thị hàm số**

Phương pháp giải: Từ bảng biến thiên, hiểu được tính đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số.

VÍ DỤ 1.39. *Tọa độ điểm uốn của đồ thị hàm số* $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 5$ *là:*

A. 2

B. $\left(2;\frac{13}{3}\right)$

C. *Không có điểm uốn*

D. $\left(2;\frac{5}{3}\right)$

GIẢI. $y' = x^2 - 4x + 6, y'' = 2x - 4$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2, y = y(2) = \frac{5}{3}$
Vậy đáp án là D. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

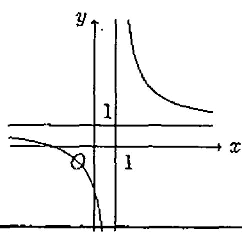
BÀI TẬP 1.76. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$

C. $y = \frac{x+2}{1-x}$

D. $y = \frac{2-x}{x+1}$



BÀI TẬP 1.77. Số điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

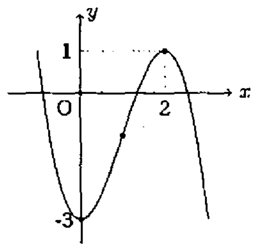
BÀI TẬP 1.78. Cho hàm số $y = ax^3 + bx + c + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tỉ số $\frac{b}{a}$

A. -1

B. 1

C. -3

D. 3



BÀI TẬP 1.79. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ là:

A. $(1; -3)$ B. $(-3; 1)$

C. $(1; 1)$ D. Không có tâm đối xứng

BÀI TẬP 1.80. Trong các hàm số sau đây, đồ thị hàm số nào không có tâm đối xứng

A. $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ B. $y = x^3 - 2x^2 + 4$ C. $y = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ D. $y = x^4 + 3x^2 - 4$

BÀI TẬP 1.81. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau. Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đó tại ba điểm phân biệt?

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

A. $-4 < m \le 1$ B. $-4 < m < 3$ C. $-4 \le m \le 1$ D. $-4 < m < 1$

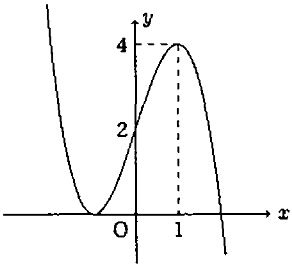
BÀI TẬP 1.82. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = 3m + 1$ cắt đồ thị hàm số đó tại hai điểm phân biệt?

A. $m = -\frac{1}{3}$ hoặc $m = 1$

B. $-\frac{1}{3} < m < 1$

C. $m < -\frac{1}{3}$ hoặc $m > 1$

D. Không tồn tại m



BÀI TẬP 1.83. Đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x-1}$

1. Tiếp xúc với đường thẳng $y = 2$.
2. Không cắt đường thẳng $y = -2$.
3. Cắt đường thẳng $y = 4$ tại hai điểm phân biệt.
4. Cắt đường thẳng $y = 1$ tại hai điểm phân biệt.

BÀI TẬP 1.84. Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $m < -4$ B. $-4 < m < -3$ C. $m > 4$ D. $3 < m < 4$

BÀI TẬP 1.85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ (C) bằng cách:

A. Giữ lại phần đồ thị phía trên Ox, lấy đối xứng phần còn lại qua Oy.

B. Giữ lại phần đồ thị phía trên Ox, lấy đối xứng phần còn lại qua Ox.

C. Giữ lại phần đồ thị phía trên Ox, và lấy đối xứng qua Oy.

D. Giữ lại phần đồ thị phía trên Ox, và lấy đối xứng qua Ox.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.76. Từ đồ thị, $x = 1$ là tiệm cận đứng, ta loại đáp án A và D.
$y = 1$ là tiệm cận ngang nên loại đáp án C.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.77. $y' = 4x^3 - 6x, y'' = 12x^2 - 6$. $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị có 2 điểm uốn.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.78. Hàm số có dạng bậc ba, xét hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y'' = 6ax^2 + 2b$. Do đó hoành độ điểm uốn là $x = -\dfrac{b}{3a}$.
Hai điểm cực trị là $(2; 1)$ và $(0; -3)$, tọa độ điểm uốn là $U(1; -1)$, suy ra $-\dfrac{b}{3a} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = -3$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.79. Hàm phân thức có tâm đối xứng là giao điểm hai đường tiệm cận, trong bài là $x = 1$ và $y = 1$. Vậy tâm đối xứng là $(1; 1)$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.80. Hàm phân thức có tâm đối xứng là giao điểm hai đường tiệm cận, hàm bậc ba có tâm đối xứng là điểm uốn. Như vậy loại A, B, C.
Vậy đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.81. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $-4 < m < 1$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.82. Đường thẳng $y = 3m + 1$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt thì điều kiện là

$$\left[\begin{array}{l} 3m+1=4 \\ 3m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.83. Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$ ||		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ $\nearrow$		-1	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số không cắt đường thẳng $y = m$ với $-1 < m < 3$, loại A, D.
Đồ thị cắt đường thẳng $y = -2$ và $y = 4$ tại hai điểm phân biệt.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.84. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, điều kiện là $-4 < m < -3$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.85. Ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0. \end{cases}$
Do đó phần đồ thị phía trên Ox giữ nguyên. $(x; -f(x))$ đối xứng $(x; f(x))$ qua trục Ox nên phần đồ thị phía dưới trục Ox được lấy đối xứng qua trục Ox.
Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 1.6
Tiếp tuyến, tương giao đồ thị hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tương giao giữa hai đường cong

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ là $f(x) = g(x)$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ là

$$\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

3. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc

Điều kiện cần và đủ để hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc là hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm.

Chú ý: *Sau khi đưa phương trình $f(x) = g(x)$ về dạng phương trình đa thức, nếu phương trình có nghiệm bội tại điểm x_0 thì x_0 chính là hoành độ tiếp điểm, hai đường cong tiếp xúc.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: **Tương giao giữa hai đường cong**

Phương pháp giải: Để tìm giao điểm của $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$, ta xét

- Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, giải được nghiệm x_0.
- Thế vào một trong hai phương trình, ta được tọa độ giao điểm $(x_0; f(x_0))$.
- Số giao điểm bằng số nghiệm phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm.

VÍ DỤ 1.40 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.*

A. $y_0 = 4$ *B.* $y_0 = 0$ *C.* $y_0 = 2$ *D.* $y_0 = -1$

GIẢI. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong là:

$$-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Thay vào phương trình đường thẳng $y = 2$.

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.41. *Parabol $y = 4x^2 - 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ tại bao nhiêu điểm*

A. 3 *B.* 2 *C.* 1 *D.* 0

GIẢI. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong là:

$$4x^2 - 2x + 3 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Suy ra có hai giao điểm.
Vậy đáp án là B. □

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc

Phương pháp giải: Khi biết hệ số góc của tiếp tuyến, ta viết phương trình tiếp tuyến theo các bước sau

- Tính y'. Tính đạo hàm $y'(x_0)$ theo tọa độ tiếp điểm $M(x_0; y_0)$.
- Giải phương trình $y'(x_0) = k$.
- Với mỗi x_0 tìm được, tìm $y_0 = f(x_0)$ và tiếp tuyến tương ứng $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Chú ý: Hệ số góc của đường tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp qua các tính chất sau:

- $\Delta \parallel d : y = ax + b$, suy ra hệ số góc $k = a$.
- $\Delta \perp d : y = ax + b$, suy ra hệ số góc $k = -\dfrac{1}{a}$.
- Δ tạo với đường thẳng $d : y = ax + b$ góc α, suy ra $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$.
- Nói riêng Δ tạo với trục hoành góc α, suy ra $|k| = \tan\alpha$.

VÍ DỤ 1.42. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại giao điểm của nó với trục tung là:*

A. $3x - y - 2 = 0$ *B.* $y = 0$

C. $3x + y - 2 = 0$ *D.* $9x - y - 18 = 0$ *và* $y = 0$.

GIẢI. Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $A(0; 2)$.
Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y'(0) = -3$.
Phương trình tiếp tuyến tại A là $y - 2 = -3(x - 0) \Leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.43. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ song song với đường thẳng $y = 9x + 1$ là:*

A. $y = 9x - 14$

B. $y = 9x - 14$ *hoặc* $y = 9x + 18$

C. $y = 9x + 18$

D. $y = 9x + 14$.

GIẢI. Gọi phương trình đường tiếp tuyến là $y = 9x + c$.
Đường thẳng trên và đồ thị hàm số tiếp xúc nên hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 9x + c \\ 3x^2 - 3 = 9 \end{cases}$$

Giải phương trình thứ hai, thay vào phương trình thứ nhất, ta được $\left[\begin{array}{l} x = 2, c - 14 \\ x = -2, c = 18 \end{array}\right.$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 14$ và $y = 9x + 18$.
Vậy đáp án là B. □

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm

Phương pháp giải: Ta viết phương trình tiếp tuyến theo các bước sau

- Gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$, phương trình tiếp tuyến $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$. Từ đây giải ra được x_0.
- Với mỗi x_0 tìm được, thay vào phương trình Δ ta được một tiếp tuyến.

VÍ DỤ 1.44. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ qua giao điểm của hàm số này với trục tung là:*

A. $3x - y - 2 = 0$

B. $y = 0$

C. $3x + y - 2 = 0$

D. $y = 9x - 18 = 0$ *và* $y = 0$.

GIẢI. Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $A(0; 2)$.
Ta có $y' = 3x^2 - 3$, phương trình tiếp tuyến $y = 3(x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$.
Phương trình tiếp tuyến đi qua A, ta được $2 = 3(x_0^2 - 1)(0 - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 0$.
Do đó, phương trình tiếp tuyến là $y - 2 = -3(x - 0) \Leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$.
Vậy đáp án là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.86. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là:

A. $y = 2x + 5$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = 5 - 4x$ D. $y = 1 - 4x$

BÀI TẬP 1.87. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 2x + 1$ giao điểm của đồ thị với trục tung là:

A. $2x + y + 1 = 0$ B. $-2x + y + 1 = 0$ C. $y = 1$ D. $y = 1 - 2x$

BÀI TẬP 1.88. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ tại điểm cực tiểu là:

A. $y = -3$ B. $y = 14$ C. $y = 37$ D. $y = 2$

BÀI TẬP 1.89. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ tại điểm cực đại là:

A. $y = -3$ B. $y = -1$ C. $y = 1$ D. $y = 5$

BÀI TẬP 1.90. Tìm điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 3$ biết hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = 6$.

A. $(-1; -5); (1; 1)$ B. $(-1; -1); (1; -7)$

C. $(-1; -1); (1; -5)$ D. $(1; 1); (-2; -17)$

BÀI TẬP 1.91. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ với trục tung là:

A. $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ B. $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$

C. $(0; -2)$ D. Đồ thị không cắt Oy

BÀI TẬP 1.92. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$ với trục hoành là:

A. $(0; 3)$ B. $(3; 0)$ C. $(1; 0), (-3; 0)$ D. $(1; 0), (3; 0)$

BÀI TẬP 1.93. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

A. $x = -1; 3$ B. $(-1; -2)$

C. Không có giao điểm D. $(-1; -2), (3; 6)$

BÀI TẬP 1.94. Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục tung?

A. $y = x^3 + 2x - 1$ B. $y = 2 - x^4$

C. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 2}$ D. $y = x + \dfrac{1}{x}$

BÀI TẬP 1.95. Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y = x^3 + 2x - 1$ B. $y = 2 - x^4$

C. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 2}$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

BÀI TẬP 1.96. Gọi M, N là các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x-1}$ và đường thẳng $y = x - 3$. Hoành độ trung điểm I của MN là:

A. $\dfrac{7}{2}$ B. $-\dfrac{7}{2}$ C. 7 D. -7

BÀI TẬP 1.97. Giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 2m$ cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng là :

A. $m = 2$ B. Không tồn tại m

C. $m = -1$ D. $m = \pm 2$

BÀI TẬP 1.98. Giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m+1)x - m^2$ cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng là :

A. $m = 1$ B. Không tồn tại m C. $m < 1$ D. $m > 1$

BÀI TẬP 1.99. Với điều kiện $\begin{cases} ac(b^2 - 4ac) > 0 \\ ab < 0 \end{cases}$ thì đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

BÀI TẬP 1.100. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là:

A. $y = -3x + 2$ B. $y = -3x + 5$ C. $y = -3x + 4$ D. $y = -3x + 3$

BÀI TẬP 1.101. Các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{1}{2}$ song song với đường thẳng $4x + y - 1 = 0$ có phương trình là:

A. $y = -4x + 2$ và $y = -4x - 8$ B. $y = 4x + 2$ và $y = -4x - 8$

C. $y = -4x + 2$ và $y = -4x + \dfrac{9}{2}$ D. $y = 4x + 2$ và $y = 4x - \dfrac{9}{2}$

BÀI TẬP 1.102. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $3x + y - 2 = 0$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

BÀI TẬP 1.103. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{2x-1}$ vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

BÀI TẬP 1.104. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ vuông góc với đường thẳng $x - 9y + 2 = 0$ có phương trình là:

A. $y = -9x - 8$ và $y = -9x + 10$ B. $y = -9x - 8$ và $y = -9x + 24$

C. $y = -9x + 10$ và $y = -9x - 30$ D. $y = -9x - 10$ và $y = -9x + 30$

BÀI TẬP 1.105. Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ tại điểm $M(1; 0)$. Ta có

A. $ab = 5$ B. $ab = 6$ C. $ab = -36$ D. $ab = 36$

BÀI TẬP 1.106. Cho hàm số $y = x^3 + x + 1$. Tìm khẳng định SAI:

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Trên đồ thị tồn tại hai điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

C. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 4x - 1$.

D. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

BÀI TẬP 1.107. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$. Trong các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, hệ số góc nhỏ nhất đạt được là:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.86. $y' = 3x^2 + 4x - 3 \Rightarrow y'(-1) = -4$. $y(-1) = 5$.
Phương trình tiếp tuyến là $y - 5 = -4(x + 1) \Leftrightarrow 4x + y - 1 = 0$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.87. Giao điểm của đồ thị với trục tung $x = 0, y = 1$.
$y' = 3x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y'(0) = -2$.
Phương trình tiếp tuyến là $y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = 1 - 2x$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.88. $y' = 3x^2 + 6x - 9$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = -3$.
$y'' = 6x + 6 \Rightarrow y''(1) = 12 > 0$ nên $x = 1$ là điểm cực tiểu. $y(1) = -3$.
Phương trình tiếp tuyến là $y = -3$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.89. $y' = 4x^3 - 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = \pm 1$.
$y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y''(0) = -4 < 0$ nên $x = 0$ là điểm cực đại. $y(0) = 1$.
Phương trình tiếp tuyến là $y = 1$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.90. Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k = 6 = 3x^2 + 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -7 \end{array}\right.$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.91. Giao điểm với trục tung có $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.92. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.93. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.94. $x = 0$ thuộc tập xác định các hàm số trong A, B, C nên khi thay $x = 0$ ta được tọa độ giao điểm của đồ thị các hàm số với trục tung.
Hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ có tập xác định $x \neq 0$ nên đồ thị hàm số không cắt Oy.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.95. Đồ thị hàm bậc ba luôn cắt trục hoành.
Phương trình $2 - x^4 = 0$ có nghiệm $\pm\sqrt[4]{2}$ nên đồ thị trong B cắt Ox.
Trong C, đồ thị cắt Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
$y = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1 > 0$ nên đồ thị hàm số này không cắt trục hoành.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.96. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{3x - 7}{x - 1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Hoành độ $x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{7}{2}$, theo định lý Viet.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.97. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+3x^2-2(m+1)x-m^2-2m=0$.
Giả sử 3 nghiệm lập thành cấp số cộng, theo định lý Viet: $x_1+x_2+x_3=-3$, suy ra $x=-1$ là một nghiệm.
Suy ra $-m^2+4=0 \Rightarrow m=\pm 2$.
$m=2$, ta có $x^3+3x^2-6x-8=0$ có nghiệm $-4;-1;2$.
$m=-2$, ta có $x^3+3x^2+2x=0$ có nghiệm $-2;-1;0$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.98. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+(2m+1)x-m^2=0$.
Giả sử 3 nghiệm lập thành cấp số cộng, theo định lý Viet: $x_1+x_2+x_3=3$, suy ra $x=1$ là một nghiệm.
Suy ra $-m^2+2m-1=0 \Rightarrow m=1$.
$m=1$, ta có $x^3-3x^2+3x-1=0$ có nghiệm $x=1$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.99. Nếu $ac<0$, suy ra $b^2-4ac>0$, mẫu thuẫn điều kiện.
Suy ra $ac>0$, $b^2-4ac>0$. Do đó phương trình $at^2+bt+c=0$ có 2 nghiệm cùng dấu t_1, t_2.
Mặt khác, $ab<0$, theo định lý Viet $S=-\dfrac{b}{a}>0$, suy ra cả hai nghiệm đều dương. Do đó phương trình ban đầu có nghiệm $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.100. Đường thẳng song song với đường thẳng $y=-3x$ có phương trình $y=-3x+c$.
Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+4 \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3-3x^2+4=-3x+c \\ 3x^2-6x=-3 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow c=5$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.101. Đường thẳng song song với đường thẳng $4x+y-1=0$ có phương trình $4x+y+c=0$.
Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{1}{2}=-4x-c \\ 2x^3-6x=-4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow c=-2 \\ x=-2 \Rightarrow c=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.102. Đường thẳng song song với đường thẳng $3x+y-2=0$ có phương trình $3x+y+c=0$.
Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1}=-3x-c \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow c=1 \\ x=2 \Rightarrow c=11 \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.103. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$ có phương trình $2x+y+c=0$.
Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y=-x^3+3x^2-3 \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2x-1} & =-x-c \\ -\dfrac{8}{(2x-1)^2} & =-2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow c=-\dfrac{26}{3} \\ x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow c=\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

Vậy đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.104. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng $x-9y+2=0$ có phương trình $9x+y+c=0$.
Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y=-x^3+3x^2-3 \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} -x^3+3x^2-3=-9x-c \\ -3x^2+6x=-9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow c=8 \\ x=3 \Rightarrow c=-24 \end{array}\right.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.105. Đường thẳng $y=ax+b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-x-2$ tại điểm $M(1;0)$, nên $M(1;0)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^3+2x^2-x-2=ax+b \\ 3x^2+4x-1=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow ab=-36.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.106. Tập xác định $\mathbb{R}$.
$y'=3x^2+1>0 \forall x \in \mathbb{R}$. Không tồn tại hai điểm x_1, x_2 mà $y'(x_1).y'(x_2)=-1$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.107. $y=3x^2-2x+2=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3} \geq \dfrac{5}{3}$. $y'_{\min}=\dfrac{5}{3}$ tại $x=\dfrac{1}{3}$.
Đáp án đúng là D. □

CHƯƠNG 2
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

CHUYÊN ĐỀ 2.1
Các bài tập vận dụng các công thức biến đổi

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa

- $a^n = a.a\ldots a; a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}; a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- Với $a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}; \quad a^x b^x = (ab)^x; \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

2. Logarit

- Với $0 < a \neq 1$ và $b > 0$, ta có $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.
- Với $0 < a \neq 1; b, b_1, b_2 > 0; \alpha \in \mathbb{R}$, ta có
  +) $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$; $\quad \log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$;
  +) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\quad \log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$;
  +) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; $\quad \log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b \ (\alpha \neq 0)$; $\quad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \ (b \neq 1)$.
- Đặc biệt, với $0 < a \neq 1; b > 0; \alpha \in \mathbb{R}$:
  +) $\log_a 1 = 0$.
  +) $\log_a a = 1$.
  +) $\log_a a^\alpha = \alpha$.
  +) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1$.
  +) $a^{\log_a b} = b$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

Với dạng toán này ta cần vận dụng các công thức biến đổi một cách chính xác. Khi gặp bất đẳng thức cần đặc biệt chú ý xem cơ số của hàm mũ, lôgarit lớn hơn hay bé hơn 1.

VÍ DỤ 2.1 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?*

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$ *B.* $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$ *D.* $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$

GIẢI. Ta có

$$\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$$

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.2 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?*

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$ *B.* $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$ *D.* $\log_b a < 1 < \log_a b$

GIẢI. Hàm $x \mapsto \log_c x$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ khi $c > 1$. Cho nên giả thiết $1 < a < b$ kéo theo $\log_a b > \log_a a = 1$ và $\log_b a < \log_b b = 1$.
Vậy đáp án là D. □

Dạng 2: Giá trị của hàm mũ và lôgarit

Ta xét bài toán tính giá trị của một biểu thức lôgarit theo giá trị của một số lôgarit cho trước. Ta thường viết biểu thức lôgarit cần tính toán dưới dạng một biểu thức của những lôgarit "nguyên tố". Các biến đổi thường dùng là:

1. $\log_a(x^\alpha y^\beta) = \alpha\log_a x + \beta\log_a y$;
2. $\log_{x^\alpha y^\beta} a = \dfrac{1}{\log_a(x^\alpha y^\beta)} = \dfrac{1}{\alpha\log_a x + \beta\log_a y}$.
3. $\log_a b = \log_c a.\log_c b; log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ để đưa về lôgarit đã cho.

VÍ DỤ 2.3 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.*

A. $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$ *B.* $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$

C. $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$ *D.* $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

GIẢI. Ta có thể viết

$$\begin{aligned}\log_6 45 &= \log_6 5 + 2\log_6 3 = \frac{\log_3 5}{\log_3 6} + \frac{2}{\log_3 6} = \frac{\log_3 5}{1+\log_3 2} + \frac{2}{1+\log_3 2}\\ &= \frac{1/b}{1+1/a} + \frac{2}{1+1/a} = \frac{a+2ab}{ab+b}.\end{aligned}$$

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 2.4. *Nếu* $\log_p q = \sqrt{5}$ *thì* $\log_{\sqrt{pq}} \dfrac{q}{\sqrt{p}}$ *bằng*

A. $\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$ B. $\dfrac{11+3\sqrt{5}}{4}$ C. $\dfrac{11-2\sqrt{5}}{4}$ D. $\dfrac{11-3\sqrt{5}}{4}$

GIẢI. Ta có

$$\log_{\sqrt{pq}} \frac{q}{\sqrt{p}} = \log_{\sqrt{pq}} \frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{pq}} = \frac{3}{2}\log_{\sqrt{pq}} q - 1 = \frac{3}{2}\frac{1}{\log_q \sqrt{pq}} - 1$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\log_q p)} - 1 = \frac{3}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}} - 1 = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} - 1 = \frac{3\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{4} - 1 = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}.$$

Vậy đáp án là D. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.1. Cho $0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$ B. $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$

C. $\log_a(bc) = \log_a c \Leftrightarrow b = 1$ D. $\log_a(b+c) = 2 \Leftrightarrow b + c = 2a$

BÀI TẬP 2.2. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3\ln(a+b) = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$. B. $\ln(a+b) = \dfrac{3}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab)$. D. $\ln\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$.

BÀI TẬP 2.3 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). Cho hàm số $f(x) = 2^x 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2\log_2 7 < 0$ B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_7 2 + x^2 < 0$ D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x\log_2 7 < 0$

BÀI TẬP 2.4. Khẳng định nào sau đây sai

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. B. $(\sqrt{2}-1)^{2016} > (\sqrt{2}-1)^{2017}$.

C. $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017} > \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$. D. $(\sqrt{3}-1)^{2017} > (\sqrt{3}-1)^{2016}$.

BÀI TẬP 2.5. Với $0 < a \neq 1$. Giá trị của $a^{\log_{a^2}(4)}$ bằng

A. 4 B. 8 C. 2 D. 16

BÀI TẬP 2.6. Nếu $a = \log_2 3$ và $b = \log_2 5$ thì $\log_2 \sqrt[6]{360}$ bằng

A. $\frac{1}{3} + \frac{a}{4} + \frac{b}{6}$ B. $\frac{1}{2} + \frac{a}{6} + \frac{b}{3}$ C. $\frac{1}{6} + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$ D. $\frac{1}{2} + \frac{a}{3} + \frac{b}{6}$

BÀI TẬP 2.7. Cho $(\sqrt{2} - 1)^m \leq (\sqrt{2} - 1)^n$. Khi đó

A. $m \leq n$ B. $n \leq m$ C. $m = n$ D. $m > n$

BÀI TẬP 2.8. Nếu $\log 3 = a$ thì $\dfrac{1}{\log_{81} 100}$ bằng

A. a^4 B. $16a$ C. $\frac{a}{8}$ D. $2a$

BÀI TẬP 2.9. Giá trị biểu thức $\log_a \dfrac{a^3 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$ bằng

A. $\frac{16}{5}$ B. $\frac{67}{5}$ C. $\frac{22}{5}$ D. $\frac{62}{15}$

BÀI TẬP 2.10. Cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Khi đó giá trị của biểu thức $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ bằng

A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2}$

BÀI TẬP 2.11. Khẳng định nào sau đây sai

A. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

B. $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.

C. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

D. $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

BÀI TẬP 2.12. Nếu $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$ thì x bằng

A. $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}}$ B. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{5}}}$ C. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}}$ D. $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{b^5}$

BÀI TẬP 2.13. Khẳng định nào sau đây sai

A. $\log_{0.3} 0.8 < 0$.

B. $\log_3 5 > 0$.

C. $\log_{x^2+3} 2017 < \log_{x^2+3} 2018$.

D. $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$

BÀI TẬP 2.14. Nếu $\log_a b = -2$ và $\log_a c = 5$ thì $\log_a \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$ B. $\frac{-5}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

BÀI TẬP 2.15. Nếu $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ bằng

A. $\dfrac{3b+2ac}{c+3}$ B. $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$ C. $\dfrac{3b+3ac}{c+2}$ D. $\dfrac{3b+3ac}{c+1}$

BÀI TẬP 2.16. Nếu $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$ thì $\log_2 \sqrt[3]{135}$ bằng

A. $\dfrac{a}{3} + b$ B. $\dfrac{1}{3}(a+b)$ C. $a + \dfrac{b}{3}$ D. $3(a+b)$

BÀI TẬP 2.17. Nếu $\log_{25} 7 = a$, $\log_2 5 = b$ thì $\log_{\sqrt[3]{5}} \dfrac{49}{8}$ bằng

A. $12a + \dfrac{9}{b}$ B. $\dfrac{1}{9}(12a - b)$ C. $12a - \dfrac{9}{b}$ D. $12a - 9b$

BÀI TẬP 2.18. Nếu $\log_p q = \sqrt{5}$ thì $\log_{\sqrt{pq}} \dfrac{q}{\sqrt{p}}$ bằng

A. $\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$ B. $\dfrac{11+3\sqrt{5}}{4}$ C. $\dfrac{11-2\sqrt{5}}{4}$ D. $\dfrac{11-3\sqrt{5}}{4}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.1.

$$\log_a(bc) = \log_a c \Leftrightarrow bc = c \Leftrightarrow b = 1.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.2. Ta có

$$a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \ln\frac{a+b}{3} = \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.3.

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow 2^x 7^{x^2} < 1 \Leftrightarrow x\log_2 2 + x^2\log_2 7 < 0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0, 1 + x\log_2 7 < 0 \\ x < 0, 1 + x\log_2 7 > 0 \end{array}\right..$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.4. Vì $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ nên $(\sqrt{3}-1)^{2017} < (\sqrt{3}-1)^{2016}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.5. Ta có

$$a^{\log_{a^2} 4} = a^{\frac{1}{2}\log_a 4} = \sqrt{a^{\log_a 4}} = \sqrt{4} = 2.$$

Có thể thay $a = 2$ thì ta thu ngay được kết quả là 2.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.6. Ta có

$$\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6}\log_2(2^3.3^2.5) = \frac{1}{6}(3 + 2\log_2 3 + \log_2 5) = \frac{1}{6}(3 + 2a + b) = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} + \frac{b}{6}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.7. Do $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ nên

$$(\sqrt{2}-1)^m \le (\sqrt{2}-1)^n \Leftrightarrow m \ge n.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.8.

$$\frac{1}{\log_{81} 100} = \log_{100} 81 = \log_{10^2} 3^4 = \frac{4}{2}\log 3 = 2a.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.9. Ta có

$$\log_a \frac{a^3 \sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a}} = \log_a a^{3+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{3}} = \log_a a^{\frac{62}{15}} = \frac{62}{15}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.10. Ta có

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a}\sqrt{a}\right) = 1 + \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.11. Khẳng định ở B sai vì $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow 0 < a < b$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.12. Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{3}}.b^{-\frac{1}{5}}) \Leftrightarrow x = a^{\frac{2}{3}}.b^{-\frac{1}{5}}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.13. Khẳng định ở A sai vì $0.3 < 1$ nên $\log_{0.3} 0.8 > \log_{0.3} 1 = 0$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.14. Ta có

$$\log_a \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} = 1 + \frac{1}{2}\log_a b - \frac{1}{3}\log_a c = 1 - 1 - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.15. Ta có

$$a = \log_{27} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5, b = \log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7$$

$$\log_{12} 35 = \log_{12} 5 + \log_{12} 7 = \frac{1}{\log_5 12} + \frac{1}{\log_7 12} = \frac{1}{2\log_5 2 + \log_5 3} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 3}$$
$$= \frac{1}{\frac{2}{3ac} + \frac{1}{3a}} + \frac{1}{\frac{2}{3b} + \frac{c}{3b}} = \frac{3ac + 3b}{c + 2}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.16. Ta có

$$\log_2 \sqrt[3]{135} = \frac{1}{3}\log_2(3^3.5) = \frac{1}{2}(3\log_2 3 + \log_2 5) = \frac{1}{3}(3a + b).$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.17. Ta có $a = \log_{25} 7 = \frac{1}{2}\log_5 7$. Cho nên $\log_5 7 = 2a$. Suy ra

$$\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8} = 3(2\log_5 7 - 3\log_5 2) = 3\left(2.2a - \frac{3}{b}\right) = 12a - \frac{9}{b}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.18. Ta có

$$\log_{\sqrt{pq}} \frac{q}{\sqrt{p}} = \log_{\sqrt{pq}} \frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{pq}} = \frac{3}{2}\log_{\sqrt{pq}} q - 1 = \frac{3}{2}\frac{1}{\log_q \sqrt{pq}} - 1$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \log_q p)} - 1 = \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}} - 1 = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1} - 1 = \frac{3\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}{4} - 1 = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{4}.$$

Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 2.2
Hàm số mũ và lôgarit

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khi tìm tập xác định của hàm số cần chú ý một số điểm sau:
   - Thực chất bài toán tìm tập xác định của hàm số là bài toán giải bất phương trình hay hệ bất phương trình.
   - Hàm số $\log_a x$ xác định khi $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.
   - Hàm căn bậc chẵn $\sqrt[2n]{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$. Hàm phân thức $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định khi $f(x) \neq 0$.
   - Khi phải kết hợp nghiệm của các bất phương trình ta có thể biểu diễn các nghiệm trên cùng một trục số để thu được nghiệm chung.
   - Có những "mẹo" để loại các phương án không thích hợp như: Khoảng nghiệm chứa những phần tử là nghiệm của $f(x)$ trong $\log_a f(x)$; trong khoảng nghiệm có những giá trị "chẵn" hoặc đầu mút (của khoảng) làm hàm số không xác định.
2. Một số lưu ý khi đi tìm đạo hàm của một hàm số (có chứa hàm mũ và lôgarit):
   - Công thức tính đạo hàm của hàm mũ và lôgarit: $(a^x)' = a^x \ln a$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
   - Công thức tính đạo hàm, quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tập xác định của hàm số

VÍ DỤ 2.5 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số* $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

A. $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [-1; 3]$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

GIẢI. Hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ xác định khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

Vậy đáp án đúng là C. □

Dạng 2: Đạo hàm

VÍ DỤ 2.6 (_Đề Minh họa THPTQG 2017_). *Tính đạo hàm của hàm số* $y = 13^x$.

A. $y' = x13^{x-1}$.
B. $y' = 13^x \ln 13$.
C. $y' = 13^x$.
D. $y' = \dfrac{13^x}{\ln 13}$.

GIẢI. Công thức tổng quát của đạo hàm hàm số mũ là $(a^x)' = a^x \ln a$ với $0 < a \neq 1$.
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 2.7 (_Đề Minh họa THPTQG 2017_). *Tính đạo hàm của hàm số* $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.
B. $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.
C. $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.
D. $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

GIẢI. Ta có

$$y' = \frac{(x+1)'4^x - (x+1)(4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1)4^x \ln 4}{(4^x)^2} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{4^x}.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 2.8. *Hàm số* $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ *thỏa mãn phương trình nào?*

A. $y'' - y' = e^x(x+1)$.
B. $y'' - y' = e^x(x-1)$.
C. $y'' + y' = e^x(x+1)$.
D. $y'' - y' = e^x(-x+1)$.

GIẢI. Ta có

$$y' = xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x, \quad y'' = e^x + 2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Quan sát các phương trình trên ta thấy chỉ có phương trình ở A thỏa mãn.
Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.19. Tập xác định của hàm số $y = \ln \dfrac{5x}{3x-6}$ là:

A. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ B. $(0; 2)$ C. $[0; 2]$ D. $(2; +\infty)$

BÀI TẬP 2.20. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\ln x + 2}$ là:

A. $[e^2; +\infty)$ B. $(0; +\infty)$ C. $\left[\dfrac{1}{e^2}; +\infty\right)$ D. $\mathbb{R}$

BÀI TẬP 2.21. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 \dfrac{10-x}{x^2-3x+2}$ là:

A. $(1; +\infty)$ B. $(-\infty; 10)$ C. $(-\infty; 1) \cup (2; 10)$ D. $(2; 10)$

BÀI TẬP 2.22. Tập xác định của hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ là:

A. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(2; 3)$

BÀI TẬP 2.23. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-2x^2 + 5x - 2} + \ln \dfrac{1}{x^2 - 1}$ là:

A. $(1; 2]$ B. $[1; 2)$ C. $[1; 2]$ D. $(1; 2)$

BÀI TẬP 2.24. Tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{3x+2}}(\sqrt{1+4x^2} - 1)$ là:

A. $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}, 0\right\}$ B. $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

C. $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ D. $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$

BÀI TẬP 2.25. Cho $0 < a \neq 1$. Phát biểu nào dưới đây đúng ?

A. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.

B. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.

C. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.

D. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$

BÀI TẬP 2.26. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$ là:

A. $[1; +\infty)$ B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

C. $(1; 2)$ D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

BÀI TẬP 2.27. Tập xác định của hàm số $y = \log_5(\log_{\frac{1}{5}}(x+1))$ là:

A. $(-1; 0]$ B. $(-1; 0)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

BÀI TẬP 2.28. Hàm của hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi:

A. $m < 2$ B. $-2 < m < 2$

C. $m = 2$ D. $m > 2$ hoặc $m < -2$

BÀI TẬP 2.29. Đạo hàm của hàm số $y = x^x$ bằng:

A. $y' = x^{x-1}(x + \ln x)$

B. $y' = x^x(\ln x + 1)$

C. $y' = x^x$

D. $y' = x \ln x$

BÀI TẬP 2.30. Đạo hàm của hàm số $y = \sin(2x)\ln^2(1-x)$ là:

A. $y' = 2\cos(2x)\ln^2(1-x) - \dfrac{2\sin(2x)\ln(1-x)}{1-x}$.

B. $y' = 2\cos(2x)\ln^2(1-x) - \dfrac{2\sin(2x)}{1-x}$.

C. $y' = 2\cos(2x)\ln^2(1-x) - 2\sin(2x)\ln(1-x)$.

D. $y' = 2\cos(2x) + 2\ln(1-x)$

BÀI TẬP 2.31. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2^x - 1}{5^x}$ là:

A. $y' = (\frac{2}{5})^x \ln\frac{2}{5} + 5^{-x}\ln 5$

B. $y' = (\frac{2}{5})^x \ln\frac{2}{5} - 5^{-x}\ln 5$

C. $y' = x(\frac{2}{5})^{x-1} - x(\frac{1}{5})^{x-1}$

D. $y' = x(\frac{2}{5})^{x-1} + x(\frac{1}{5})^{x-1}$

BÀI TẬP 2.32. Đạo hàm cấp 2 tại $x = 2$ của hàm số $y = \ln(x^2 + x)$ là:

A. 36

B. $-\dfrac{13}{36}$

C. $2\ln 6$

D. -13

BÀI TẬP 2.33. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2^2(2x+1)$ là:

A. $y' = \dfrac{2\log(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}$

B. $y' = \dfrac{4\log(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}$

C. $y' = \dfrac{2\log(2x+1)}{2x+1}$

D. $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$

BÀI TẬP 2.34. Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + x + 1)$ là:

A. $y' = \dfrac{1}{\ln(x^2+x+1)}$

B. $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

C. $y' = \dfrac{2x+1}{\ln(x^2+x+1)}$

D. $y' = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

BÀI TẬP 2.35. Đạo hàm tại $x = \dfrac{\pi}{6}$ của hàm số $y = e^{\cos 2x}$ là:

A. $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

B. $\sqrt{3e}$

C. $-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

D. $-\sqrt{3e}$

BÀI TẬP 2.36. Đạo hàm của hàm số $y = x^2\ln(x^3)$ tại $x = 3$ bằng:

A. $9 + \ln 3$

B. $9 + 6\ln 3$

C. $9 + 18\ln 3$

D. $9 + 9\ln 3$

BÀI TẬP 2.37. Đạo hàm của hàm số $y = \ln^4 2x$ là:

A. $y' = 8\ln^3 2x$ B. $y' = \frac{4}{x}\ln^3(2x)$

C. $y' = 4\ln^2(2x)$ D. $y' = \frac{8}{x}\ln^3(2x)$

BÀI TẬP 2.38. Hàm số $y = \ln\frac{1}{x+1}$ thỏa mãn phương trình:

A. $xy' + 1 = e^y$ B. $xy' - 1 = -e^y$

C. $xy' + 1 = -e^y$ D. $xy' - 1 = e^y$

BÀI TẬP 2.39. Hàm số $y = (x+1)e^{3x}$ thỏa mãn phương trình nào?

A. $y'' - 6y' + 9y = e^x$. B. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

C. $y'' + 6y' + 9y = 0$. D. $y'' + 6y' + 9y = 10xe^x$.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.19. Hàm số xác định khi

$$\frac{5x}{3x-6} > 0 \Leftrightarrow x > 2 \quad \text{hoặc} \quad x < 0.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.20. Hàm số xác định khi

$$\ln x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq 1/e^2.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.21. Hàm số xác định khi

$$\frac{10-x}{x^2-3x+2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; 10).$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.22. Hàm số xác định khi

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3).$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.23. Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} -2x^2 + 5x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x < -1 \quad \text{hoặc} \quad x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.24. Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} 3x+2>0, 3x+2\neq 1 \\ \sqrt{1+4x^2}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3}, x\neq -\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\frac{2}{3};+\infty)\setminus\{-\frac{1}{3},0\}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.25. Phát biểu A sai vì hàm mũ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Phát biểu C sai vì hàm lôgarit chỉ xác định với $x>0$. Phát biểu D sai vì tập giá trị của hàm mũ là $(0;+\infty)$. Chỉ có phát biểu B là đúng.
Vậy đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.26. Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.27. Hàm số xác định khi

$$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)>0 \Leftrightarrow 0<x+1<1 \Leftrightarrow -1<x<0.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.28. Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ khi

$$x^2-2mx+4>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x-m)^2+4-m^2>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 4-m^2>0 \Leftrightarrow |m|<2.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.29. Ta có $\ln y = x\ln x$. Đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1 \Rightarrow y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.30. Ta có

$$y'=\big(\sin(2x)\big)'\ln^2(1-x)+\sin(2x)\big(\ln^2(1-x)\big)'=2\cos(2x)\ln^2(1-x)-\frac{2\sin(2x)\ln(1-x)}{1-x}.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.31. Ta có

$$y'=\big((\frac{2}{5})^x-5^{-x}\big)'=(\frac{2}{5})^x\ln\frac{2}{5}+5^{-x}\ln 5.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.32. Ta có

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x} \Rightarrow y'' = -\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} \Rightarrow y''(2) = -\frac{13}{36}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.33. Ta có

$$y' = \frac{2.2\log_2(2x+1)}{(2x+1)\ln 2} = \frac{4\log_2(2x+1)}{(2x+1)\ln 2}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.34. Ta có

$$y' = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.35. Ta có

$$y' = (\cos 2x)' e^{\cos 2x} = -2\sin(2x).e^{\cos 2x} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = -2\sin\frac{\pi}{3}.3^{\cos\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3e}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.36. Ta có $y = 3x^2\ln x \Rightarrow y' = 3(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}) = 3(2x\ln x + x)$

$$\Rightarrow y'(3) = 3(6\ln 3 + 3) = 9 + 18\ln 3.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.37. Ta có

$$y' = 4\ln^3(2x)(\ln 2x)' = 4\ln^3(2x)\frac{1}{x} = \frac{4}{x}\ln^3(2x).$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.38. Ta có

$$y' = (-\ln(x+1))' = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow xy' = -\frac{x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1} = -1 + e^y \Rightarrow xy' + 1 = e^y.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.39. Ta có $y' = (3x+4)e^{3x}$, $\quad y'' = (9x+15)e^{3x}$

$$y'' - 6y' + 9y = (9x+15)e^{3x} - 6(3x+4)e^{3x} + 9(x+1)e^{3x} = 0.$$

Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 2.3
Tính đơn điệu của hàm mũ và hàm lôgarit

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khi $a > 1$, hai hàm số a^x và $\log_a x$ đều đồng biến; khi $0 < a < 1$, hai hàm số a^x và $\log_a x$ đều nghịch biến.

2. Nếu $f'(x) \geq 0$ trên khoảng I (và chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm) thì hàm đồng biến trên khoảng I. Ngược lại, nếu $f'(x) \leq 0$ trên khoảng I (và chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm) thì hàm nghịch biến trên khoảng I.

3. Khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0. Ngược lại, khi đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số

VÍ DỤ 2.9. *Hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ đồng biến trên*

A. $(0; +\infty)$. *B.* $\left(\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$. *C.* $(0; e)$. *D.* $(e; +\infty)$.

GIẢI. Hàm số xác định trên $(0; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Cho nên $f'(x) > 0$ khi $x \in (0; e)$.
Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 2.10. *Hàm số $y = x^2 - \ln(2x + 1)$. Khẳng định nào sau đây đúng*

A. $y_{CT} = \dfrac{1 - 4\ln 2}{4}$ *tại* $x = 1$. *B.* $y_{CT} = \dfrac{1 - 4\ln 2}{4}$ *tại* $x = \dfrac{1}{2}$.

C. $y_{CĐ} = \dfrac{1 - 4\ln 2}{4}$ *tại* $x = \dfrac{1}{2}$. *D.* $y_{CĐ} = \dfrac{1 + 4\ln 2}{4}$ *tại* $x = 1$.

GIẢI. Hàm số xác định trên $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có

$$y' = 2x - \frac{2}{2x + 1} = 2\frac{2x^2 + x - 1}{2x + 1} = 2\frac{(x + 1)(2x - 1)}{2x + 1}.$$

Nên $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$. Dấu của đạo hàm đổi từ âm sang dương khi qua $\dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{1}{2}$ là điểm cực tiểu. Từ các suy luận này ta suy ngay ra đáp án là B.

Có thể suy luận cách khác như sau: Tại $x = 1$ giá trị của hàm số không bằng $\frac{1 \pm 4\ln 2}{4}$ nên hai đáp án A và D không đúng. Tính toán giá trị hàm số tại $x = 0.51$ ta thấy nó lớn hơn $\frac{1 - 4\ln 2}{4}$. Cho nên có thể dự đoán đáp án là B.
Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 2: **Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số**

VÍ DỤ 2.11. *Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln^2 x - 2\ln x - 2$ trên $[0; e^3]$ là*

A. 1   B. 0   C. -2 D. Không có

GIẢI. Đặt $t = \ln x$. Lúc đó $t \in [0; 3]$ và $y = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$. Do đó giá trị lớn nhất là 1 đạt được khi $t = 3$.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 2.12. *Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2+3} - x\ln x$ trên $[1; 2]$ bằng*

A. $4\ln 2 - 4\sqrt{7}$ B. $\sqrt{7} - 4\ln 2$ C. $4\ln 2 - 3\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{7} - 4\ln 2$

GIẢI. Ta có
$$y' = \frac{x}{x^2+3} - 1 - \ln x < 0, \quad x \in [1; 2].$$
Đánh giá cuối cùng có được là do $\ln x > 0$ và $\frac{x}{x^2+3} < 1$ khi $x \in (1; 2)$. Cho nên giá trị nhỏ nhất đạt được tại $x = 2$, giá trị lớn nhất đạt được tại $x = 1$. Ta thấy $y(1)y(2) = 2(\sqrt{7} - 2\ln 2)$. Nên tích cần tìm là $2(\sqrt{7} - 2\ln 2)$.
Vậy đáp án đúng là D. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 + 4x + 1)e^{x-2}$ trên $[-2; 3]$ là:

A. $22e$ B. $-\frac{3}{e^4}$ C. $-\frac{2}{e^3}$ D. $\frac{6}{e^7}$

BÀI TẬP 2.41. Cho hàm số $y = \frac{e^x}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y' = \frac{e^x}{(x+1)^2}$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

BÀI TẬP 2.42. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

C. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

D. Đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

BÀI TẬP 2.43. Hàm số $y = x \ln x$ đồng biến trên khoảng:

A. $(0; +\infty)$ B. $(\frac{1}{e}; \infty)$ C. $(0; 1)$ D. $(0; \frac{1}{e})$

BÀI TẬP 2.44. Hàm số $f(x) = xe^{-x}$ xác định trên $I = [0; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{x \in I} f(x) = \frac{1}{e}; \min\limits_{x \in I} f(x) = -\frac{1}{e}$.

B. $\max\limits_{x \in I} f(x) = \frac{1}{e}; \min\limits_{x \in I} f(x) = 0$.

C. $\min\limits_{x \in I} f(x) = \frac{1}{e}$, không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên I.

D. $\max\limits_{x \in I} f(x) = \frac{1}{e}$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên I

BÀI TẬP 2.45. Hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$

A. Có một cực tiểu B. Có một cực đại

C. Không có cực trị D. Có một cực đại và một cực tiểu

BÀI TẬP 2.46. Hàm số $y = e^x + e^{-x}$ có bao nhiêu cực trị

A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

BÀI TẬP 2.47. Cho hàm số $y = x - e^x$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ B. Hàm số không xác định tại $x = 0$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ D. Hàm số không đạt cực đại tại $x = 0$

BÀI TẬP 2.48. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ trên $[-1; 1]$ theo thứ tự là:

A. 0 và $\frac{1}{e}$ B. 0 và e C. $\frac{1}{e}$ và e D. 1 và e

BÀI TẬP 2.49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$ là

A. 2π B. 5 C. 2 D. 4

BÀI TẬP 2.50. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên $[-2; 2]$ theo thứ tự là

A. $-\frac{1}{4}$ và 4 B. $\frac{1}{4}$ và 4 C. $\frac{1}{4}$ và 1 D. 1 và 4

BÀI TẬP 2.51. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2e^x$ trên $[-1; 1]$ là

A. $\frac{1}{e}$ B. e C. 0 D. $2e$

BÀI TẬP 2.52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên $[-2; 0]$ là

A. 1 B. $1 - 4\ln 2$ C. 0 D. $4 - 4\ln 3$

BÀI TẬP 2.53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x(x - 2)^2$ trên $[1; 3]$ là

A. e B. 0 C. e^3 D. e^2

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.40. Quan sát thấy có hai phương án chứa giá trị âm. Ta có $y(-1) = -\frac{2}{e^3}$ và $y(-2) = -\frac{3}{e^4}$. Tuy nhiên $-\frac{2}{e^3} < -\frac{3}{e^4}$ nên giá trị nhỏ nhất sẽ là $-\frac{2}{e^3}$.
Có thể khảo sát hàm số để đi đến kết quả như các bài tập trước.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.41. Ta có

$$y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Do đó $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua $x = 0$. Do đó $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.42. Vì $y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$, đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục hoành.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.43. Ta có $y' = \ln x + 1$. Nên $y' > 0$ khi và chỉ khi $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.44. Ta có $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$. Nên $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$. Hơn nữa đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm $x = 1$. Suy ra hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và $f(1) = \frac{1}{e}$. Do $f(0) = 0$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.45. Hàm số xác định khi $x > 0$. Ta có $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Nên $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = e$. Hơn nữa đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm $x = e$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = e$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.46. Ta có $y' = e^x - e^{-x} = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$. Đạo hàm đổi dấu qua $x = 0$ nên hàm số có 1 cực trị.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.47. Ta có $y' = 1 - e^x = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua $x = 0$ nên hàm số đạt cực đại tai $x = 0$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.48. Ta có $f'(x) = -\dfrac{x(x-2)}{e^x}$. Nên $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ (do $-1 \leq x \leq 1$).
Ta có $f(-1) = e$, $f(0) = 0$ và $f(-1) = \dfrac{1}{e}$. Cho nên giá trị lớn nhất là e và giá trị nhỏ nhất là 0.
Nếu quan sát kỹ ta sẽ thấy $f(-1) = e$, $f(0) = 0$ cho nên đáp án đúng phải là B.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.49. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có

$$y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{4^{\sin^2 x}.4^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin^2 x = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.50. Khi $x \in [-2; 2]$ thì $|x|$ nhận giá trị từ 0 đến 2. Do đó giá trị nhỏ nhất và lớn nhất thứ tự là $2^0 = 1$ và $2^2 = 4$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.51. Ta có $y = x^2 e^x \leq e$ với mọi $x \in [-1; 1]$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 1$. Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là e.
Vậy đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.52. Ta có $y' = 2x + \dfrac{4}{1-x} = \dfrac{4 + 2x - 2x^2}{1-x} = \dfrac{2(1+x)(2-x)}{1-x}$. Nên $y' = 0$ khi và chỉ khi $x = -1$. Hơn nữa đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương qua nghiệm $x = -1$. Suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$, $y(-1) = 1 - 4\ln 2$.
Nếu quan sát khéo ta sẽ thấy $y(-1) = 1 - 4\ln 2$. Đây là giá trị nhỏ nhất trong 4 giá trị đã cho. Vì vậy đáp án sẽ là B.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.53. Tạ thấy $y = e^x(x-2)^2 \geq 0$ và $y(2) = 0$. Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0.
Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 2.4

Đồ thị hàm số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số lưu ý khi gặp bài toán tìm hàm số khi biết đồ thị của nó.

1. Quan sát đồ thị đã cho xem đồ hàm đồ thị đi lên hay đi xuống. Khi đồ thị đi lên hàm tương ứng sẽ tăng; còn khi đồ thị đi xuống hàm tương ứng sẽ giảm.
2. Quan sát xem đồ thị có tiệm cận ngang hay tiệm cận đứng không.
3. Quan sát xem đồ thị đi quan những điểm đặc biệt nào, giao điểm với trục hoành trục tung là những điểm nào.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 2.13. *Khẳng định nào sau đây sai*

A. Đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x = y$.

B. Đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ nằm phía bên phải trục tung.

C. Đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = 10^{-x}$ không cắt nhau.

D. Đồ thị hai hàm số $y = (\frac{1}{2})^x$ và $y = -\log_2 x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x = y$

GIẢI. Ta đã biết đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$ nên các khẳng định A và D đúng. Khẳng định B cũng đúng vì tập xác định của $y = \log_2 x$ là $(0; +\infty)$. Khẳng định C sai vì chúng cắt nhau tại $(0; 1)$.
Vậy đáp án đúng là C. □

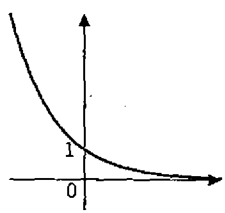
VÍ DỤ 2.14. *Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào*

A. $y = 2^x$

B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

C. $y = 2^{-x}$

D. $y = 3^x$



GIẢI. Hai hàm số $y = 2^x$ và $y = 3^x$ là các hàm tăng nên đồ thị của cùng *đi lên* nếu ta nhìn từ trái sang phải. Do đó các đáp án A và D là sai. Đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên đáp án phải là C (hàm số ở B nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang).
Vậy đáp án đúng là C. □

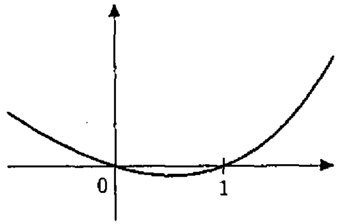
VÍ DỤ 2.15. *Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?*

A. $y = 2^x - 2$

B. $y = x - x^2$

C. $y = 2^x - x - 1$

D. $y = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$



GIẢI. Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;0)$ và $(1;0)$ nên các đáp án A và D không đúng. Parabol $y = x - x^2$ có bề lõm quay lên trên nên B cũng không đúng.
Vậy đáp án đúng là C. □

BÀI TẬP 2.54. Phát biểu nào dưới đây không đúng

A. Hàm số $y = e^x$ không chẵn cũng không lẻ.

B. Hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ là hàm lẻ.

C. Đồ thị của hàm số $y = e^x$ nằm phía bên trái trục tung.

D. Hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x+1})$ không chẵn cũng không lẻ.

GIẢI. Vì đồ thị hàm số $y = e^x$ nằm phía trên trục hoành chứ không phải nằm bên trái trục tung (như hàm $y = \ln x$).
Vậy đáp án là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.55. Phát biểu nào dưới đây không đúng

A. Hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ có cùng tập giá trị.

B. Hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

C. Hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ có cùng tính đơn điệu.

D. Hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đều có tiệm cận.

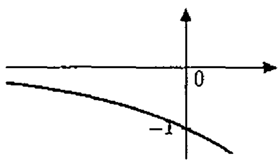
BÀI TẬP 2.56. Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = 2^x$

B. $y = -2^x$

C. $y = -2^{-x}$

D. $y = \ln(-x)$



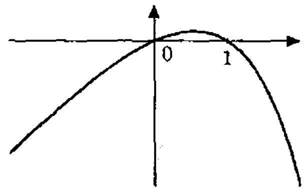
BÀI TẬP 2.57. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào

A. $y = 3^x - x - 1$

B. $y = x^2 - x$

C. $y = -3^x + 2x + 1$

D. $y = x^2 + x$



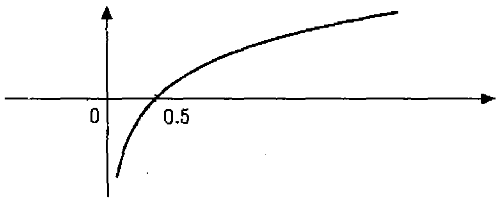
BÀI TẬP 2.58. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào

A. $y = 2^x$

B. $y = \ln x$

C. $y = \ln(3x)$

D. $y = \ln(2x)$



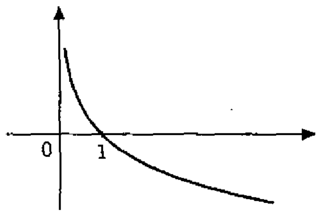
BÀI TẬP 2.59. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào

A. $y = \ln x$

B. $y = -\ln x$

C. $y = -\ln(2x)$

D. $y = -e^{-x}$



D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.55. Tập giá trị của hàm $y = a^x$ là $(0; +\infty)$, trong khi tập giá trị của hàm $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.56. Ta thấy đường cong đi xuống khi nhìn từ trái qua phải. Cho nên hàm số nghịch biến. Ta loại được *A* và *C*. Phương án *D* cũng không đúng vì hàm số xác định cả khi x âm và dương.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.57. Ta thấy đường cong đi qua hai điểm $(0; 0)$ và $(1; 0)$ nên các phương án A, D không đúng. Phương án B cũng không đúng vì bề lõm của đồ thị quay lên trên.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.58. Ta thấy đường cong đi qua điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$. Chỉ có hàm số ở phương án D có tính chất này.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.59. Đường cong đi qua điểm $(1;0)$ và đi xuống (chứng tỏ hàm nghịch biến). Chỉ có hàm số ở phương án B có tính chất này.
Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 2.5
Phương trình mũ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
2. $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ với $a > 0, a \neq 1$.
3. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ với $a > 0$ hoặc $a = 1$.
4. $a^x > 0 \quad \forall a > 0, x \in \mathbb{R}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thử trực tiếp nghiệm

Trong dạng toán này người ta cho phương trình và một số phương án của nghiệm. Nhiệm vụ của ta là chọn ra đúng nghiệm.

1. Có thể thử trực tiếp từng phương án với sự giúp đỡ của máy tính. Quan sát khéo để loại ngay đi những phương án sai.
2. Có thể giải phương trình để tìm ra nghiệm.
3. Khi giải phương trình chú ý phương pháp đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ để đưa về phương trình đại số.

VÍ DỤ 2.16. *Phương trình* $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 2$ *có nghiệm là*

A. $x_1 = 1, x_2 = 2$ *B.* $x_1 = -1, x_2 = 1$.

C. $x_1 = 0, x_2 = 1$. *D.* $x_1 = -1, x_2 = 0$.

GIẢI. Ta thấy $x = 1$ là 1 nghiệm và nghiệm này cũng là nghiệm của $x^2 - x = 0$. Hàm bậc 2 có 1 nghiệm nữa là 0. Phương trình có nghiệm 0; 1.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 2.17. *Phương trình* $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

A. $x = 0$. *B. Vô nghiệm.* *C.* $x = 3$. *D.* $x = \pm 1$

GIẢI. Có thể thử trực tiếp để thu được nghiệm $x = \pm 1$.
Có thể dùng phương pháp loại trừ như sau. Ta thấy nếu $x = x_0$ là nghiệm thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm. Cho nên A và C là sai. Mặt khác hàm số $3^{2+x} + 3^{2-x}$ nhận cả giá trị lớn hơn 30 và nhỏ hơn 30. Cho nên phương trình bao giờ cũng có nghiệm. Vì vậy D cũng không đúng.
Như vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.18. *Phương trình* $3^{x-1}5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$ *có nghiệm là*

A. $x = 1$ B. $x = 2, x = -\log_2 5.$

C. $x = 4.$ D. $x = 3, x = \log_3 5.$

GIẢI. Ta thử các nghiệm chẵn. Rõ ràng $x = 1$ không là nghiệm nhưng $x = 2$ lại là nghiệm. Do đó B phải là đáp án đúng.
Vậy đáp án là B. □

Dạng 2: Số nghiệm

1. Để tìm ra phương án chính xác, cách "an toàn" nhất là tiến hành giải phương trình.
2. Hàm lẻ $f(x)$ luôn có số lẻ nghiệm vì $f(0) = 0$ và nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm
3. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn mà x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Do đó nếu $f(0) \neq 0$ thì phương trình có số chẵn nghiệm. Ngược lại, phương trình có số lẻ nghiệm.
4. Chú ý tính tăng giảm của hàm số để giải phương trình: Một hàm tăng hoặc giảm sẽ có không quá 1 nghiệm.
5. Nếu f liên tục trên $[a; b]$ mà $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trong $(a; b)$.

VÍ DỤ 2.19. *Số nghiệm của phương trình* $3^x - 3^{1-x} = 2$ *có nghiệm là*

A. *Vô nghiệm* B. 3 C. 2. D. 1.

GIẢI. Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t - \frac{3}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

Do đó phương trình có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm nên phương trình ban đầu chỉ có 1 nghiệm (ứng với nghiệm dương của phương trình bậc hai).
Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.20. *Số nghiệm của phương trình* $3^{-x} = \frac{1}{3}x + 1$ *là*

A. 2 B. 0 C. 1 D. *Vô số nghiệm*

GIẢI. Xét hàm $f(x) = 3^{-x} - \frac{1}{3}x - 1$. Ta thấy hàm f liên tục và nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa $f(-3) > 0$, $f(3) < 0$. Cho nên phương trình có nghiệm duy nhất.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 2.21. *Số nghiệm của phương trình* $2^x = 4x + 1$ *là*

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

GIẢI. Xét hàm $f(x) = 2^x - 4x - 1$. Ta thấy hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$ và $f(5) < 0$. Cho nên phương trình có ít nhất hai nghiệm. Ta lại thấy $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4 = 0$ có đúng 1 nghiệm. Nên $f(x)$ không thể có quá 2 nghiệm. Vậy f có đúng 2 nghiệm.
Vậy đáp án là C. □

Dạng 3: Tính chất của nghiệm

1. Để xem nghiệm của phương trình có tính chất nào trong các phương án đã cho thì các "an toàn" nhất là giải phương trình.

2. Có thể ước lượng nghiệm hay xét dấu của nghiệm để giúp tìm ra đáp số.

VÍ DỤ 2.22. *Phương trình* $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *trong đó* $x_1 < x_2$. *Khẳng định nào sau đây đúng.*

A. $2x_1 + x_2 = 0$ *B.* $x_1 + 2x_2 = -1$ *C.* $x_1 + x_2 = -2$ *D.* $x_1x_2 = 1$

GIẢI. Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}.$$

Do đó phương trình có nghiệm là 0 và -1. Cho nên phương án B là đúng.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 2.23. *Phương trình* $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$

A. Có hai nhiệm âm. *B. Vô nghiệm.*

C. Có hai nghiệm dương. *D. Có một nghiệm âm, một nghiệm dương.*

GIẢI. Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$3t + \frac{3}{t} = 10 \Leftrightarrow 3t^3 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3}.$$

Do đó phương trình có nghiệm là 1 và -1.
Cách lập luận khác: Ta thấy nếu $x = x_0$ là nghiệm thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm. Cho nên A và C là sai. Mặt khác hàm số $3^{1+x} + 3^{1-x}$ nhận cả giá trị lớn hơn 10 và nhỏ hơn 10. Cho nên phương trình bao giờ cũng có nghiệm. Vì vậy B cũng không đúng.
Vậy đáp án là D. □

Dạng 4: Bài toán chứa tham số

1. Bài toán có tham số trong thi trắc nghiệm thường là bài toán dễ. Cách làm đơn giản nhất là cô lập tham số rồi khảo sát hàm số theo biến x.

2. Có thể đưa về phương trình bậc 2 có tham số trong một số trường hợp.

VÍ DỤ 2.24. *Tìm m để phương trình sau có đúng ba nghiệm* $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$

A. $2 < m < 3$. B. $m > 3$.

C. $m = 2$. D. $m = 3$.

GIẢI. Ta thấy nếu $x = x_0$ là nghiệm của phương trình thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm. Do đó để phương trình có ba nhiệm thì nó phải có 1 nghiệm dương, 1 nghiệm âm và 1 nhiệm bằng 0. Thay $x = 0$ vào phương trình ta thu được $m = 3$.
Như vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.25. *Tìm m để phương trình sau có đúng ba nghiệm* $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *thỏa mãn* $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = 4$. B. $m = 2$.

C. $m = 1$. D. $m = 3$.

GIẢI. Phương trình có thể viết được dưới dạng

$$(2^x)^2 - 2mx^x + 2m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0, \quad t = 2^x.$$

Do đó theo định lý Viet $t_1t_2 = 2^{x_1}2^{x_2} = 2m$. Nên $2m = 2^3$ và kéo theo $m = 4$.
Như vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 2.26. *Tìm m để phương trình sau có nghiệm* $9^x - 3^x + m = 0$

A. $m > \frac{1}{4}$. B. $m > 0$.

C. $m \leq \frac{1}{4}$. D. $m < 0$.

GIẢI. Đặt $3^x = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - t = -m.$$

Miền giá trị của hàm $t \mapsto t^2 - t$ khi $t > 0$ là $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Do đó $-m \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Hay $m \leq \frac{1}{4}$.
Cách lập luận khác: Ta thấy $9^x > 3^x$ khi $x > 0$. Vì vậy khi $m > 0$ phương trình chắc chắn vô nghiệm. Suy ra các đáp án A và B là sai. Với $m = 0$,phương trình trở thành $9^x - 3^x = 0$ và nó có nghiệm $x = 0$. Suy ra D cũng không đúng. Vậy ta chỉ còn lại đáp án C.
Như vậy đáp án là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.60. Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} - 2.4^x - 3(\sqrt{2})^{2x} = 0$ có nghiệm là

A. -1 B. $\log_2 5$ C. 0 D. $\log_2 3$

BÀI TẬP 2.61. Tích hai nghiệm của phương trình $2^{2x^4+4x^2-6} - 2.2^{2x^4+4x^2-3} + 1 = 0$ là

A. -9 B. -1 C. 1 D. 9

BÀI TẬP 2.62. Phương trình $3^{x-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có nghiệm là

A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

BÀI TẬP 2.63. Tích các nghiệm của phương trình $6^x - 5^x + 2^x = 3^x$ là

A. 4 B. 2 C. 0 D. 1

BÀI TẬP 2.64. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

BÀI TẬP 2.65. Phương trình $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$ có nghiệm là

A. $x = 0, x = \frac{\ln 2}{3}$ B. $x = -2, x = \frac{\ln 2}{3}$ C. Đáp án khác D. $x = 0, x = 1$

BÀI TẬP 2.66. Phương trình $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = m$ có nghiệm khi

A. $m < 5$ B. $m \leq 5$ C. $m > 2$ D. $m \geq 2$

BÀI TẬP 2.67. Số nghiệm của phương trình $2^{2+x} + 2^{2-x} = 15$ là

A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

BÀI TẬP 2.68. Phương trình $2.2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} = 3$ có nghiệm là

A. $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP 2.69. Tổng các nghiệm của phương trình $3^x + 9(\frac{1}{3})^{x+1} - 4 = 0$ là

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

BÀI TẬP 2.70. Phương trình $x^{\log 4} + 4^{\log x} = 32$ có nghiệm là

A. $x = 100$ B. $x = 10, x = 100$ C. $x = 20, x = 100$ D. $x = 10$

BÀI TẬP 2.71. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - m = 0$ có nghiệm là

A. $m < 0$ B. $0 < m < 1$

C. $m > 1$ D. $m < 0$ hoặc $m > 1$

BÀI TẬP 2.72. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{2x-1}+2m^2-m-3=0$ có nghiệm là

A. $(0;1)$ B. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ D. $(0;+\infty)$

BÀI TẬP 2.73. Phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x=0$ có nghiệm là

A. $x=1,x=2$ B. Vô nghiệm C. $x=\dfrac{9}{16},x=\dfrac{3}{4}$ D. $x=-1,x=-2$

BÀI TẬP 2.74. Phương trình $9^{x^2+1}-3^{x^2+1}-6=0$ có nghiệm là

A. $x=0$ B. $x=-1,x=0,x=1$

C. $x=-2,x=0,x=2$ D. $x=1,x=-1$

BÀI TẬP 2.75. Tìm m để phương trình $9^x-m.3^x+1=0$ có đúng một nghiệm

A. $m=\pm 2$ B. $m=2$ C. $m=-2$ D. $m>2$

BÀI TẬP 2.76. Phương trình $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$ có nghiệm là

A. $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\dfrac{3}{2}$ B. $x=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\dfrac{2}{3}$ D. $x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}2$

BÀI TẬP 2.77. Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x+(\sqrt{2}+1)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là

A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

BÀI TẬP 2.78. Phương trình $2^{2x+4}-5.2^{x+1}+1=0$ có tổng các nghiệm là

A. 4 B. 5 C. -4 D. $\dfrac{5}{8}$

BÀI TẬP 2.79. Phương trình $8.3^x+3.2^x=24+6^x$ có tổng các nghiệm là

A. 4 B. 6 C. 2 D. 3

BÀI TẬP 2.80. Phương trình $4^{x+1}-2^{x+2}+m=0$ có nghiệm khi

A. $m\le 0$ B. $m\ge 1$ C. $m\ge 0$ D. $m\le 1$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.60. Đặt $2^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^3-2t^2-3t=0\Leftrightarrow t(t+1)(t-3)=0\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=\log_2 3.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.61. Ta thấy nếu x_0 là nghiệm của phương trình thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Nhưng hiển nhiên $x = 1$ là 1 nghiệm. Vì vậy nghiệm kia là -1. Tích hai nghiệm khi đó là -1.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.62. Ta có

$$\frac{3^x}{3^4} = \frac{3^2}{3^{6x}} \Leftrightarrow 3^{7x} = 3^6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.63. Ta thấy phương trình có nghiệm $x = 0$ nên tích các nghiệm của phương trình là 0.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.64. Ta thấy phương trình tương đường với

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{5}{2}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.65. Đặt $e^{3x} = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3 \Leftrightarrow e^{3x} = 1, e^{3x} = 2 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{1}{3}\ln 2.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.66. Đặt $(2+\sqrt{3})^x = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t + \frac{1}{t} = m$. Hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ khi $t \in (0; +\infty)$ có miền giá trị là $[2; +\infty)$. Cho nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 2$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.67. Ta thấy nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm và $x = 0$ không là nghiệm. Hàm $f(x) = 2^{2+x} + 2^{2-x}$ nhận cả giá trị lớn hơn và nhỏ hơn 15 nên phương trình đã cho luôn có nghiệm. Suy ra phương trình có số chẵn nghiệm là 2,4,...Chỉ có phương án A thỏa mãn.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.68. Đặt $2^{\sin^2 x} = t \geq 1$. Lúc đó $2^{\cos^2 x} = 2^{1-\sin^2 x} = \frac{2}{t}$. Phương trình đã cho trở thành

$$2t - \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Từ đó ta có

$$2^{\sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.69. Phương trình đã cho tương đương với

$$3^x + \frac{3}{3^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1, 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 0, x = 1.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.70. Phương trình đã cho tương đương với

$$4^{\log x} + 4^{\log x} = 32 \Leftrightarrow 4^{\log x} = 16 = 4^2 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100.$$

Vậy đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.71. Hàm số $x \mapsto 2^{2x-1}$ có miền giá trị là $(0;+\infty)$. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.72. Hàm số $x \mapsto 2^{2x-1}$ có miền giá trị là $(0;+\infty)$. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$2m^2 - m - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.73. Thử lại ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Chỉ có phương án A là có chứa nghiệm $x = 1$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.74. Thử lại ta thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình; $x = 1$ và $x = 2$ không là nghiệm. Do đó đáp án phải là A.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.75. Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng $t^2 - mt + 1 = 0$. Do $ac > 0$ nên phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thì hai nghiệm cùng âm hoặc cùng dương. Do đó phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi phương trình bậc hai $t^2 - mt + 1 = 0$ có nghiệm kép dương. Từ đó ta tìm được $m = 2$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.76. Chia hai vế cho $4^{-\frac{1}{x}}$ và đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} > 0$. Phương trình trở thành

$$1 + t = t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow -x = \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{3}{2}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.77. Ta thấy nếu phương trình có dạng $(\sqrt{2}+1)^{-x}+(\sqrt{2}+1)^{x}-2\sqrt{2}=0$. Cho nên nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Hiển nhiên $x=0$ không là nghiệm. Do đó tích các nghiệm là số âm.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.78. Đặt $2^x = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$16t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}, 2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = -1, x = -3.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.79. Phương trình đã cho tương đương với

$$3^x.2^x - 8.3^x - 3.2^x + 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = 1.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.80. Phương trình đã cho tương đương với

$$4.(2^x)^2 - 4.2^x + m = 0 \Leftrightarrow (2.2^x - 1)^2 = 1 - m.$$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $1 - m \geq 0$ hay $m \leq 1$.
Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 2.6
Bất phương mũ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nếu $a > 1$ thì $a^x \geq b > 0 \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.
2. Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x \geq b > 0 \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.
3. Nếu $a > 1$ thì $a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \geq y$.
4. Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \leq y$.
5. Nếu $a > b > 0$ thì $a^x \geq b^x \Leftrightarrow x \geq 0$.
6. Nếu $b > a > 0$ thì $a^x \geq b^x \Leftrightarrow x \leq 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Bất phương trình cho biết nghiệm**

1. Có thể giải phương trình để tìm ra nghiệm.
2. Khi giải phương trình chú ý phương pháp đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ để đưa về phương trình đại số.
3. Xét từng phương án. Chọn một số điểm trên khoảng nghiệm và thử vào bất phương trình cần xét. Nếu tại 2 điểm không thỏa mãn thì loại ngay phương án đó. Quan sát khéo để loại ngay đi những phương án sai.
4. Với những hàm liên tục, nghiệm bất phương trình $f(x) < g(x)$ chỉ bao gồm các khoảng (hữu hạn hoặc vô hạn). Nghiệm bất phương trình $f(x) \leq g(x)$ chỉ bao gồm các đoạn (tức là các đầu mút của đoạn cũng là nghiệm).

VÍ DỤ 2.27. *Nghiệm của bất phương trình* $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$ *là*

A. $1 < x < 4$. *B.* $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{2}$.

C. $2 < x < 4$. *D.* $-4 < x < -1$.

GIẢI. Đặt $t = 2^x > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$32t^2 - 18t + 1 < 0 \Leftrightarrow (16t-1)(2t-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} < t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < x < -1.$$

Có thể làm như sau: Thay $x = 3$ vào bất phương trình thấy không thỏa mãn nên A và C không đúng. Thay $x = \frac{1}{3}$ vào cũng thấy không thỏa mãn. Vì vậy B cũng không đúng. Do đó ta chỉ còn đáp án D.

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 2.28. *Nghiệm của bất phương trình* $3^{2x+1} - 10.3^x + 3 \leq 0$ *là*

A. $[-1;1]$. *B.* $[-1;0)$. *C.* $[0;1)$. *D.* $(-1;1)$.

GIẢI. Đặt $t = 3^x > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3t^2 - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (3t-1)(t-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Có thể làm như sau: Do bất phương trình ứng với hàm liên tục và ứng với $\leq$ nên nghiệm phải chứa tất cả các đầu mút của các khoảng. Chỉ có nghiệm đầu tiên có tính chất này.
Vậy đáp án đúng là A. □

Dạng 2: Tính chất của nghiệm

Để nghiên cứu tính chất của nghiệm, cách "an toàn" nhất là giải bất phương trình. Nếu bài toán hỏi số nghiệm nguyên của bất phương trình thì có thể thử các giá trị nguyên "bé" rồi đếm số lượng các số thỏa mãn.

VÍ DỤ 2.29. *Số các nghiệm nguyên của bất phương trình* $(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ *là*

A. 1 *B.* 3 *C.* 0 *D.* 2

GIẢI. Điều kiện $x \neq 1, -3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{8}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

Có 3 số nguyên nằm trong khoảng $(-3;1)$.
Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 3: Bất phương trình chứa tham số

Ta thường cô lập tham số và khảo sát sự biến thiên của hàm biến x để qua đó tìm ra phương án đúng.

VÍ DỤ 2.30. *Tìm* m *để bất phương trình* $2^{x^2} + 2^{1-x^2} < m$ *nhận mọi* $x \in [-1;1]$ *làm nghiệm*

A. $m \geq 3$ *B.* $m > 2\sqrt{2}$ *C.* $m > 3$ *D.* $m > 4$

GIẢI. Đặt $t = x^2 \in [0;1]$ và $f(t) = 2^t + 2^{1-t}$. Ta có

$$f'(t) = (2^t - 2^{1-t})\ln 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Ta có $f(0) = f(1) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$. Cho nên giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên $[0,1]$ là 3. Cho nên ta phải có $m > 3$.
Vậy đáp án đúng là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.81. Tập nghiệm của bất phương trình $(2-\sqrt{3})^x > (2+\sqrt{3})^{x+1}$ là

A. $(-2;+\infty)$ B. $(-\infty;-1)$ C. $(-1;+\infty)$ D. $(-\infty;-2)$

BÀI TẬP 2.82. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ là

A. $(1;2]$ B. $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ C. $(1;+\infty)$ D. Đáp án khác

BÀI TẬP 2.83. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3-x$ là

A. $(-\infty;3)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(-\infty;1)$ D. $[1;+\infty)$

BÀI TẬP 2.84. Tập nghiệm của bất phương trình $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$ là

A. $[0;1]$ B. $[1;2]$ C. $[-2;-1]$ D. $[-1;0]$

BÀI TẬP 2.85. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A. $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$ B. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$ C. $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$ D. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$

BÀI TẬP 2.86. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 2^x - 2 < 0$ là

A. $(-\infty;1)$ B. $(2;+\infty)$ C. $(1;+\infty)$ D. $(-\infty;2)$

BÀI TẬP 2.87. Đặt $t=5^x$ thì bất phương trình $5^{2x} - 3.5^{x+2} + 32 < 0$ trở thành phương trình nào

A. $t^2 - 75t + 32 < 0$ B. $t^2 - 6t + 32 < 0$

C. $t^2 - 3t + 32 < 0$ D. $t^2 - 16t + 32 < 0$

BÀI TẬP 2.88. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ là

A. $(-\infty;3)$ B. $(-1;0)$ C. $(2;+\infty)$ D. $(2;4)$

BÀI TẬP 2.89. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2} \geq 0$ là

A. $(-\infty;0]$ B. $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ C. $[2;+\infty)$ D. $\left(\frac{1}{2};2\right]$

BÀI TẬP 2.90. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} \leq 24$ là

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

BÀI TẬP 2.91. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+5x-6}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ là

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

BÀI TẬP 2.92. Tìm m để bất phương trình bất phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > m$ có tập nghiệm chứa $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$

A. $m \leq 24$ B. $m < 24$ C. $m > 24$ D. $m = 24$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.81. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} > (2+\sqrt{3})^{x+1} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x+2} < 1 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.82. Điều kiện $x \leq 2$. Do cơ số của hàm mũ nhỏ hơn 1, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2-x} < x \Leftrightarrow 2-x < x^2, x > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0, x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in (1; 2]$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.83. Bất phương trình đã cho tương đương với $2^x + x - 3 > 0$. Vì hàm số $f(x) = 2^x + x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Cho nên $f(x) > 0$ khi và chỉ khi $x > 1$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.84. Ta thấy $x = 0, x = 1$ là hai nghiệm phương trình $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x = 0$. Cũng thấy $x = \frac{1}{2}$ là 1 nghiệm của bất phương trình. Cho nên nghiệm của bất phương trình là $[0; 1]$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.85. Ta viết lại bất phương trình dạng $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$. Do cơ số của hàm mũ nhỏ hơn 1, bất phương trình đã cho tương đương với $4x \geq x - 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.86. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(2^x)^2 - 2^x - 2 < 0 \Leftrightarrow (2^x+1)(2^x-2) < 0 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.87. Bất phương trình đã cho tương đương với $t^2 - 75t + 32 < 0$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.88. Ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} = 12$ và hàm số $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}$ đồng biến trên $(-1;0)$. Cho nên ta sẽ chọn đáp án B.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.89. Hàm số $f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 0$. Cho nên $f(x) \geq 0$ khi $x \geq 2$; $f(x) < 0$ khi $x < 2$. Mặt khác $4^x - 2 > 0$ khi $x > \frac{1}{2}$ và $4^x < 0$ khi $x < \frac{1}{2}$. Do đó nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(\frac{1}{2};2\right]$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.90. Đặt $t = 5^{x^2} \geq 1$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$5t - \frac{5}{t} \leq 24 \Leftrightarrow 5t^2 - 24t - 5 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq t \leq 5 \Leftrightarrow 5^{x^2} \leq 5 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.91. Điều kiện $x \leq -6$ hoặc $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+5x-6} < x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+5x-6 < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 10. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện của x ta thu được nghiệm $1 \leq x < 10$. Có tất cả 9 số nguyên nằm trong khoảng nghiệm này.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.92. Đặt $t = 5^{x^2} \geq 5$ khi $|x| \geq 1$. Bất phương trình đã cho trở thành $5t - \frac{5}{t} > m$. Hàm $f(t) = 5t - \frac{5}{t}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$ và $f(5) = 24$. Do đó ta tìm được $m < 24$.
Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 2.7
Phương trình lôgarit

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cách tiếp cận các dạng toán đối với phương trình lôgarit cũng giống như phương trình mũ. Ở đây chú ý tìm tập xác định khi giải phương trình. Loại ngay những phương án không thuộc tập xác định.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương trình cho biết nghiệm

VÍ DỤ 2.31. *Phương trình* $2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x(\sqrt{x})-1}$ *có nghiệm là*

A. $x = 2$ | B. $x = 4$

C. $x = 2, x = 4$ | D. Đáp án khác

GIẢI. Điều kiện $x > 0, x \neq 1, x \neq 3$. Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2.\frac{1}{2}-1} = 1 \Leftrightarrow \log_8(x^2-6x+9) = 0 \Leftrightarrow x^2-6x+9 = 1 \Leftrightarrow x = 2, x = 4.$$

Tất nhiên ta có thể thử $x = 2, x = 4$ và thấy chúng là nghiệm. Nhưng ta không biết đáp án C hay D là đúng.
Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 2.32. *Phương trình* $\log_3(3^{x+1}-2) = 2x$ *có nghiệm là*

A. $x = 0$ | B. $x = \log_2 3$

C. $x = 0, x = \log_2 3$ | D. Đáp án khác

GIẢI. Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$3.3^x - 2 = 3^{2x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x-1)(3^x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \log_3 2.$$

Tất nhiên ta có thể thử $x = 0, x = \log_3 2$ và thấy chúng là nghiệm. Nhưng ta không biết đáp án C hay D là đúng.
Vậy đáp án đúng là C. □

Dạng 2: Số nghiệm

VÍ DỤ 2.33. *Số nghiệm của phương trình* $\log^2 x - 3\log x = \log(x^2) - 4$ *là*

A. $x = 1$ | B. 2 | C. 3 | D. 4

GIẢI. Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết dướng dạng

$\log^2 x - 3\log x = 2\log x - 4 \Leftrightarrow \log^2 x - 5\log x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log x = 1, \log x = 4 \Leftrightarrow x = 10, x = 10000.$

Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 3: Tính chất của nghiệm

VÍ DỤ 2.34. *Tích các nghiệm của phương trình* $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$ *là*

A. $x = \frac{1}{16}$ *B.* $\frac{1}{32}$ *C.* $\frac{1}{64}$ *D.* $\frac{1}{128}$

GIẢI. Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình đã cho có thể viết dướng dạng

$$\log^2_2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} - 8 = 0 \Leftrightarrow (t+2)^2 + (2t-3) - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -7.$$

Từ đó ta thu được nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 2, x = \frac{1}{128}$.
Vậy đáp án đúng là C. □

Dạng 4: Phương trình chứa tham số

VÍ DỤ 2.35. *Phương trình* $\log^2_3 x + \sqrt{\log^2_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ *có nghiệm trên* $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ *khi*

A. $m \in [0;2]$ *B.* $m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

C. $m \in [0; +\infty)$ *D.* $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

GIẢI. Đặt $t = \log^2_3 x$. Lúc đó $t \in [0;3]$. Phương trình đã cho trở thành

$$t + \sqrt{t+1} = 2m + 1.$$

Hàm $f(t) = t + \sqrt{t+1}$ đồng biến trên $[0;3]$. Nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $f(0) \le 2m + 1 \le f(3)$. Từ đó ta thu được $m \in [0;2]$
Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.93. Cho phương trình

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4.$$

Chọn phát biểu đúng

A. Tập xác định của phương trình là $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$;

B. Phương trình có nghiệm duy nhất;

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu;

D. Phương trình có một nghiệm $x=\frac{1}{4}$.

BÀI TẬP 2.94. Nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x)) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

BÀI TẬP 2.95. Nghiệm của phương trình $\log_3(3x-2)=3$ là

A. $\frac{11}{3}$ B. $\frac{25}{3}$ C. $\frac{29}{3}$ D. 87

BÀI TẬP 2.96. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$ là

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

BÀI TẬP 2.97. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=0$ là

A. 3 B. 1 C. Vô nghiệm D. 1

BÀI TẬP 2.98. Số nghiệm của phương trình $\log_5^2(5x)-\log_{25}(5x)=3$ là

A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

BÀI TẬP 2.99. Tìm m để phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x+m=0$ có nghiệm $x\in(0;1)$

A. $m\le 1$ B. $m\ge\frac{1}{4}$ C. $m\le\frac{1}{4}$ D. $m\ge 1$

BÀI TẬP 2.100. Số nghiệm của phương trình $\log_2|x-2|+\log_2|x+5|+\log_{\frac{1}{2}}8=0$ là

A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

BÀI TẬP 2.101. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ là

A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

BÀI TẬP 2.102. Số nghiệm của phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}=2-\log_2(x-2)$ là

A. 2 B. 0 C. 1 D. Đáp số khác

BÀI TẬP 2.103. Phương trình $x^{\log x}=1000x^2$ có tích các nghiệm là

A. 10 B. 100 C. 1 D. 10000

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.93. Điều kiện $x > -\frac{3}{2}, x \neq -1$. Nên A không đúng. Tất nhiên có thể thử trực tiếp để thấy D cũng không đúng. Ta còn hai phương án B, C. Viết lại phương trình đã cho

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(2x+3)(3x+7) = 4 \Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + 1 + \log_{2x+3}(3x+7) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + \frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)} = 3 \Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3) = 1, \log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2}.$$

Phương trình $\log_{3x+7}(2x+3) = 1$ vô nghiệm. Phương trình $\log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2}$ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{4}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.94. Thử trực tiếp ta thấy $x = 16$ là nghiệm.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.95. Ta có

$$\log_3(3x-2) = 3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 3^3 \Leftrightarrow x = \frac{29}{3}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.96. Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 10^{-1}, x \neq 10^5$. Đặt $t = \log x$. Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow 1 + t + 2(5-t) = (5-t)(1+t) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, t = 3 \Leftrightarrow x = \log 2, x = \log 3.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.97. Điều kiện $x > \frac{3}{2}$. Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\log_3(x^2 + 4x) = \log_3(2x-3) \Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.98. Điều kiện $x > 0$. Đặt $\log_5(5x) = t$. Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$\log_5^2(5x) - \frac{1}{2}\log_5(5x) = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0.$$

Phương trình cuối cùng có hai nghiệm. Nên phương trình ban đầu có hai nghiệm.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.99. Đặt $t = \log_2 x$ thì $t \in (-\infty; 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4} = 0.$$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.100. Điều kiện $x \neq 2, x \neq -5$. Viết lại phương trình đã cho

$$\log_2 |x - 2| + \log_2 |x + 5| - \log_2 8 = 0 \Leftrightarrow |x - 2| + |x + 5| = 8.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm nên phương trình đã cho cho có hai nghiệm.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.101. Điều kiện $x > \sqrt{6}$. Viết lại phương trình đã cho

$$\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + \log_3 3 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 3(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Phương trình có 1 nghiệm.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.102. Điều kiện $x > 2$. Viết lại phương trình đã cho

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 2) = \log_3 9 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Phương trình có 1 nghiệm.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.103. Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log x$. Lấy lôgarit hai vế của phương trình

$$(\log x)^2 = 2\log x + 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}, x = 1000.$$

Do đó tích hai nghiệm là $\frac{1}{10}.1000 = 100$.
Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 2.8
Bất phương trình lôgarit

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cách tiếp cận các dạng toán đối với bất phương trình lôgarit cũng giống như bất phương trình mũ. Ở đây chú ý tìm tập xác định khi giải phương trình. Loại ngay những phương án không thuộc tập xác định.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Bất phương trình cho biết nghiệm

VÍ DỤ 2.36. *Tập nghiệm của bất phương trình* $\log_{\frac{3}{4}}(\log_3|x-3|) \geq 0$ *là*

A. $(0;2]\cup[4;6)$ *B.* $[0;2)\cup(4;6]$ *C.* $(0;2)\cup(4;6)$ *D.* $[0;2]\cup[4;6]$

GIẢI. Với $x \neq 3$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$0 < \log_3|x-3| \leq 1 \Leftrightarrow 1 < |x-3| \leq 3.$$

Bất phương trình $|x-3| > 1$ có nghiệm là $x > 4, x < 2$. Bất phương trình $|x-3| \leq 3$ có nghiệm $0 \leq x \leq 6$. Kết hợp lại ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[0;2)\cup(4;6]$.
Có thể làm như sau: Thay các giá trị $x = 0, 2, 4, 6$ vào bất phương trình chỉ thấy $x = 0$ và $x = 6$ thỏa mãn ($x = 2$, $x = 4$ không thỏa mãn). Ta chọn nghiệm chứa $0, 6$ và không chứa $2, 4$. Chỉ có đáp án B thỏa mãn điều này.
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 2.37. *Tập nghiệm của bất phương trình* $\log_2(2^x-1).\log_2(2^{x+1}-2) > 2$ *là*

A. $(0;\log_2 3)$ *B.* $\left(0;\log_2\frac{5}{4}\right)\cup(\log_2 3;+\infty)$

C. $\left(0;\log_2\frac{5}{4}\right)$ *D.* $(\log_2 3;+\infty)$

GIẢI. Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2(2^x-1)$. Khi đó $\log_2(2^{x+1}-2) = t+1$. Bất phương trình đã cho trở thành $t(t+1) > 2 \Leftrightarrow t^2+t-2 > 0 \Leftrightarrow t < -2, t > 1$.
Ta có .

$$t < -2 \Leftrightarrow \log_2(2^x-1) < -2 \Leftrightarrow 2^x < \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 < x < \log_2\frac{5}{4}.$$
$$t > 1 \Leftrightarrow \log_2(2^x-1) > 1 \Leftrightarrow 2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3.$$

Kết hợp lại ta thu được nghiệm $\left(0;\log_2\frac{5}{4}\right)\cup(\log_2 3;+\infty)$.

Có thể làm như sau: Thay các giá trị $x = \log_2\frac{5}{4}, \log_2 3$ ta thấy vế trái của bất phương trình bằng 2. Do đó bất phương trình sẽ có các khoảng nghiệm nhận cả hai giá trị này như là các đầu mút. Chỉ có đáp án B có tính chất như vậy.
Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 2: **Tính chất của nghiệm**

VÍ DỤ 2.38. *Số nghiệm nguyên của bất phương trình* $\dfrac{1+\log_2 x}{2-\log_2 x} > 1$ *là*

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 4

GIẢI. Điều kiện $x > 0, x \neq 4$. Đặt $t = \log_2 x$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1+t}{2-t} > 1 \Leftrightarrow \frac{2t-1}{2-t} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < x < 4.$$

Có 2 số nguyên nằm trong khoảng $(\sqrt{2}; 4)$.
Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 3: **Bất phương trình chứa tham số**

VÍ DỤ 2.39. *Tìm tham số* $m > 1$ *để mọi* $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ *đều là nghiệm của bất phương trình* $\log_m x > \log_x m$

A. $m \geq 3$ *B.* $1 < m < 3$ *C.* $2 < m < 3$ *D.* $m > 3$

GIẢI. Điều kiện $0 < x \neq 1$. Bất phương trình tương đương với

$$\log_m x > \frac{1}{\log_m x} \Leftrightarrow \frac{(\log_m x)^2 - 1}{\log_m x} > 0.$$

Khi $x \in (\frac{1}{3}; 1)$ ta có $\log_m x < 0$. Do đó, với mọi $x \in (\frac{1}{3}; 1)$, ta đều có $-1 < \log_m x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} < x < m$. Để mọi $x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình ta cần điều kiện $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \subset \left(\dfrac{1}{m}; m\right) \Leftrightarrow m \geq 3$.
Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.104. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.4}(x-4) + 1 \geq 0$ là

A. $\left(4; \dfrac{13}{2}\right]$ B. $\left(-\infty; \dfrac{13}{2}\right)$ C. $\left[\dfrac{13}{2}; +\infty\right)$ D. $(4; +\infty)$

BÀI TẬP 2.105. Tập nghiệm của bất phương trình $x^{\log_2 x + 4} \leq 32$ là

A. $\left[\dfrac{1}{10}; 2\right]$ B. $\left[\dfrac{1}{32}; 4\right]$ C. $\left[\dfrac{1}{32}; 2\right]$ D. $\left[\dfrac{1}{10}; 4\right]$

BÀI TẬP 2.106. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x < \log_{\sqrt{3}}(12 - x)$ là

A. $(0; 12)$ B. $(0; 9)$ C. $(9; 16)$ D. $(0; 16)$

BÀI TẬP 2.107. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2(2x+1)$ là

A. $\emptyset$ B. $(1;3)$ C. $(-\infty;-1)$ D. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

BÀI TẬP 2.108. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$ là

A. $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$ B. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ C. $\left(\frac{3}{4};3\right]$ D. $\left[\frac{3}{4};3\right]$

BÀI TẬP 2.109. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2^x-3)<0$ là

A. $(\log_2 3;2)$ B. $(2;+\infty)$ C. $(-\infty;2)$ D. $(0;2)$

BÀI TẬP 2.110. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+8)+2\log_5(x-4)>0$ là

A. $(4;+\infty)$ B. $(-\infty;2)$ C. $\emptyset$ D. $(0;1)$

BÀI TẬP 2.111. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $(1;5)$ B. $[-3;3]$ C. $[3;5]$ D. $(1;3]$

BÀI TẬP 2.112. Tập nghiệm của bất phương trình $x+\log_2 x>1$ là

A. $(0;+\infty)$ B. $(0;2)$ C. $(2;+\infty)$ D. $(1;+\infty)$

BÀI TẬP 2.113. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right]<0$ là

A. $\emptyset$

B. $(-4;-3)\cup(8;+\infty)$

C. $(-\infty;-4)\cup(8;+\infty)$

D. $(-\infty;-4)\cup(-3;8)$

BÀI TẬP 2.114. Số nghiệm nguyên thuộc $[1;25]$ của bất phương trình $\log_4 x-\log_x 4\le\frac{3}{2}$ là

A. 15 B. 8 C. 0 D. 16

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.104. Điều kiện $x>4$. Bất phương trình tương đương với

$$\log_{0.4}(x-4)+\log_{0.4}0.4\ge\log_{0.4}1\Leftrightarrow\log_{0.4}0.4(x-4)\ge\log_{0.4}1\Leftrightarrow 0.4(x-4)\le 1\Leftrightarrow x\le\frac{13}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x\in\left(4;\frac{13}{2}\right]$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.105. Điều kiện $x > 0$. Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế của phương trình và đặt $t = \log_2 x$ ta được

$$\log_2 x(\log_2 x + 4) \leq 5 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{32} \leq x \leq 2.$$

Cũng có thể thử các đầu mút ở A, B, C, D ta thấy giá trị $x = \frac{1}{32}$, $x = 2$ là nghiệm của phương trình $x^{\log_2 x+4} = 32$. Từ đó có thể đoán nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{1}{32}; 2\right]$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.106. Điều kiện $0 < x < 12$. Ta có

$$\log_3 x < \log_{\sqrt{3}}(12 - x) \Leftrightarrow \log_3 x < 2\log_3(12 - x) \Leftrightarrow x < (12 - x)^2 \Leftrightarrow x < 9 \quad \text{hoặc} \quad x > 16.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu của x ta thu được nghiệm $x \in (0; 9)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.107. Điều kiện $x > 0$. Ta có

$$\log_2 x > \log_2(2x + 1) \Leftrightarrow x > 2x + 1 \Leftrightarrow x < -1.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu của x ta thấy tập nghiệm là rỗng.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.108. Điều kiện $x > \frac{3}{4}$. Ta có

$$2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{(4x - 3)^2}{2x + 3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(4x - 3)^2}{2x + 3} \leq 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu của x ta thấy tập nghiệm là $\left(\frac{3}{4}; 3\right]$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.109. Điều kiện $x > \log_2 3$. Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^x - 3) < 0 \Leftrightarrow 2^x - 3 > 1 \Leftrightarrow x > 2.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.110. Điều kiện $x > 4$. Ta có

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 8) + 2\log_5(x - 4) > 0 \Leftrightarrow -\log_5(x - 2)(x - 4) + \log_5(x - 4)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 \frac{x - 4}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 4}{x - 2} > 1.$$

Khi $x > 4$, ta luôn có $\frac{x - 4}{x - 2} < 1$ nên bất phương trình vô nghiệm.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.111. Khi x xấp xỉ bằng 5 nhưng nhỏ hơn 5 thì vế phải của bất phương trình là số âm, trong khi đó vế phải là số dương. Vậy các phương án A và C không đúng. Phương án B cũng không đúng vì -3 không thuộc tập xác định.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.112. Hàm vế phải đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nhận giá trị là 1 tại $x = 1$. Nên ta chọn phương án D.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.113. Bất phương trình tương đương với

$$\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.114. Điều kiện $x > 0, x \neq 1$. Đặt $t = \log_4 x$. Bất phương trình trở thành

$$t - \frac{1}{t} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq x \leq 16.$$

Có tất cả 15 nghiệm nguyên do nghiệm phải khác 1.
Đáp án đúng là A. □

CHƯƠNG 3
NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN

CHUYÊN ĐỀ 3.1
Nguyên hàm, tích phân các hàm cơ bản

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.
   - Nếu $F(x), G(x)$ cùng là nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$, trong đó C là hằng số.
   - Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$ với C là hằng số. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C; \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

2. Tính chất của nguyên hàm, tích phân

$$\boxed{\int [mf(x) \pm ng(x)]\, dx = m\int f(x)dx \pm n\int g(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b [mf(x) \pm ng(x)]\, dx = m\int_a^b f(x)dx \pm n\int_a^b g(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

3. Bảng nguyên hàm các hàm cơ bản

$\int a dx = ax + C$	$\int_a^b 0dx = 0$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \alpha^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \alpha^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{ax+b} dx = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\dfrac{1}{a}.\cos(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \dfrac{1}{a}.\tan(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\dfrac{1}{a}.\cot(ax+b) + C$

Chú ý:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{x^n} = x^{-n}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}; \ln e = 1$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 3.1. *Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?*

A. $\int 0dx = C$ *(C là hằng số).*

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ *(C là hằng số)*

C. $\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ *(C là hằng số).*

D. $\int dx = x + C$ *(C là hằng số)*

GIẢI. Do $\int x^{-1} = \ln\lvert x\rvert + C$ nên khẳng định ở phương án C là sai.

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.2. *Tính giá trị của* $I = \int_a^b f(x)dx$ *biết rằng* $\int_a^d f(x)dx = 6$ *và* $\int_d^b f(x)dx = 4$, *trong đó* $a < d < b$

A. $I = 2$ *B.* $I = 10$ *C.* $I = -2$ *D.* $I = 24$

GIẢI. Ta có

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = 6 + 4 = 10.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.3. *Hàm số $F(x) = \ln|2\sin x - 3\cos x|$ là nguyên hàm của hàm số nào?*

A. $f(x) = \dfrac{2\cos x + 3\sin x}{2\sin x - 3\cos x}$ B. $f(x) = \dfrac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x - 3\cos x}$

C. $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x - 3\cos x}$ D. $f(x) = \dfrac{1}{2\cos x + 3\sin x}$

GIẢI. Lấy đạo hàm $F(x)$ ta nhận được

$$F'(x) = \frac{(2\sin x - 3\cos x)'}{2\sin x - 3\cos x} = \frac{2\cos x + 3\sin x}{2\sin x - 3\cos x}.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

__Nhận xét:__ Trong ví dụ này ta sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp

$$[f(u(x))]' = u'(x)f'(u(x)).$$

Công thức này còn được sử dụng cho dạng bài như ví dụ sau:

VÍ DỤ 3.4. *Cho $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt$. Đạo hàm của hàm số $g(x)$ là*

A. $\sin(\sqrt{x})$ B. $\cos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ C. $2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})$ D. $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

GIẢI. Đặt

$$F(x) = \int_0^x \cos t dt \Rightarrow g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt = F(\sqrt{x}).$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$g'(x) = (\sqrt{x})'F'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}.$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.5. *Cho $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$. Tính giá trị của $f(4)$*

A. 1 B. $\dfrac{1}{2}$ C. 2 D. $\dfrac{1}{4}$

GIẢI. Đặt

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow F(x^2) = \int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x).$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$(x^2)'F'(x^2) = x'.\cos(\pi x) + x.[\cos(\pi x)]' = \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x).$$

Do đó

$$2xf(x^2) = \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x).$$

Cho $x = 2$ ta được $4f(4) = 1$ nên $f(4) = \dfrac{1}{4}$.

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.6 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Tìm nguyên hàm của* $f(x) = \sqrt{2x-1}$

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

GIẢI. Ta có

$$\int f(x)dx = \int (2x-1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{1+1/2}}{1+1/2} = \frac{1}{3}.(2x-1)^{3/2} = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.7. *Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của* $f(x) = \sin 3x$

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x$ B. $-3\cos 3x$ C. $3\cos x$ D. $\frac{1}{3}\cos 3x$

GIẢI. Ta có

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

Do đó $-\frac{1}{3}\cos 3x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin 3x$.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.8. *Tìm hàm số* $F(x)$ *biết* $F(x)$ *là một nguyên hàm của hàm số* $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $F(0) = 1$

A. $F(x) = -\tan x$ B. $F(x) = -\tan x + 1$

C. $F(x) = \tan x + 1$ D. $F(x) = \tan x - 1$

GIẢI. Do $F(x)$ là nguyên hàm của $-\frac{1}{\cos^2 x}$ nên $F(x)$ có dạng

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = -\tan x + C$$

Khi $x = 0$ thì $F(0) = C = 1$, do đó $F(x) = -\tan x + 1$.
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.9. *Cho* $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. *Tìm* m *để nguyên hàm* $F(x)$ *của* $f(x)$ *thỏa mãn* $F(0) = 1$ *và* $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$

A. $m = -\frac{4}{3}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{3}{4}$ D. $m = \frac{4}{3}$

Chứng minh. Do $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$ nên $F(x)$ có dạng

$$F(x) = \int \left(\frac{4m}{\pi} + \sin^2 x\right) dx = \int \left(\frac{4m}{\pi} + \frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \left(\frac{4m}{\pi} + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Thay lần lượt $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$ ta được

$$\begin{cases} F(0) = C = 1 \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = m + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + C = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy đáp án đúng là đáp án C. □

VÍ DỤ 3.10. *Tìm họ nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \cos x \cos 3x$

A. $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + C$ *B.* $2\sin 4x + \sin 2x + C$

C. $\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ *D.* $-\frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

GIẢI. Ta có

$$\cos x \cos 3x = \frac{\cos(3x - x) + \cos(3x + x)}{2} = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2}$$

Do đó nguyên hàm của $f(x) = \cos x \cos 3x$ là

$$\int \cos x \cos 3x dx = \left(\frac{\cos 2x + \cos 4x}{2}\right) dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án C. □

Nhận xét: *Điểm mấu chốt của bài toán này là chuyển từ biểu thức tích hai hàm lượng giác thành tổng. Công thức được sử dụng ở đây là*

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

VÍ DỤ 3.11. *Giả sử rằng* $I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a\ln\frac{2}{3} + b$ *với* a, b *là các số nguyên. Khi đó giá trị của* $a + b$ *là*

A. 25 *B.* 35 *C.* 45 *D.* 55

GIẢI. Khi chia đa thức $2x^2 + 5x - 1$ cho $x - 2$ ta nhận được kết quả

$$2x^2 + 5x - 1 = (x - 2)(2x + 9) + 17$$

Suy ra

$$\int_{-1}^{0} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} = \int_{-1}^{0} \left(2x + 9 + \frac{17}{x - 2}\right) = \left(x^2 + 9x + 17\ln|x - 2|\right)\Big|_{-1}^{0}$$
$$= 17\ln\frac{2}{3} + 8.$$

Do đó $a = 17, b = 8$ nên $a + b = 25$.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.12. *Tìm nguyên hàm* $\int \frac{1}{x(x-3)}dx$.

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right|+C$ B. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)+C$

C. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{x-3}\right)+C$ D. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C$

GIẢI. Do $x-(x-3)=3$ nên $\frac{3}{x(x-3)}=\frac{x-(x-3)}{x(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}$. Suy ra

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-3)}dx &= \int\left(\frac{1}{3(x-3)}-\frac{1}{3x}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{1}{3}\ln x+C\\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C.\end{aligned}$$

Vậy đáp án đúng là D □

Nhận xét: Để thuận tiện ta có thể ghi nhớ công thức sau để tách phân thức

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

VÍ DỤ 3.13. *Tính* $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

A. $\sqrt{2}$ B. 0 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

GIẢI. Do $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, $\cos x\geq 0$ khi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $\cos x\leq 0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ nên

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx &= \int_0^{\pi}\sqrt{2}|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}|\cos x|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}|\cos x|dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}\cos xdx=\sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy đáp án đúng là D. □

Nhận xét: Với tích phân có chứa trị tuyệt đối $I=\int_a^b|f(x)|dx$*, ta cần tìm tất cả các nghiệm của* $f(x)$ *trong khoảng* (a,b) *và lưu ý rằng khi* $f(x)$ *là hàm liên tục thì khoảng giữa hai nghiệm liên tiếp hàm* $f(x)$ *không đổi dấu.*

VÍ DỤ 3.14. *Biết* $\int_0^b(2x-4)dx=0$*, khi đó giá trị của b là*

A. $b=1$ *hoặc* $b=4$ B. $b=1$ *hoặc* $b=2$

C. $b=0$ *hoặc* $b=2$ D. $b=0$ *hoặc* $b=4$

GIẢI. Ta có

$$\int_0^b (2x-4)dx = (x^2-4x)\Big|_0^b = b^2 - 4b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=4 \end{array}\right. .$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.15. *Tính* $I = \int_0^2 2e^{2x}dx$

A. $e^4 - 1$ *B.* $4e^4$ *C.* e^4 *D.* $3e^4$

GIẢI.

$$I = e^{2x}\Big|_0^2 = e^4 - 1.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.16. *Biết* a, b *là hai số nguyên thoả mãn* $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}dx = a\ln 2 + b$*, tìm giá trị của* a

A. 7 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 1

GIẢI. Chia $2x+3$ cho $2-x$ ta được kết quả $2x+3 = -2(2-x)+7$ nên

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}dx = \int_0^1 \left(-2 + \frac{7}{2-x}\right)dx = (-2x - 7\ln|2-x|)\Big|_0^1 = 7\ln 2 - 2$$

Do đó $a = 7, b = -2$.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.17. *Cho* $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{e^a - 1}{b}$ *với* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $a = -b$ *B.* $a < b$ *C.* $a > b$ *D.* $a = b$

GIẢI. Ta có

$$\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}\Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

Do đó $a = 3, b = 3$ nên $a = b$.
Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.18. *Cho* $\int_1^a \frac{x+1}{x}dx = e$*. Tìm giá trị của* a

A. $a = \frac{2}{1-e}$ *B.* $a = e$ *C.* $a = \frac{e}{2}$ *D.* $a = -\frac{2}{1-e}$

GIẢI. Ta có

$$\int_1^a \frac{x+1}{x}dx = \int_1^a \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = (x+\ln|x|)\Big|_1^a = a+\ln|a|-1 = e$$

Chỉ có một giá trị a thoả mãn là $a = e$.
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.19. *Tính nguyên hàm* $\int 2^{2x}.3^x.7^x dx$

A. $\dfrac{84^x}{\ln 84}$ B. $\dfrac{2^{2x}.3^x.7^x}{\ln 4 \ln 3 \ln 7}+C$ C. $84^x + C$ D. $84^x \ln 84 + C$

GIẢI. Ta có $2^{2x}.3^x.7^x = (2^2.3.7)^x = 84^x$ nên

$$\int 2^{2x}.3^x.7^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84}+C.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.20. *Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào không đúng?*

A. $\int (x^2-x)\,dx = \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C$ B. $\int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

C. $\int \sin x dx = \cos x + C$ D. $\int_1^2 \dfrac{dx}{x^2+x} = \ln\dfrac{4}{3}$

GIẢI. Do

$$\int (x^2-x)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$$

nên đẳng thức ở đáp án A là sai.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.21. *Tính tích phân* $I = \int_{-1}^2 \dfrac{dx}{1+|1-x|}$

A. $2\ln 3$ B. $\ln 3$ C. $\ln 2$ D. $\ln 6$

GIẢI. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{dx}{1+|1-x|} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+|1-x|} + \int_1^2 \frac{dx}{1+|1-x|} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2-x}+\int_1^2\frac{dx}{x}\\ &= -\ln|2-x|\Big|_{-1}^1 + \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 3 + \ln 2\\ &= \ln 6.\end{aligned}$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.22 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?*

A. 0,2m *B. 2m* *C. 10m* *D. 20m*

GIẢI. Gọi $S(t)$ là quãng đường ô tô chuyển động cho tới khi dừng hẳn. Khi đó $S(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$. Tại thời điểm $t = 0$ thì $S(0) = 0$ nên

$$S(t) = \int_0^t v(u)du = \int_0^t (-5u + 10)du = \left(-\frac{5u^2}{2} + 10u\right)\Big|_0^t = -\frac{5t^2}{2} + 10t.$$

Tại thời điểm $t = T$ ô tô dừng hẳn thì $v(T) = -5T + 10 = 0$ nên $T = 2$. Do đó quãng đường ô tô di chuyển trước khi dừng lại là

$$S(T) = -\frac{5T^2}{2} + 10T = 10\ (m).$$

Vậy đáp án đúng là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $F(x) = 7 + \sin^2 x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x$.

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\int [F(x) - G(x)]\,dx$ có dạng $h(x) = Cx + D$ với C, D là các hằng số.

C. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \sqrt{u(x)} + C$.

D. Nếu $\int f(t)dt = F(t) + C$ thì $\int f(u(t))\,u'(t)dt = F(u(x)) + C$.

BÀI TẬP 3.2. Cho biết $\int_2^5 f(x)dx = 4$ và $\int_2^5 g(x)dx = 5$. Tính $\int_2^5 [f(x) + g(x)]dx$.

A. -1 B. 9 C. 20 D. $\frac{4}{5}$

BÀI TẬP 3.3. Tính $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$ biết $\int_0^9 f(x)dx = 37$ và $\int_0^9 g(x)dx = 16$.

A. 122 B. 74 C. 48 D. 53

BÀI TẬP 3.4. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$ B. $f(x) = e^{2x}$ C. $f(x) = e^{x^2}$ D. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$

BÀI TẬP 3.5. Xác định a, b, c để hàm số $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$

A. $a = 1, b = 1, c = -1$ B. $a = -1, b = 1, c = 1$

C. $a = -1, b = 1, c = -1$ D. $a = 1, b = 1, c = 1$

BÀI TẬP 3.6. Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$ B. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$

C. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$ D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

BÀI TẬP 3.7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{4}{x}$.

A. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$ B. $\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$

C. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^2} + C$ D. $\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^2} + C$

BÀI TẬP 3.8. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \left(x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx$.

A. $\dfrac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ B. $\dfrac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\dfrac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ D. $\dfrac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

BÀI TẬP 3.9. Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{3x - 1}$ trên $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ là

A. $\sqrt{\dfrac{3}{2}x^2 - x + C}$ B. $\dfrac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + C$

C. $\dfrac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3 + C}$ D. $\sqrt{\dfrac{3}{2}x^2 - x} + C$

BÀI TẬP 3.10. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

A. $\dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$ B. $-2\sqrt{1-x} + C$ C. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}} + C$ D. $C\sqrt{1-x}$

BÀI TẬP 3.11. Hàm số $y = \tan^2 2x$ nhận hàm số nào dưới đây là nguyên hàm?

A. $2\tan 2x + x$ B. $\dfrac{1}{2}\tan 2x - x$ C. $\tan 2x - x$ D. $\dfrac{1}{2}\tan 2x + x$

BÀI TẬP 3.12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x \cos x$

A. $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6x}{6} + \dfrac{\sin 4x}{4}\right) + C$ B. $\sin 6x + C$

C. $\cos 6x + C$ D. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6x}{6} + \dfrac{\sin 4x}{4}\right) + C$

BÀI TẬP 3.13. Tìm nguyên hàm $\int (2+e^{3x})^2\,dx$.

A. $4x+\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{6}e^{6x}+C$

B. $4x+\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{6}e^{6x}+C$

C. $4x-\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{6}e^{6x}+C$

D. $4x-\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{6}e^{6x}+C$

BÀI TẬP 3.14. Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1}=\ln K$. Giá trị của K là

A. 3 B. 8 C. 81 D. 9

BÀI TẬP 3.15. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$

A. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+2x+C$

B. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+2x+C$

C. $F(x)=\frac{\frac{x^3}{3}+x}{\frac{x^2}{2}}+C$

D. $\frac{1}{3}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2+C$

BÀI TẬP 3.16. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx$.

A. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|+C$

B. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

C. $\ln\left|x^2-4x+3\right|+C$

D. $\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

BÀI TẬP 3.17. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx$.

A. $5\ln 2-3\ln 3$ B. $5\ln 2+3\ln 3$ C. $3\ln 2-5\ln 3$ D. $2\ln 5-2\ln 3$

BÀI TẬP 3.18. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-12}$

A. $\ln\frac{9}{16}$ B. $\frac{1}{4}\ln\frac{9}{16}$ C. $-\frac{1}{7}\ln\frac{9}{16}$ D. $\frac{1}{7}\ln\frac{9}{16}$

BÀI TẬP 3.19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$ biết $F(1)=\frac{1}{3}$

A. $F(x)=x^2+x+\frac{2}{x+1}-6$

B. $F(x)=x^2+x+\frac{2}{x+1}-\frac{13}{6}$

C. $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{x+1}-\frac{13}{6}$

D. $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{x+1}-6$

BÀI TẬP 3.20. Đẳng thức nào đúng?

A. $\int_0^3 |x-2|dx = \int_{-2}^1 |x-1|dx$ B. $\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^3 (x-2)dx$

C. $\int_0^3 |x-2|dx = \int_2^3 (x-2)dx - \int_0^2 (x-2)dx$ D. $\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 (x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 3.1. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C.$
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.2. $\int_2^5 [f(x)+g(x)]dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 g(x)dx = 9.$
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.3. $\int_0^9 [2f(x)+3g(x)]\,dx = 2\int_0^9 f(x)dx + 3\int_0^9 g(x)dx = 122.$
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.4. $F'(x) = (x^2)'.e^{x^2} = 2x.e^{x^2}.$
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.5.

$$F'(x) = (ax^2+bx+c)'e^{-x} + (ax^2+bx+c)(e^{-x})' = \left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2a-b = -3 \\ b-c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.6. $F(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + 2)dx = x^4 - x^3 + 2x + C$

$$F(-1) = C = 3 \Rightarrow F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.7.

$$\int f(x)dx = \int \left(x^{2/3} + \frac{4}{x}\right)dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + 4\ln|x| + C = \frac{3}{5}\sqrt{x^5} + 4\ln|x| + C.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.8.

$$\int\left(x^3-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^3-\frac{2}{x}+x^{1/2}\right)dx=\frac{x^4}{4}-2\ln|x|+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$
$$=\frac{x^4}{4}-2\ln|x|+\frac{x^{3/2}}{3/2}+C.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.9.

$$\int\sqrt{3x-1}dx=\int(3x-1)^{1/2}dx=\frac{1}{3}.\frac{(3x-1)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3}+C.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.10.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int(1-x)^{-1/2}dx=-\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2}+C=-2\sqrt{1-x}+C.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.11.

$$\int\tan^2 2x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)dx=\frac{1}{2}\tan 2x-x+C.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.12.

$$\int\cos 5x\cos x dx=\int\left(\frac{\cos 6x+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 4x}{8}+C.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.13.

$$\int(2+e^{3x})^2dx=\int\left(4+4e^{3x}+e^{6x}\right)dx=4x+\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{6}e^{6x}+C.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.14.

$$\int_1^5\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.15.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{(x^2+1)^2}{x^2}dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.16.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)}dx = \int \left(\frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x-1)}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.17.

$$I = \int_0^1 \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}\right)dx = (3\ln|x+1| - 2\ln|x+2|)\Big|_0^1$$
$$= 5\ln 2 - 3\ln 3$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.18.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-4)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{7(x-4)} - \frac{1}{7(x+3)}\right) = \left(\frac{1}{7}\ln|x-4| - \frac{1}{7}\ln|x+3|\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{7}\ln 3 - \frac{2}{7}\ln 4 = \frac{1}{7}\ln\frac{9}{16}$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.19.

$$F(x) = \int \frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}dx = \int \left(x + 1 - \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$$

$$\Rightarrow F(1) = C + \frac{5}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow C = -\frac{13}{6} \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.20.

$$\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^3 |x-2|dx = \int_0^2 (x-2)dx - \int_2^3 (x-2)dx.$$

Đáp án đúng là C. □

CHUYÊN ĐỀ 3.2
Phương pháp đổi biến số

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nếu $t = t(x)$ thì $dt = t'(x)dx$.
2. Nếu $p(t) = q(x)$ thì $p'(t)dt = q'(x)dx$.
3. Công thức đổi biến số

$$\boxed{\int f[t(x)]\, t'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F[t(x)] + C}$$

$$\boxed{\int_a^b f[t(x)]\, t'(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)dt}$$

4. Một số phép đổi biến thường gặp
   - $t = ax + b \Rightarrow dt = adx$.
   - $t = x^\alpha \Rightarrow dt = \alpha x^{\alpha-1}dx$.
   - $t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1}dt = f'(x)dx$.
   - $t = \alpha^x \Rightarrow dt = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}dx$.
   - $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$.
   - $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.
   - $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.
   - $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$.
   - $t = \cot x \Rightarrow dt = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$.

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 3.23. *Cho* $\int f(x)dx = F(x) + C$ *thì*

A. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{2a}F(ax+b) + C$ B. $\int f(ax+b)dx = aF(ax+b) + C$

C. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$ D. $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$

GIẢI. Đặt $t = ax + b$ thì $x = \dfrac{t-b}{a}$ nên $dx = \dfrac{1}{a}dt$, do đó

$$\int f(ax+b)dx = \int f(t).\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.24. *Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ thoả mãn*

A. $I > 0$ *B.* $I = 0$ *C.* $I \neq 0$ *D.* $I < 0$

GIẢI. Đặt $t = -x$ thì $dx = -dt$, khi $x = -1$ thì $t = 1$ và khi $x = 1$ thì $t = -1$. Do đó

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{-1} f(-t)dt = \int_{-1}^{1} f(-t)dt$$

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-t) = -f(t) \quad \forall t$ nên

$$I = \int_{-1}^{1} -f(t)dt = -I \Rightarrow I = 0.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

Nhận xét: *Trong biểu thức tích phân thì việc biểu diễn theo dx hay dt là như nhau, kết quả là số không phụ thuộc vào biến*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

VÍ DỤ 3.25. *Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int \dfrac{x^3}{x^4-1}dx$*

A. $F(x) = \ln|x^4 - 1| + C$ *B.* $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln|x^4-1| + C$

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^4-1| + C$ *D.* $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln|x^4-1| + C$

GIẢI. Đặt $t = x^4 - 1$ thì $dt = 4x^3dx$. Suy ra

$$F(x) = \int \frac{dt/4}{t} = \int \frac{dt}{4t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|x^4-1| + C.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.26. *Tính $I = \int x.e^{x^2+1}dx$*

A. $I = e^{x^2+1} + C$ *B.* $I = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$ *C.* $I = \dfrac{1}{2}e^{x^2+1} + C$ *D.* $I = 2e^{x^2+1} + C$

GIẢI. Đặt $x^2+1=t$ thì $dt=2xdx$, do đó

$$I=\int x.e^{x^2+1}dx=\int e^t.\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.27. *Tính giá trị* $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)^4.\frac{1}{\cos^2 x}dx.$

A. $I=\frac{1}{5}$ *B.* $I=\frac{1}{3}$ *C.* $I=\frac{1}{2}$ *D.* $I=\frac{1}{4}$

GIẢI. Đặt $t=\tan x$ thì $dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$ và khi $x=0$ thì $t=0$, khi $x=\frac{\pi}{4}$ thì $t=1$. Khi đó

$$I=\int_0^1(1-t)^4dt=-\frac{(1-t)^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{1}{5}.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.28. *Tìm nguyên hàm* $\int\cos x\sin^2 xdx.$

A. $\frac{3\sin x-\sin 3x}{12}+C$ *B.* $\frac{3\cos x-\cos 3x}{12}+C$

C. $\sin^3 x+C$ *D.* $\sin x.\cos^2 x+C$

GIẢI. Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Do đó

$$\int\cos x\sin^2 xdx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C=\frac{3\sin x-\sin 3x}{12}+C.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.29 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tính tích phân* $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin xdx.$

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ *B.* $I=-\pi^4$ *C.* $I=0$ *D.* $I=-\frac{1}{4}$

GIẢI. Đặt $t=\cos x$ thì $dt=-\sin xdx$ và khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Suy ra

$$I=\int_1^{-1}-t^3dt=\int_{-1}^1 t^3dt=\frac{t^4}{4}\bigg|_{-1}^1=0.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.30. *Giả sử* a,b *là hai số nguyên thoả mãn* $\int_1^5\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=a\ln 3+b\ln 5$. *Tính giá trị của* $a^2+ab+3b^2$

A. 4 *B.* 1 *C.* 0 *D.* 5

GIẢI. Đặt $t = \sqrt{3x+1}$ thì $x = \dfrac{t^2-1}{3}$, do đó $dx = \dfrac{2t}{3}dt$. Khi $x = 1$ thì $t = 2$ và khi $x = 5$ thì $t = 4$. Khi đó

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \int_2^4 \frac{1}{\frac{t^2-1}{3}.t}.\frac{2t}{3}dt = \int_2^4 \frac{2}{t^2-1}dt.$$

Lại có

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

Nên

$$I = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = (\ln|t-1| - \ln|t+1|)\Big|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $a = 2, b = -1$ nên $a^2 + ab + 3b^2 = 5$.
Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.31. *Tính tích phân* $I = \int_0^1 x\sqrt[3]{1-x}dx$.

A. $\dfrac{28}{9}$ B. $-\dfrac{9}{28}$ C. $\dfrac{9}{28}$ D. $\dfrac{3}{28}$

GIẢI. Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì $x = 1 - t^3$ nên $dx = -3t^2dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 1$ thì $t = 0$, khi đó

$$I = -\int_1^0 (1-t^3)t.3t^2dt = \int_0^1 \left(3t^3 - 3t^6\right) dt = \left(\frac{3t^4}{4} - \frac{3t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{28}.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.32. *Tính nguyên hàm* $\int x\sqrt{x^2+3}dx$.

A. $x^2 + 3 + C$ B. $(x^2+3)^2 + C$
C. $\dfrac{(x^2+3)^2}{4} + C$ D. $\dfrac{\sqrt{(x^2+3)^3}}{3} + C$

GIẢI. Đặt $t = \sqrt{x^2+3}$ thì $t^2 = x^2 + 3$ nên $2tdt = 2xdx$. Do đó

$$\int x\sqrt{x^2+3}dx = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2+3)^3}{3} + C.$$

Vậy đáp án đúng là D □

VÍ DỤ 3.33. *Tính nguyên hàm* $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$.

A. $\ln x + C$ B. $\ln|x| + C$ C. $\ln(\ln x) + C$ D. $\ln|\ln x| + C$

GIẢI. Đặt $t = \ln x$ thì $dt = \dfrac{dx}{x}$. Do đó

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Vậy đáp án đúng là D. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.21. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-3}^{0} f(x)dx = a$. Tính $I = \int_{0}^{3} f(x)dx$.

A. $I = -a$ B. $I = 2a$ C. $I = 0$ D. $I = a$

BÀI TẬP 3.22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên (a, b) thỏa mãn $f(a) = f(b)$. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx = 0$ B. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx \neq 0$

C. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx > 0$ D. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx < 0$

BÀI TẬP 3.23. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx$.

A. $\dfrac{1}{n+1}$. B. $\dfrac{1}{n-1}$. C. $\dfrac{1}{2n}$. D. $\dfrac{1}{n}$.

BÀI TẬP 3.24. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$.

A. $F(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x} + C$ B. $F(x) = -\dfrac{1}{\sin x} + C$

C. $F(x) = \dfrac{1}{\sin x} + C$ D. $F(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} + C$

BÀI TẬP 3.25. Tìm họ các nguyên hàm của $\tan^3 x$.

A. $\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ B. $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

C. $\dfrac{1}{2}\left(\tan^2 x + \ln|\cos x|\right) + C$ D. $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

BÀI TẬP 3.26. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$.

A. $\ln\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $-\ln\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\ln\dfrac{1}{2}$

BÀI TẬP 3.27. Tính $I = \int_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x}dx$.

A. $I = \dfrac{1}{2}$ B. $I = \dfrac{3}{2}$ C. $I = \dfrac{1}{4}$ D. $I = \dfrac{1}{3}$

BÀI TẬP 3.28. Tính tích phân $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

A. $I = \cos 1$ B. $I = 1$ C. $I = \sin 1$ D. Kết quả khác

BÀI TẬP 3.29. Cho $\int_0^a \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$. Giá trị của a là

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{6}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP3.21. Đặt $t = -x$ thì $I = \int_{-3}^{0} -f(-x)dx = -\int_{-3}^{0} f(x)dx = -a$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.22. Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

$$\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx = \int_{f(a)}^{f(b)} e^t dt = e^t\Big|_{f(b)}^{f(a)} = e^{f(b)} - e^{f(a)} = 0.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.23. Đặt $t = 1 - \cos x \Rightarrow dt = \sin x dx$

$$I = \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.24. Đặt $\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.25. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \frac{1}{2\tan^2 x} + \ln|\cos x| + C.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.26. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.27. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$

$$I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.28. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.29. Đặt $I = \displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \displaystyle\int_0^a \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Khi đó

$$I + J = \int_0^a dx = a,\ J - I = \int_0^a \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x|\Big|_0^a = \ln|\sin a + \cos a|.$$

Suy ra $I = \dfrac{a - \ln|\sin a + \cos a|}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 3.3
Phương pháp tích phân từng phần

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tích nguyên hàm từng phần, tích phân từng phần

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu; \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

2. Một số dạng thường gặp:

- $I = \int P(x)e^{ax+b}dx$, đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \dfrac{e^{ax+b}}{a} \end{cases}$.
- $I = \int P(x)\sin(ax+b)dx$, đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\dfrac{\cos(ax+b)}{a} \end{cases}$
- $I = \int P(x)\cos(ax+b)dx$, đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} \end{cases}$
- $I = \int f(x)\ln(ax+b)dx$, đặt $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ dv = f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{a(ax+b)} \\ v = F(x) \end{cases}$, trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 3.34. *Tính* $\int \ln x dx$

A. $x\ln x + x + C$ B. $x - x\ln x + C$ C. $x\ln x + C$ D. $x\ln x - x + C$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.35 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Tính tích phân* $I = \int_1^e x\ln x dx$.

A. $I = \dfrac{1}{2}$ B. $I = \dfrac{e^2-2}{2}$ C. $I = \dfrac{e^2+1}{4}$ D. $I = \dfrac{e^2-1}{4}$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = \frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.36. *Tìm nguyên hàm* $\int xe^x dx$

A. $xe^x + C$ B. $I = \dfrac{x^2e^x}{2} + C$ C. $xe^x + e^x + C$ D. $xe^x - e^x + C$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.37. *Tính tích phân* $I = \int_0^1 xe^{-x} dx$

A. $I = 1$ B. $I = 1 - \dfrac{2}{e}$ C. $I = \dfrac{2}{e}$ D. $I = 2e - 1$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.38. *Tính nguyên hàm* $\int x\cos x dx$

A. $x\sin x + \cos x + C$ B. $x\sin x - \cos x + C$ C. $x\sin x + \cos x$ D. $x\sin x - \cos x$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.39. *Tính* $I = \int_0^\pi x\sin x dx$

A. $I = \pi$ B. $I = -\pi$ C. $I = -2$ D. *Đáp án khác*

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.40. *Tính tích phân* $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx.$

A. $I = e^\pi + 1$ B. $I = -e^\pi - 1$ C. $I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ D. $I = \frac{1}{2}(e^\pi - 1)$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x dx \\ v_1 = \sin x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = e^x \sin x\Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi e^x \sin x dx}_{J} = -J.$$

Đặt

$$\begin{cases} u_2 = e^x \\ dv_2 = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_s = e^x dx \\ v_s = -\cos x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$J = -e^x \cos x\Big|_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi e^x \cos x dx}_{I} = e^\pi + 1 + I.$$

Do đó $I = -(e^\pi + 1 + I)$ nên $I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.
Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.41. *Cho tích phân* $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = p + me^\pi$ *với* m, p *là các số hữu tỉ. Giá trị của* m *thuộc khoảng nào?*

A. $-1 < m < 0$ B. $m > 1$ C. $0 < m < 1$ D. $m < -1$

GIẢI. Đặt

$$\begin{cases} u_1 = \cos(\ln x) \\ dv_1 = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ v_1 = x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \underbrace{\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx}_{J} = -e^\pi - 1 + J.$$

Đặt

$$\begin{cases} u_2 = \sin(\ln x) \\ dv_2 = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_2 = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \\ v_2 = x \end{cases}.$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$J = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = -I.$$

Suy ra $I = -e^\pi - 1 - I$ nên $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^\pi$, do vậy $p = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$.
Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.30. Tính giá trị của tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)\ln x dx$.

A. $I = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9}$ B. $I = \frac{6\ln 2 + 2}{9}$ C. $I = \frac{2\ln 2 - 6}{9}$ D. $I = \frac{6\ln 2 - 2}{9}$

BÀI TẬP 3.31. Tính giá trị của tích phân $I = \int_1^2 (2x-1)\ln x dx$

A. $I = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$ D. $I = 2\ln 2$

BÀI TẬP 3.32. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x - 2\ln x}{x^2} dx$.

A. $\ln|x| - \frac{2\ln x + 2}{x} + C$ B. $\ln|x| + \frac{2\ln x - 2}{x} + C$
C. $\ln|x| + \frac{2\ln x + 2}{x} + C$ D. $\ln|x| - \frac{2\ln x - 2}{x} + C$

BÀI TẬP 3.33. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+2}{e^{2x}} dx$

A. $\frac{2x-5}{4e^{2x}} + C$ B. $\frac{2x-3}{4e^{2x}} + C$ C. $\frac{-2x-5}{4e^{2x}} + C$ D. $\frac{-2x-3}{4e^{2x}} + C$

BÀI TẬP 3.34. Biết a, b là hai số nguyên thỏa mãn $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$, tính ab

A. 1 B. -1 C. -15 D. 5

BÀI TẬP 3.35. Tính tích phân $I = \int_0^1 xe^x dx$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

BÀI TẬP 3.36. Tìm nguyên hàm $\int 2x \cos^2 x dx$

A. $x - \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$ B. $x - \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$
C. $x + \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$ D. $x + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 3.30. Đặt $u = \ln x, dv = (x^2-1)dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^3}{3} - x$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right)dx = \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{x^3}{9} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.31. Đặt $u = \ln x, dv = (2x-1)dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, v = x^2 - x$

$$I = (x^2 - x)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)dx = 2\ln 2 - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.32. Đặt $u = 2\ln x, dv = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow du = \frac{2}{x}dx, v = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{x - 2\ln x}{x^2}dx = \ln x + \frac{2\ln x}{x} - \int \frac{2}{x^2}dx = \ln x + \frac{2\ln x + 2}{x} + C.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.33. Đặt $u = x + 2, dv = e^{-2x}dx \Rightarrow du = dx, v = -\frac{e^{-2x}}{2}$

$$\int \frac{x+2}{e^{2x}}dx = -\frac{(x+2)e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}dx = -\frac{(x+2)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.34. Đặt $u = 2x + 1, dv = e^x dx \Rightarrow du = 2dx, v = e^x$

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 3e - 1 - 2e^x\Big|_0^1 = e + 1.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.35. Đặt $u = x, dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x$

$$I = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.36. Đặt $u = x, dv = \cos 2x dx \Rightarrow du = dx, v = \frac{\sin 2x}{2}$

$$\int 2x\cos^2 x dx = \int x\,(1 + \cos 2x) = x + \frac{x\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2}dx = x + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

□

Vậy đáp án đúng là D

CHUYÊN ĐỀ 3.4
Tính diện tích hình phẳng

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 3.42. *Viết công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$*

A. $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx\right|$ B. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

C. $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ D. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

GIẢI. ***Đáp án đúng là D.*** □

VÍ DỤ 3.43. *Giả sử hình phẳng tạo bởi các đường cong $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ có diện tích là S_1, còn diện tích hình phẳng tạo bởi đường cong $y = |f(x)|, y = 0, x = a, x = b$ có diện tích là S_2, còn hình phẳng tạo bởi đường cong $y = -f(x), y = 0, x = a, x = b$ có diện tích là S_3. Lựa chọn phương án đúng*

A. $S_1 = S_3$ B. $S_1 = -S_3$ C. $S_1 > S_3$ D. $S_2 > S_1$.

GIẢI. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{y = f(x), y = 0, x = a, x = b\}$ là

$$S_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{y = |f(x)|, y = 0, x = a, x = b\}$ là

$$S_2 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{y = -f(x), y = 0, x = a, x = b\}$ là
$$S_3 = \int_a^b |-f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.44. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 4x - 6$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2, x = -4$.*

A. 54 B. $\frac{64}{3}$ C. $\frac{148}{3}$ D. $\frac{50}{3}$

GIẢI. Xét phương trình $2x^2 - 4x - 6 = 0$ có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 3$ đều không thuộc khoảng $[-2; 4]$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là
$$S = \int_{-4}^{-2} |2x^2 - 4x - 6|dx = \left|\int_{-4}^{-2} \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx\right| = \left|\left(\frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x\right)\Big|_{-4}^{-2}\right| = \frac{148}{3}.$$
Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.45. *Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$.*

A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. 16 D. $\frac{16}{3}$

GIẢI. Xét phương trình $x^2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là
$$S = \int_0^2 |x^2|\, dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.46 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị $y = x - x^2$.*

A. $\frac{37}{12}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{81}{12}$ D. 13

GIẢI. Xét phương trình $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$ có 3 nghiệm $x = 0, x = 1$ và $x = -2$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là
$$S = \underbrace{\int_{-2}^{0} |x^3 + x^2 - 2x|\, dx}_{S_1} + \underbrace{\int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x|\, dx}_{S_2}.$$
Lại có
$$S_1 = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right| = \frac{8}{3}$$
$$S_2 = \left|\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^1\right| = \frac{5}{12}.$$
Suy ra $S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$.
Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.47. *Cho hình phẳng* (H) *giới hạn bởi các đường* $y = x^4 + 2mx^2 + m^2, x = 0, x = 1$. *Tìm* m *để diện tích hình phẳng đó bằng* $\frac{1}{5}$

A. $m = 1$ *hoặc* $m = 2$ *B.* $m = 0$ *hoặc* $m = \frac{2}{3}$

C. $m = \frac{2}{3}$ *hoặc* $m = 1$ *D.* $m = 0$ *hoặc* $m = -\frac{2}{3}$

GIẢI. Vì $x^4 + 2mx^2 + m^2 = (x^2 + m)^2 \geq 0$ nên diện tích hình phẳng H là

$$S = \int_0^1 \left(x^4 + 2mx^2 + m^2\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2mx^3}{3} + m^2x\right)\Big|_0^1 = m^2 + \frac{2m}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Do đó $m^2 + \frac{2m}{3} = 0$ nên $m = 0$ hoặc $m = -\frac{2}{3}$.

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.48. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = (x-1)\ln x$ *và đường thẳng* $y = x - 1$

A. $\frac{e^2 + 4e + 5}{4}$ B. $\frac{e^2 - 4e + 5}{4}$ C. $\frac{e^2 + 4e + 3}{4}$ D. $\frac{e^2 - 4e + 3}{4}$

GIẢI BÀI TẬP 3.48. Phương trình $(x-1)\ln x = x - 1$ có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = e$. Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_1^e |(x-1)\ln x - (x-1)|\, dx = \left|\underbrace{\int_1^e (x-1)(\ln x - 1)dx}_{I}\right| = |I|$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} - x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e (x-1)\ln x dx - \int_1^e (x-1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{x^2}{4} - x\right)\Big|_1^e - \frac{(e-1)^2}{2} = e - \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4} \\ &= \frac{4e - e^2 - 5}{4} \end{aligned}$$

Do đó $S = |I| = \frac{e^2 - 4e + 5}{4}$.

Vậy đáp án đúng là B □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.37. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2 + x$, Ox, $x = 0$, $x = 1$

A. 3 B. 2 C. 5 D. $\frac{5}{6}$

BÀI TẬP 3.38. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$, Ox và $x = 3$

A. 8 B. 12 C. $I = \frac{16}{3}$ D. $I = \frac{1}{16}$

BÀI TẬP 3.39. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = -2x^2 + x + 3$ và trục hoành

A. $\frac{125}{24}$ B. $I = \frac{125}{34}$ C. $I = \frac{125}{14}$ D. $I = \frac{125}{44}$

BÀI TẬP 3.40. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$.

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{23}{15}$

BÀI TẬP 3.41. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

BÀI TẬP 3.42. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = (e+1)x$ và $y = (1 + e^x)x$

A. $2 - \frac{e}{2}$ B. 2 C. $\frac{e}{2} - 1$ D. $\frac{3}{e} - 1$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 3.37.

$$S = \int_0^1 |x^2 + x| dx = \left| \int_0^1 (x^2 + x) dx \right| = \frac{5}{6}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.38.

$$S = \int_{-1}^3 |\sqrt{x+1}| dx = \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx = \frac{16}{3}.$$

Đáp án đúng là C □

GIẢI BÀI TẬP 3.39. Phương trình $-2x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

$$S = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} |-2x^2 + x + 3| dx = \left| \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + x + 3) dx \right| = \frac{125}{24}.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.40. Phương trình $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x) dx\right| = \frac{4}{3}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.41. Phương trình $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \left|\int_0^1 (x^2 - x) dx\right| = \frac{1}{6}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.42. Phương trình $(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

$$S = \int_0^1 |(e+1)x - (1+e^x)x|\, dx = \left|\int_0^1 (ex - e^x x)\, dx\right| = \frac{e}{2} - 1.$$

Đáp án đúng là C. □

CHUYÊN ĐỀ 3.5
Tính thể tích khối tròn xoay

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thể tích của vật thể V giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a, x = b$ là

$$\boxed{V = \int_a^b S(t)dt}$$

với $S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi vật thể V và mặt phẳng $x = t$.

2. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = f(x), Ox$ và $x = a, x = b$, quanh trục Ox là

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

3. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị $y = f(x), y = g(x)$ và $x = a, x = b$, quanh trục Ox là

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 3.49 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đoạn thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$, xung quanh trục Ox.*

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ B. $V = \int_a^b f^2(x)dx$

C. $V = \pi \int_a^b f(x)dx$ D. $V = \int_a^b |f(x)|dx$

GIẢI. Đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 3.50. *Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 4$ quanh trục Ox.*

A. $V = 6\pi$ B. $V = 4\pi$ C. $V = 12\pi$ D. $V = 8\pi$

GIẢI. Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = -\frac{16\pi}{x}\Big|_1^4 = 12\pi.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 3.51 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.*

A. $V = 4 - 2e$ B. $V = (4 - 2e)\pi$ C. $V = e^2 - 5$ D. $V = (e^2 - 5)\pi$

GIẢI. Xét phương trình $2(x-1)e^x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1) \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}.$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$V = 4\pi.(x-1)^2.\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - 4\pi \underbrace{\int_0^1 (x-1)e^{2x} dx}_{I} = -2\pi - 4\pi I.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}.$$

Theo công thức tích phân từng phần thì

$$I = (x-1).\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1 = \frac{3 - e^2}{4}.$$

Do vậy $V = -2\pi - \dfrac{4\pi.(3 - e^2)}{4} = \pi(e^2 - 5)$.

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.52. *Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox*

A. $\dfrac{\pi}{5}$ B. $\dfrac{\pi}{30}$ C. 0 D. $\dfrac{\pi}{6}$

GIẢI. Xét phương trình $\sqrt{x} = x$ có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(x - \sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + x\right) dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 2x^{3/2} + x\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{30} \end{aligned}$$

Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 3.53. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \tan x, x = 0, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$ quanh trục Ox*

A. $\pi\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ C. $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ D. $\pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

GIẢI. Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \pi \left(\tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 3.54. *Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$, trục hoành và đường thẳng $x = m, m > 0$. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi khi quay (H) quanh trục hoành là 9π (đvtt). Tìm giá trị của m.*

A. 9 B. $\sqrt[3]{3}$ C. 3 D. $3\sqrt[3]{3}$

GIẢI BÀI TẬP 3.54. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi khi quay (H) quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_0^m x^d x = \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^m = \frac{\pi m^3}{3} = 9\pi.$$

Suy ra $m^3 = 27$ hay $m = 3$.
Vậy đáp án đúng là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.43. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2, x = 5$ quanh trục Ox là

A. $\int_2^5 \sqrt{x-1}dx$ B. $\pi \int_2^5 \sqrt{x-1}dx$ C. $\int_2^5 (x-1)dx$ D. $\pi \int_2^5 (x-1)dx$

BÀI TẬP 3.44. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$ quanh trục Ox

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{9}$ C. $\frac{23\pi}{14}$ D. $\frac{13\pi}{7}$

BÀI TẬP 3.45. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (1-x)^2, y = 0, x = 0$ và $x = 2$

A. 5π B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{5}$ D. 3π

BÀI TẬP 3.46. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$ xung quanh Ox

A. $\frac{\pi^2}{3}$ B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. $\frac{2\pi^2}{3}$

BÀI TẬP 3.47. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4, y = 2x - 4, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox

A. $-\frac{16\pi}{15}$ B. 6π C. -6π D. $\frac{16\pi}{15}$

BÀI TẬP 3.48. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}.e^{x/2}, x = 1, x = 2, y = 0$ quanh trục Ox.

A. $\pi(e^2 + e)$ B. $\pi(e^2 - e)$ C. πe^2 D. πe

BÀI TẬP 3.49. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x\ln x, y = 0, x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình (H) quay quanh trục Ox

A. $\frac{\pi\left(5e^3-2\right)}{25}$ B. $\frac{\pi\left(5e^3+2\right)}{25}$ C. $\frac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$ D. $\frac{\pi\left(5e^3+2\right)}{27}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 3.43.

$$S = \pi\int_2^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi\int_2^5 (x-1)dx.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.44.

$$V = \pi\int_0^1 (x^3+1)^2 dx = \frac{23\pi}{14}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.45.

$$V = \pi\int_0^2 \left[(1-x)^2\right]^2 dx = \pi\int_0^2 (1-x)^4 dx = \frac{\pi}{5}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.46.

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.47.

$$V = \pi \int_0^2 \left[x^2 - 4 - (2x - 4)\right]^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.48.

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x}.e^{x/2})dx = \pi \int_1^2 xe^x dx = \pi e^2.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.49. Phương trình $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$V = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}.$$

Đáp án đúng là C. □

CHƯƠNG 4
SỐ PHỨC

CHUYÊN ĐỀ 4.1
Tìm các yếu tố liên quan đến số phức

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm số phức

- Số phức $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, i là số ảo thỏa mãn $i^2 = -1$. Tập các số phức là $\mathbb{C}$.
- Khi $z = a + bi$ thì ta nói phần thực của z là a, phần ảo của z là b.
- Số phức $z = a + 0.i$ là số thực a; số phức $z = 0 + bi$ được gọi là số thuần ảo.
- Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

2. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức $z = a + bi, w = c + di$. Ta định nghĩa các phép toán như sau:

- Phép đồng nhất: $z = w$ khi và chỉ khi $a = c, b = d$.
- Phép cộng, trừ: $z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$.
- Phép nhân: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- Phép chia: Khi $w \neq 0$ thì $\dfrac{z}{w} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$.

3. Môđun của số phức, số phức liên hợp

1. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức $\bar{z} = a - bi$.
2. Với $z = a + bi$, ta đặt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ và gọi $|z|$ là môđun của số phức z.
3. $|z| \geq 0$, $|\bar{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $|zw| = |z|.|w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, $|z^n| = |z|^n$.

3. Căn bậc hai của số phức

1. Khi $a < 0$ thì căn bậc hai của a là $\pm i\sqrt{-a}$.
2. Khi phương trình bậc hai: $az^2+bz+c=0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $\Delta = b^2-4ac < 0$, thì phương trình bậc hai có nghiệm
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$
3. Phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ với $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$ luôn có hai nghiệm phức và hai nghiệm này thỏa mãn
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}.$$
Hai hệ thức trên chính là Định lý Viet.
4. Nếu đa thức $p(z)$ với hệ số thực có nghiệm phức là $z = a + bi$ với $b \neq 0$ thì $p(z)$ cũng có nghiệm $\bar{z} = a - bi$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Tìm dạng tường minh của số phức**

Dạng toán này yêu cầu tính một số phức khi nó được ở dạng một biểu thức nào đó.

1. Chú ý các phép toán trên tập số phức. Các hằng đẳng thức vẫn đúng cho tập số phức.
2. Khi gặp lũy thừa của z với số mũ lớn thử tìm xem $z^2, z^3, \ldots$ có dạng đơn giản hay không. Cũng lưu ý rằng
$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$
3. Nếu tổng có dạng cấp số cộng hoặc cấp số nhân thì vận dụng cộng thức tính tổng đã biết.

VÍ DỤ 4.1 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.*

A. $w = 7 - 3i$ *B.* $w = -3 - 3i$ *C.* $w = 3 + 7i$ *D.* $w = -7 - 7i$

GIẢI. Ta có
$$w = i(2+5i) + (2-5i) = -5 + 2i + 2 - 5i = -3 - 3i.$$
Vậy đáp án đúng là B. □

VÍ DỤ 4.2. *Số phức $z = 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{99}$ bằng*

A. $-(2^{50}+1)i$ *B.* $(2^{50}+1)i$ *C.* $(2^{50}-1)i$ *D.* $(-2^{50}+1)i$

GIẢI. Ta có
$$z = 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{99} = \frac{(1+i)^{100}-1}{(1+i)-1}.$$

Vì $(1+i)^2 = 2i$ nên $(1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50}(i^2)^{25} = -2^{50}$. Suy ra

$$z = \frac{-2^{50}-1}{i} = (2^{50}+1)i.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 2: Tìm nghiệm phức và số nghiệm phức của phương trình

Khi số phức cho ở dạng một phương trình thì ta tìm số phức như sau:

1. Ta viết số phức dưới dạng đại số $z = x + yi$ sau đó thay vào phương trình để thu được hai phương trình với hai ẩn x, y.
2. Giải hệ phương trình ẩn x, y ta tìm được x, y và từ đó tìm được z.
3. Với phương trình chỉ chưa biến z (không chứa $\bar{z}, |z|, ...$) ta có thể dùng các kỹ thuật truyền thống để giải phương trình. Chú ý không dùng được kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức, tính đơn điệu của hàm số. Chú ý dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2.
4. Sau khi tìm được z, ta có thể dễ dàng tính toán được các biểu thức liên quan của z.

VÍ DỤ 4.3. *Tìm số phức z thỏa mãn*

$$(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z.$$

A. $w = 3+i$ *B.* $w = 1-3i$ *C.* $w = 3-i$ *D.* $w = -3-i$

GIẢI. Ta viết $z = a + bi$ với a, b là các số thực. Khi đó

$$(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z \Leftrightarrow (3-2i)(a-bi) - 4(1-i) = (2+i)(a+bi)$$
$$\Leftrightarrow (3a-2b-4) + (-2a-3b+4)i = (2a-b) + (a+2b)i.$$

Từ đó ta thu được hệ $3a - 2b - 4 = 2a - b, -2a - 3b + 4 = a + 2b$. Suy ra $a = 3, b = -1$. Do đó $z = 3 - i$.

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 4.4. *Tìm số nghiệm phức của phương trình* $(z + 2\bar{z})^3 = 8i$.

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 4

GIẢI. Ta viết $z = x + yi$ với x, y là các số thực. Khi đó

$$(z+2\bar{z})^3 = (x+yi+2x-2yi)^3 = (3x-yi)^2 = (2x)^3 - 3(3x)^2(yi) + 3(3x)(yi)^2 - (yi)^3$$
$$= (8x^3 - 9xy^2) + (y^3 - 27x^2y)i.$$

Do đó

$$(z+2\bar{z})^3 = 8i \Leftrightarrow (8x^3 - 9xy^2) + (y^3 - 27x^2y)i = 8i \Leftrightarrow 8x^3 - 9xy^2 = 0, y^3 - 27x^2y = 8.$$

Hệ phương trình cuối cùng có 3 nghiệm là $(x;y) = (0;2), (\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; -1)$. Nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Vậy đáp án đúng là C. □

Dạng 3: Tìm số phức, tìm phần thực phần ảo của số phức

Với dạng toán tìm phần thực và phần ảo của số phức, ta có thể làm như sau:

1. Với số phức đã cho bởi một biểu thức tường minh, ta rút gọn và viết số phức dưới dạng $a + bi$ rồi kết luận phần thực, phần ảo.
2. Nếu số phức cho ở dạng một phương trình thì ta tìm số phức như đã trình bày ở trên.
3. Sau khi tìm được z, ta có thể dễ dàng tính toán được các biểu thức liên quan của z.

VÍ DỤ 4.5 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của $\bar{z}$.*

A. Phần thực là -3 và phần ảo là $-2i$ *B. Phần thực là -3 và phần ảo là -2*

C. Phần thực là 3 và phần ảo là $2i$ *D. Phần thực là 3 và phần ảo là 2*

GIẢI. Ta có $\bar{z} = 3 + 2i$ nên phần thực là 3 và phần ảo là 2.
Vậy đáp án đúng là D. □

VÍ DỤ 4.6. *Cho số phức z thỏa mãn $(3+i)\bar{z} + (2i+1)z - 3 + 4i = 0$. Tìm phần ảo của $\bar{z}^2$.*

A. -10 *B.* -20 *C.* 10 *D.* -20

GIẢI. Viết $z = x + yi$. Ta có

$$(3+i)\bar{z} + (2i+1)z - 3 + 4i = 0 \Leftrightarrow (3+i)(x-yi) + (1+2i)(x+yi) - 3 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x - y - 3) + (3x - 2y + 4)i = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 3 = 3x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, y = 5.$$

Suy ra $\bar{z}^2 = (2-5i)^2 = -21 - 20i$. Phần ảo của $\bar{z}$ là -20.
Vậy đáp án đúng là B. □

Dạng 4: Tìm môđun của số phức

Với dạng toán tìm môđun của số phức, ta có thể làm như sau:

1. Với số phức đã cho bởi một biểu thức tường minh, ta rút gọn và viết số phức dưới dạng $a + bi$ rồi tính môđun $\sqrt{a^2+b^2}$.
2. Nếu số phức cho ở dạng một phương trình thì ta tìm số phức như đã trình bày ở trên.
3. Lưu ý một số tính chất của môđun: $|\bar{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $|zw| = |z|.|w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $|z^n| = |z|^n$.

VÍ DỤ 4.7 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $z_1 + z_2$.*

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ *B.* $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ *C.* $|z_1 + z_2| = 1$ *D.* $|z_1 + z_2| = 5$

GIẢI. Ta có

$$z_1 + z_2 = (1+i) + (2-3i) = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

VÍ DỤ 4.8 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.*

A. $T = 4$ *B.* $T = 2\sqrt{3}$ *C.* $T = 4 + 2\sqrt{3}$ *D.* $T = 2 + 2\sqrt{3}$

GIẢI. Ta có

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4, z^2 = -3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}i, z = \pm 2.$$

Do đó $T = |\sqrt{3}i| + |-\sqrt{3}i| + |2| + |-2| = 4 + 2\sqrt{3}$.

Vậy đáp án đúng là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 4.1. Phần thực của số phức z thỏa mãn $(1+i)^2(2-i)z = 8 + i + (1+2i)z$ là

A. -6 B. -3 C. 2 D. -1

BÀI TẬP 4.2. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z + \dfrac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z}$. Tìm môđun của số phức $w = z - i$.

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$ B. $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{\sqrt{26}}{25}$

BÀI TẬP 4.3. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$ có một nghiệm phức là $1 + 2i$. Tính giá trị của ab

A. 10 B. -10 C. 12 D. -12

BÀI TẬP 4.4. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 6 B. 5 C. 4 D. 7

BÀI TẬP 4.5. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2$

A. 18 B. 10 C. 20 D. 16

BÀI TẬP 4.6. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $2z + \bar{z} + 4i = 9$. Tìm mô đun của z^2.

A. 25 B. 4 C. 16 D. 9

BÀI TẬP 4.7. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị của $|z_1| + |z_2|$

A. $\sqrt{2}$ B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

BÀI TẬP 4.8. Phương trình $(2+i)z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{C}$ có hai nghiệm là $3+i$ và $1-2i$. Khi đó a bằng

A. $-9-2i$ B. $15+5i$ C. $9+2i$ D. $15-5i$

BÀI TẬP 4.9. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2iz - 4 = 0$. Khi đó môđun của số phức $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$ bằng

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

BÀI TẬP 4.10. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$. Tìm phần thực của số phức $w = z^2 - z$

A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

BÀI TẬP 4.11. Cho số phức $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính z^{23}

A. $-i$ B. 1 C. i D. -1

BÀI TẬP 4.12. Số nghiệm phức của phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$ là

A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

BÀI TẬP 4.13. Số nghiệm phức của phương trình $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$ là

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

BÀI TẬP 4.14. Tổng bình phương các nghiệm phức của phương trình $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$ bằng

A. 6 B. -8 C. -6 D. 8

BÀI TẬP 4.15. Môđun của số phức $z = 1 + (1-i) + (1-i)^2 + \cdots + (1-i)^{19}$ bằng

A. 20 B. $2^{10}+1$ C. 1 D. $2^{10}-1$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 4.1. Ta có

$$(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow (2+4i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{1+2i} = 2-3i.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.2. Đặt $z = x + yi$. Ta có

$$(i+3)z + \frac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z} \Leftrightarrow (3+i)(x+yi) + 1 - 2i = (2-i)(x-yi)$$
$$\Leftrightarrow (3x - y + 1) + (x + 3y - 2)i = (2x - y) - (x + 2y)i.$$

Từ đó ta có $3x - y + 1 = 2x - y$ và $x + 3y - 2 = -x - 2y$.
Suy ra $x = -1, y = \frac{4}{5}$. Do đó $w = z - i = -1 - \frac{1}{5}i$ và $|w| = \frac{\sqrt{26}}{5}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.3. Thay $z = 1 + 2i$ vào phương trình ta được $(1+2i)^2 + a(1+2i) + b = 0$. Do đó $a + b = 3$ và $2a + 4 = 0$. Kéo theo $a = -2$ và $b = 5$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.4. Phương trình có hai nghiệm là $z_{1,2} = 2 \pm i$. Do đó

$$z_1^2 + z_2^2 = (2-i)^2 + (2+i)^2 = 6.$$

Có thể dùng Định lý Viet như sau: $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 4^2 - 2.5 = 6.$
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.5. Phương trình có hai nghiệm là $z_{1,2} = -1 \pm 3i$. Do đó

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |-1-3i|^2 + |-1+3i|^2 = 20.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.6. Đặt $z = x + yi$. Ta có

$$2z + \bar{z} + 4i = 9 \Leftrightarrow 2(x+yi) + (x-yi) + 4i = 9 \Leftrightarrow 3x = 9, y = -4 \Leftrightarrow x = 3, y = -4.$$

Kéo theo $z = 3 - 4i$. Suy ra $|z^2| = |z|^2 = 25$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.7. Phương trình có hai nghiệm là $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{2}$. Do đó

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{-2+\sqrt{2}i}{2}\right| + \left|\frac{-2-\sqrt{2}i}{2}\right| = \sqrt{6}.$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.8. Theo giả thiết ta có

$$(2+i)(3+i)^2 + a(3+i) + b = (2+i)(1-2i)^2 + a(1-2i) + b = 0$$
$$\Rightarrow [(2+i)(3+i)^2 - (2+i)(1-2i)^2] + a[(3+i) - (1-2i)] = 0$$
$$\Rightarrow a = -\frac{(2+i)(3+i)^2 - (2+i)(1-2i)^2}{(3+i) - (1-2i)} = -(2+i)(3+i+1-2i) = -9-2i.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.9. Theo định lý Viet ta có $z_1 + z_2 = 2i, z_1z_2 = -4$. Do đó

$$w = z_2z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4 = -4 - 2(2i) + 4 = -4i \Rightarrow |w| = |-4i| = 4.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.10. Ta viết phương trình về dạng $z + (1-2i)\bar{z} = 2 - 4i$. Đặt $z = x + yi$ thì

$$(x+yi) + (1-2i)(x-yi) = 2-4i \Leftrightarrow (2x-2y) - 2xi = 2-4i \Leftrightarrow x = 2, y = 1..$$

Do đó $w = (2+i)^2 - (2+i) = 1 + 3i$ và phần thực của w là 1.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.11. Ta có $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2017} = i^{2017}$. Cho nên $z^{23} = i^{2017.23} = i^3 = -i$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.12. Đặt $z = x + yi$. Thay vào phương trình ta được

$$(x+yi)^2 + (x-yi) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + x) + (2xy - y)i = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x = 2xy - y = 0.$$

Hệ phương trình cuối cùng có 4 nghiệm là $(x;y) = (0;0), (-1;0); \left(\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Do đó có 4 số phức thỏa mãn phương trình.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.13. Ta thấy vế trái của phương trình là hàm chẵn của z và 0 không là nghiệm của phương trình. Suy ra phương trình có số chẵn nghiệm (nếu z_0 là nghiệm thì $-z_0$ cũng là nghiệm). Tuy nhiên ở đây ta vẫn chưa biết phương trình có 2 hay 4 nghiệm. Ta phải làm tiếp như sau.
Do $|z|$ là số thực nên từ phương trình suy ra z^2 phải là số thực. Suy ra z phải là số thực hoặc thuần ảo.
Khi z là số thực thì

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 12z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{2}.$$

Khi z là số thuần ảo thì $z = ib$. Khi đó

$$-4b^2 + 8b^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Do đó phương trình có 4 nghiệm.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.14. Ta có

$$z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1; z^2 = -2 \Leftrightarrow z_{12} = \pm i, z_{34} = \pm\sqrt{2}i.$$

Do đó tổng bình phương các nghiệm của phương trình là -6.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.15. Ta có

$$z = \frac{1-(1-i)^{20}}{1-(1-i)} = \frac{1-(-2i)^{10}}{i} = \frac{1+2^{10}}{i} = -i(2^{10}+1) \Rightarrow |z| = 2^{10}+1.$$

Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 4.2
Biểu diễn hình học của số phức

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số phức $z = x + yi$ sẽ có biểu diễn là $(x; y)$.
2. Khi cho z bởi một biểu thức cụ thể nhưng "cồng kềnh" thì trước hết ta phải rút gọn số phức về dạng $a + bi$, sau đó kết luận biểu diễn cần tìm là $(a; b)$.
3. Khi cho z bởi một phương trình thì trước tiên ta giải phương trình để tìm z bằng cách đặt $z = x + yi$.
4. Hai số phức z và $\bar{z}$ có biểu diễn là hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: **Biểu diễn của một số phức**

VÍ DỤ 4.9 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm.*

A. $M(1;2)$ *B.* $N(-1;2)$ *C.* $P(-1;-2)$ *D.* $Q(1;-2)$

GIẢI. Ta có

$$z = \frac{3-i}{1+i} = 1 - 2i.$$

Nên điểm biểu diễn của z là $(1; -2)$.
Như vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 4.10. *Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Gọi A và B thứ tự là điểm biểu diễn của z_1 và z_2. Diện tích tam giác OAB bằng*

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 4

GIẢI. Theo công thức nghiệm của phương trình ta có $z_{1,2} = 1 \pm 2i$. Do đó $A(1;2)$ và $B(1;-2)$. Tam giác OAB có đáy $AB = 4$ và chiều cao có độ dài bằng 1 nên có diện tích là 2.
Như vậy đáp án là B. □

Dạng 2: **Tập hợp điểm biểu diễn của số phức**

Nhiều bài toán về số phức yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn *một* phương trình (bất phương trình) cho trước. Ta có thể làm như sau:
Bước 1. Viết $z = x + yi$ và thay vào phương trình để được phương trình của x và y.
Bước 2. Biến đổi để đơn giản hóa phương trình ta sẽ thu được quan hệ của x và y mà không

có đơn vị ảo i tham gia (thường nếu có căn thức ta sẽ bình phương hai vế).
Bước 3. Kết luận tập hợp điểm là đường cong nào.

Bài toán cơ bản. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(a+bi)|=r$ với a,b,r là các số thực cho trước, $r>0$.
Lời giải.
Ta viết $z=x+yi$. Khi đó

$$|z-(a+bi)|=r \Leftrightarrow |(x-a)+i(y-b)|=r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính r.
Chú ý. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(a+bi)|\le r$ là hình tròn tâm $I(a;b)$ bán kính r.

Bài toán tổng quát 1. Cho trước các số phức $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ở đó α và γ không đồng thời bằng 0. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn *một trong các điều kiện* sau

1. $|\alpha z+\beta|=|\gamma z+\delta|$;
2. $|\alpha z+\beta|=|\gamma \bar{z}+\delta|$;
3. $|\alpha \bar{z}+\beta|=|\gamma \bar{z}+\delta|$.

Cách giải. Ta viết $z=x+yi$ rồi thay vào phương trình. Tính môđun hai vế rồi sau đó bình phương hai vế, rút gọn các biểu thức đồng dạng. Kết quả thu được là một phương trình của x và y. Phương trình thu được chắc chắn sẽ là đường tròn hoặc đường thẳng.
Phương trình thu được là đường thẳng khi và chỉ khi $|\alpha|=|\gamma|$;
Phương trình thu được là đường tròn khi và chỉ khi $|\alpha|\neq|\gamma|$.

Bài toán tổng quát 2. Cho số phức z thỏa mãn một điều kiện cho trước. Khi đó số phức $w=\alpha z+\beta$ chạy trên đường nào? (α,β là hai số phức cho trước và $\alpha\neq 0$).
Cách giải. Ta có $z=\dfrac{w-\beta}{\alpha}$. Dùng điều kiện đã cho của z để tìm ra một phương trình của w. Từ đó có thể kết luận tập hợp điểm w.
Trong trường hợp z chạy trên 1 đường thẳng thì w cũng chạy trên một đường thẳng.
Trong trường hợp z chạy trên đường tròn $|z-z_0|=r$ (tâm là điểm có tọa độ ứng với z_0 và bán kính r) thì w cũng chạy trên đường tròn $|w-\beta-\alpha z_0|=r|\alpha|$ (tâm tại điểm có tọa vị ứng với $\beta+\alpha z_0$ và bán kính $r|\alpha|$).

VÍ DỤ 4.11 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Cho số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết tập các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn.*

A. $r=4$ *B.* $r=5$ *C.* $r=20$ *D.* $r=22$

GIẢI. Ta có $z=\dfrac{w-i}{3+4i}$. Cho nên $\left|\dfrac{w-i}{3+4i}\right|=4\Leftrightarrow|w-i|=20$. Ta viết $w=u+iv$ thì $20=|w-i|=\sqrt{u^2+(v-1)^2}\Leftrightarrow u^2+(v-1)^2=20^2$. Suy ra w thuộc đường tròn bán kính $r=20$.
Nếu đã biết kết quả của Bài toán tổng quát 2 ở trên thì ta có ngay bán kính của đường tròn là $4|3+4i|=20$.
Như vậy đáp án là C.

□

VÍ DỤ 4.12. *Tìm biểu diễn của tập hợp các số phức z thỏa mãn* $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

A. $3x + 4y = 12$ *B.* $6x + 8y = 25$ *C.* $3x + 4y = 13$ *D.* $6x + 8y = 27$

GIẢI. Ta viết $z = x + yi$. Khi đó $\bar{z} - 3 + 4i = (x - yi) - 3 + 4i = (x - 3) + (4 - y)i$.
Suy ra

$$|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (4-y)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow 6x + 8y = 25.$$

Theo Bài toán tổng quát 2 thì biểu diễn của z sẽ là một đường thẳng. Ta có thể dùng "mẹo" để tìm ra đáp án như sau:
Xét đường thẳng ở A. Ta sẽ chọn một điểm thuộc đường thẳng này (mà không thuộc 3 đường thẳng kia). Chẳng hạn ta chọn điểm $(4; 0)$ và số phức tương ứng là $z = 4$. Thay vào ta thấy phương trình ban đầu không thỏa mãn. Vậy đáp án không thể là A.
Xét đường thẳng ở B. Ta chọn điểm thuộc nó là $(\frac{25}{6}; 0)$ và thu được số phức $z = \frac{25}{6}$. Thay số phức này vào phương trình ta thấy nó thỏa mãn. Từ đó kết luận đáp án đúng là B.
Như vậy đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 4.16. Tìm biểu diễn của tập hợp các số phức z thỏa mãn $|iz - (2 + i)| = 2$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ B. $x + 2y - 1 = 0$

C. $3x + 4y - 2 = 0$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

BÀI TẬP 4.17. Tìm biểu diễn của tập hợp các số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$.

A. $20x - 16y - 47 = 0$ B. $20x + 16y - 47 = 0$

C. $20x + 16y + 47 = 0$ D. $20x - 16y + 47 = 0$

BÀI TẬP 4.18. Gọi A và B thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $z = 2 + 5i$ và $w = -2 + 5i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ

B. A và B đối xứng nhau qua Ox

C. A và B đối xứng nhau qua Oy

D. A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $x = y$.

BÀI TẬP 4.19. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Trục Oy B. Hai đường thẳng $x = y$ và $x = -y$

C. Dường thẳng $x = y$ D. Trục Ox

BÀI TẬP 4.20. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=2z+1-i$ là một đường tròn. Tìm tâm I và bán kính r của đường tròn.

A. $I(3;-4), r=2$ B. $I(4;-5), r=4$ C. $I(5;-7), r=4$ D. $I(7;-9), r=4$

BÀI TẬP 4.21. Ba điểm A, B và C lần lượt là biểu diễn 3 số phức $z_1=1+i$, $z_2=(1+i)^2$ và $z_3=a-i$ với $a\in\mathbb{R}$. Tìm a để tam giác ABC vuông tại B.

A. $a=-3$ B. $a=-2$ C. $a=3$ D. -4

BÀI TẬP 4.22. Ba điểm A, B và C lần lượt là biểu diễn 3 số phức $z_1=1+5i$, $z_2=3-i$ và $z_3=6$. Tam giác ABC là

A. Vuông nhưng không vuông cân B. Vuông cân

C. Cân nhưng không đều D. Đều

BÀI TẬP 4.23. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+4i|\le 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là

A. Đường tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $r=2$ B. Hình tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $r=2$

C. Đường tròn tâm $I(-1;4)$ bán kính $r=2$ D. Hình tròn tâm $I(-1;4)$ bán kính $r=2$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 4.16. Ta viết $z=x+yi$. Khi đó $iz-(2+i)=(ix-y)-2-i=-(y+2)+(x-1)i$. Suy ra

$$|iz-(2+i)|=2\Leftrightarrow|-(y+2)+(x-1)i|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.17. Ta viết $z=x+yi$. Khi đó $z-2+3i=(x-2)+(y+3)i$ và $2i-1-2\bar{z}=(-2x-1)+(2y+2)i$. Suy ra

$$2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}|\Leftrightarrow 2|(x-2)+(y+3)i|=|(-2x-1)+(2y+2)i|$$

$$\Leftrightarrow 4[(x-2)^2+(y+3)^2]=(-2x-1)^2+(2x+2)^2\Leftrightarrow 20x-16y-47=0.$$

Có thể dùng phương pháp như trình bày ở ví dụ trên để tìm ra đáp án A.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.18. Rõ ràng $A(2;5)$ và $B(-2;5)$. Cho nên ta chọn khẳng định B.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.19. Ta viết $z=x+yi$. Thì $z^2=(x^2-y^2)+2xyi$. Suy ra z^2 là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2-y^2=0\Leftrightarrow x=\pm y$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.20. Ta có $z = \dfrac{w-1+i}{2}$. Cho nên $\left|\dfrac{w-1+i}{2} - 3 + 4i\right| = 2 \Leftrightarrow |w - 7 + 9i| = 4$.
Ta viết $w = u + iv$ thì $4 = |w - 7 + 9i| = \sqrt{(u-7)^2 + (v+9)^2} \Leftrightarrow (u-7)^2 + (v+9)^2 = 4^2$.
Suy ra w thuộc đường tròn tâm $I(7; -9)$ bán kính $r = 4$.
Dùng kết quả của Bài toán tổng quát 2 ở trên thì ta cũng thu được kết quả tương tự.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.21. Ta có $A(1;1)$, $B(0;2)$ và $C(a;-1)$. Suy ra $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(a-1)^2+4} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ và $BC = \sqrt{a^2+9}$. Tam giác ABC vuông tại B khi và chỉ khi

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 2 + a^2 + 9 \Leftrightarrow a = -3.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.22. Ta có $A(1;5)$, $B(3;-1)$ và $C(6;0) \Rightarrow AB^2 = 40$, $AC^2 = 50$ và $BC^2 = 10$. Ta thấy

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, AB \neq BC.$$

Cho nên tam giác ABC vuông tại B.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.23. Ta viết $z = x + yi$. Khi đó

$$|z - 1 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |(x-1) + (y+4)i| \leq 2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 \leq 4.$$

Tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn phương trình cuối cùng là hình tròn tâm $I(1; -4)$ bán kính $r = 2$.
Đáp án đúng là B. □

CHƯƠNG 5
KHỐI ĐA DIỆN

CHUYÊN ĐỀ 5.1
Các bài toán về thể tích của khối đa diện

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Một số công thức hình học phẳng cần nhớ

a) Hệ thức lượng trong tam giác vuông:
Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, trung tuyến AM.

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ *(Định lý Pitago)*
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $BA^2 = BH.BC; CA^2 = CH.CB$
- $AM = BM = CM = \dfrac{1}{2}BC$
- $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}; \cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}; \tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}; \cot\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{AC}$

b) Một số công thức tính diện tích:

- Diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Đặc biệt: tam giác đều cạnh a có diện tích: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và đường cao: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$.
- Diện tích hình chữ nhật cạnh a, b: $S = ab$.
- Diện tích hình thoi $ABCD$: $S = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$.

- Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b).h.$
- Diện tích tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$: $S = \frac{1}{2}AC.BD.$

2. Một số kiến thức hình học không gian cần nhớ

a) Quan hệ song song:

- **Định lý ba đường giao tuyến:** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
- Một đường thẳng d song song với một mặt phẳng (P) khi và chỉ khi d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng nào đó chứa trong (P).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau khi và chỉ khi tồn tại hai đường thẳng cắt nhau a, b chứa trong (P) và hai đường thẳng cắt nhau a', b' chứa trong (Q) sao cho $a \parallel a'; b \parallel b'$.

b) Quan hệ vuông góc:

- Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) nếu a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P).
- Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b nếu a vuông góc với một mặt phẳng (P) chứa b.
  Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng và đi qua trung điểm của đoạn thẳng đó. Mọi điểm thuộc mặt phẳng trung trực đều cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
- Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) nếu (P) vuông góc với một đường thẳng a chứa trong (Q).
  - Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
  - Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

c) Các loại góc trong không gian:

- Cách xác định góc giữa hai đường thẳng a và b:
  - Bước 1: Lấy điểm I bất kì (có thể chọn $I \in a$ hoặc $I \in b$).
  - Bước 2: Qua điểm I kẻ đường thẳng $a' \parallel a$.
  - Bước 3: Xác định đường thẳng b' sao cho: $b' \parallel b$ và b' cắt a'.

  Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b'.
- Cách xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P):
  - Bước 1: Xác định giao điểm I của a và (P).
  - Bước 2: Chọn một điểm A bất kì thuộc a.

- Bước 3: Xác định điểm $A' \in (P)$ sao cho: $AA' \perp (P)$.

Khi đó, góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là $\widehat{AIA'}$.

- Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q):
  - Bước 1: Xác định giao tuyến Δ của (P) và (Q).
  - Bước 2: Chọn một mặt phẳng (R) sao cho $(R) \perp \Delta$.
  - Bước 3: Xác định hai giao tuyến $a = (R) \cap (P)$ và $b = (R) \cap (Q)$.

Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

3. Thể tích khối đa diện

a) Thể tích khối lăng trụ: $V = h.S$ với h là độ dài đường cao và S là diện tích đa giác đáy.
Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba độ dài của hình hộp chữ nhật.
Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh hình lập phương.

b) Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}.h.S$ với h là độ dài đường cao và S là diện tích đa giác đáy.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Tính thể tích của một khối chóp**

Phương pháp giải:

- Xác định đường cao của khối chóp, các loại giả thiết về góc, tính độ dài đường cao và diện tích đa giác đáy. Từ đó áp dụng công thức tính thể tích của khối chóp.
- **Chú ý:** Một số dạng đường cao thường gặp của khối chóp
  - Khối chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì đường cao là cạnh bên đó.
  - Khối chóp có hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là H thì đường cao là SH.
  - Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao của khối chóp là đường cao của mặt bên ứng với giao tuyến của hai mặt.
  - Khối chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao là giao tuyến của hai mặt bên.
  - Khối chóp đều có đường cao là SO với O là tâm của đa giác đáy.

VÍ DỤ 5.1 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$; và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

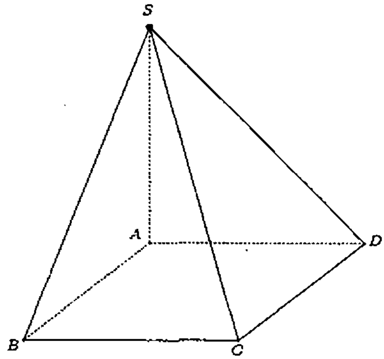
A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ *B.* $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ *C.* $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ *D.* $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

GIẢI.
Ta có:

$$SA = a\sqrt{2}; S_{ABCD} = a^2$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy đáp án là là D.



VÍ DỤ 5.2. *Cho khối chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a. Cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a^3}{2}$

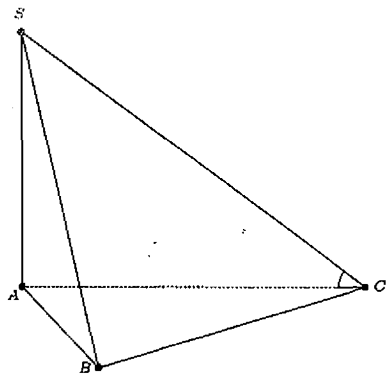
GIẢI.
Vì $SA\perp(ABC)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là $\widehat{SCA}$, suy ra: $\widehat{SCA} = 45^0$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$\frac{SA}{AC} = \tan\widehat{SCA} \Rightarrow SA = a.\tan 45^0 = a.$$

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

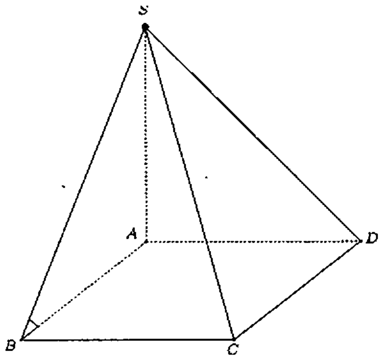
Vậy đáp án là là A.



VÍ DỤ 5.3. *Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

GIẢI. Vì $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB với mặt đáy là góc $\widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.



Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a
$\Rightarrow S_{ABCD} = a^2$.
Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy đáp án là là D.

VÍ DỤ 5.4. *Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$, cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45^0 và $SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

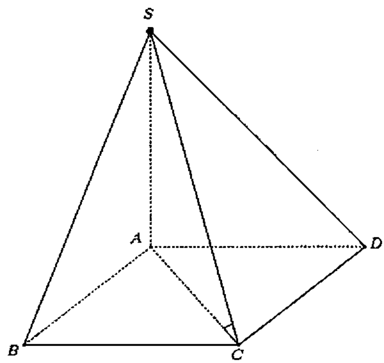
GIẢI.

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC với mặt đáy là góc $\widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$SA = SC.\sin\widehat{SCA} = a\sqrt{2}.\sin 45^0 = a$$

Khi đó, $AC = a \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$.
Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$$

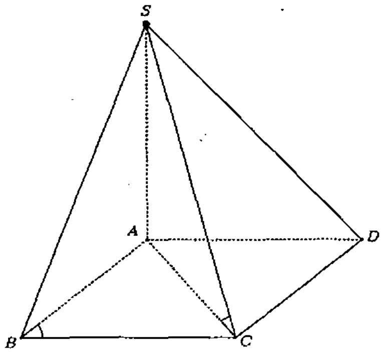


Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.5. *Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Biết $SA\perp(ABCD)$ và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{3a^3}{2}$ C. $\frac{a^3}{2}$ D. $\frac{a^3}{4}$

GIẢI.



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC với mặt đáy là góc $\widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.
Ta có: $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow$ suy ra tam giác ABC đều $\Rightarrow AC = a$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

Diện tích hình thoi $ABCD$ là:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= a^2 AB.AC.\sin\widehat{ABC} \\ &= a.a.\sin 60^0 \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vậy, thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$.
Vậy đáp án là là C.

VÍ DỤ 5.6. *Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a$; $AC = 2a$. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.*

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

GIẢI.
Ta có: $BC \perp AB$; $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$, do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$
$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.
Xét tam giác SAB vuông tại A có:

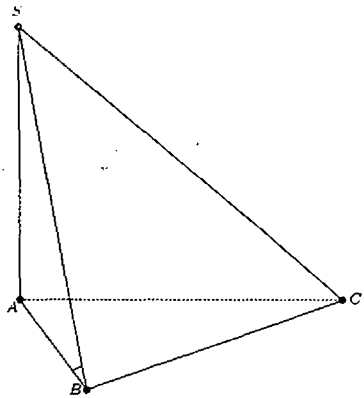
$$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

Khi đó, diện tích tam giác ABC là:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

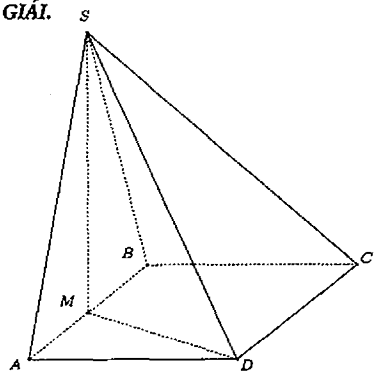


Vậy, thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$.
Vậy đáp án là là B.

VÍ DỤ 5.7. *Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB, $SD = \frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

GIẢI.



Gọi M là trung điểm AB suy ra $SM \perp (ABCD)$.
Xét tam giác AMD vuông tại A có:

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Xét tam giác SMD vuông tại M có:

$$SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = a$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$.
Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.a^2 = \frac{a^3}{3}$$

Vậy đáp án là là C.

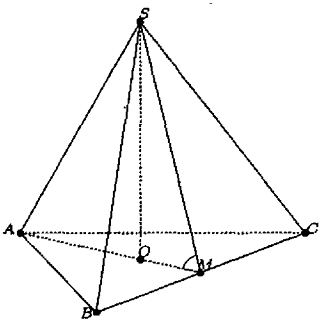
VÍ DỤ 5.8. *Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a và các mặt bên hợp với mặt đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.*

A. $\frac{a^3}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{25}$ C. $\frac{a^3}{5}$ D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{25}$

GIẢI.

Gọi O tâm của tam giác ABC suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Gọi M là trung điểm BC.
Ta có: $BC \perp SO$ và $BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SBC) với đáy là góc $\widehat{SMA}$ $\Rightarrow \widehat{SMA} = 45^0$.
Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \frac{AM}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.
Xét tam giác SOM vuông tại O ta có:

$$SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.\tan 45^0 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



Vậy, thể tích khối chóp là

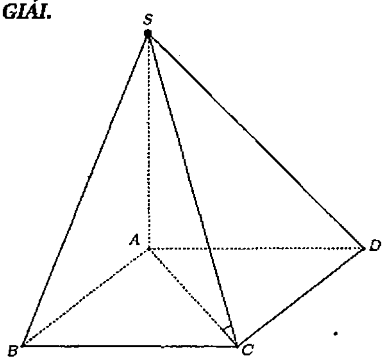
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24}.$$

Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.9. *Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh bên SC hợp với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

GIẢI.



Ta có: hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $\Rightarrow SA\perp(ABCD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC với mặt đáy $ABCD$ là $\widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.
Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $S_{ABCD} = a^2$ và $AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

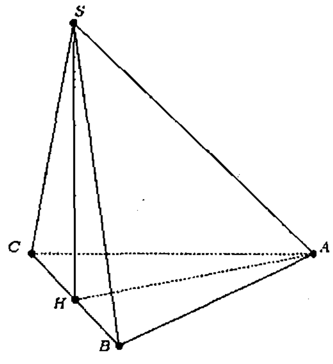
$$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{2}.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$$

Vậy, thể tích khối chóp là:
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{6}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.
Vậy đáp án là là C.

VÍ DỤ 5.10. *Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác SBC là tam giác đều cạnh a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

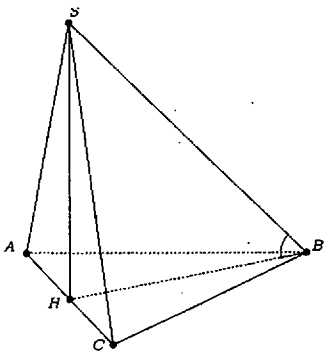
GIẢI.
Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH\perp BC$.
Ta có: mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SH\perp BC \Rightarrow SH\perp(ABC)$.
Vì ΔSBC đều cạnh a nên $BC = a$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét tam giác ABC vuông cân tại A có:
$BC = a \Rightarrow AB = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2}{4}$.
Vậy, thể tích khối chóp là:
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.
Vậy đáp án là là D.



VÍ DỤ 5.11. *Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác SAC là tam giác cân tại S. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

GIẢI.



Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow SH \perp AC$.

Ta có: mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBH} \Rightarrow \widehat{SBH} = 60^0$.

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow$

$BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có:

$$SH = BH.\tan\widehat{SBH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$$

Vậy, thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.12. *Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.*

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{5}$ C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{9}$

GIẢI.

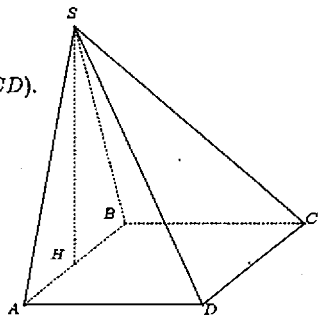
Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB)$.

Ta có: mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow AB = 2a$ và $S_{ABCD} = 4a^2$. Tam giác SAB có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác SAB vuông tại S.

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.4a^2 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy đáp án là là A.

Dạng 2: Tính thể tích của một khối lăng trụ

Phương pháp giải:

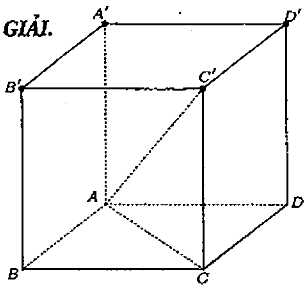
- Xác định đường cao của khối lăng trụ, các loại giả thiết về góc, tính độ dài đường cao và diện tích đa giác đáy. Từ đó áp dụng công thức tính thể tích của khối lăng trụ.

- **Chú ý:** Một số hình lăng trụ đặc biệt:
  - Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
  - Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
  - Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.
  - Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
  - Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
  - Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông.

VÍ DỤ 5.13 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = a\sqrt{3}$.*

A. a^3 B. $3a^3$ C. $3\sqrt{3}a^3$ D. $3\sqrt{6}a^3$

GIẢI.



Đặt cạnh của khối lập phương là x $(x > 0)$.
Suy ra: $CC' = x$ và $AC = x\sqrt{2}$.
Xét tam giác ACC' vuông tại C, ta có:

$$AC'^2 = CC'^2 + AC^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$$

Vậy, thể tích khối lập phương là:

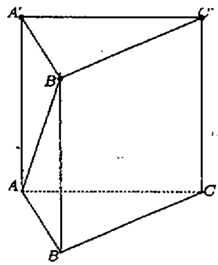
$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$$

Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.14. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, biết rằng chiều cao lăng trụ là $3a$ và mặt bên $(AA'B'B)$ có đường chéo là $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $24a^3$ B. $8a^3$ C. $16a^3$ D. $12a^3$

GIẢI.



Xét tam giác ABA' vuông tại A, ta có:

$$AB'^2 = BB'^2 + AB^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 25a^2 = 9a^2 + AB^2$$
$$\Leftrightarrow \quad AB^2 = 16a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad AB = 4a$$

Ta có: tam giác ABC vuông cân tại A
$\Rightarrow AB = AC = 4a$
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.(4a)^2 = 8a^2$.
Vậy, thể tích khối lăng trụ là:

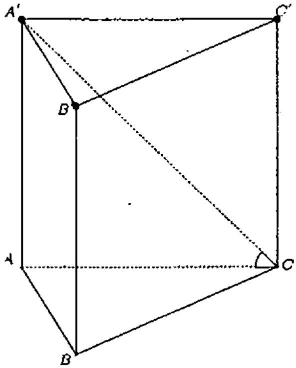
$$V_{ABC.A'B'C'} = 3a.8a^2 = 24a^3$$

Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.15. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Cạnh $A'C$ tạo với đáy một góc bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

GIẢI.



Vì $AA' \perp (ABC)$ nên góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'CA} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 30^0$.
Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow BA = BC = a$
$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$.
Xét tam giác $AA'C$ vuông tại A có:

$$AA' = AC.\tan\widehat{ACA'} = a\sqrt{2}.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy, thể tích khối lăng trụ là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

Vậy đáp án là là C.

VÍ DỤ 5.16. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2$. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. 6 B. $4\sqrt{3}$ C. 3 D. 4

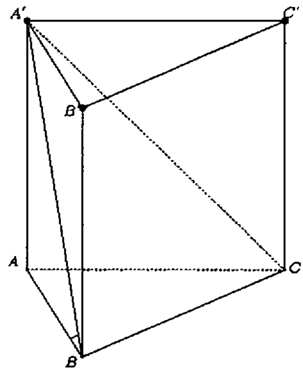
GIẢI.
Ta có: $BC \perp AB$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (ABB'A')$
$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{ABA'} \Rightarrow \widehat{ABA'} = 60^0$.
Xét tam giác $AA'B$ vuông tại A có:

$$AA' = AB.\tan\widehat{ABA'} = 2.\tan 60^0 = 2\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = 2.$
Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3}$$

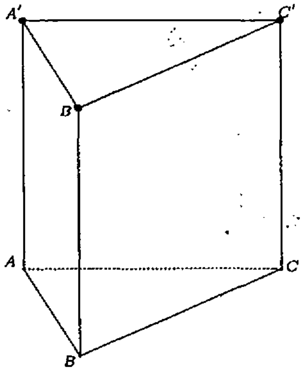
Vậy đáp án là là B.



VÍ DỤ 5.17. *Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $4a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $2\sqrt{3}a^3$ B. $4\sqrt{3}a^3$ C. $3\sqrt{3}a^3$ D. $\sqrt{3}a^3$

GIẢI.



Tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích $ABB'A'$ bằng $4a^2$

$$\Rightarrow AB.AA' = 4a^2 \Rightarrow AA' = 4a$$

Vậy, thể tích khối lăng trụ là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = 4a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^3\sqrt{3}$$

Vậy đáp án là là D.

VÍ DỤ 5.18. *Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Cạnh $A'C$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $\dfrac{3a^3}{4}$ B. $\dfrac{a^3}{4}$ C. $\dfrac{2a^3}{3}$ D. $\dfrac{3a^3}{8}$

GIẢI. Vì $AA' \perp (ABC)$ nên góc giữa $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{ACA'} \Rightarrow \widehat{ACA'} = 60^0$.
Xét tam giác $AA'C$ vuông tại A có:

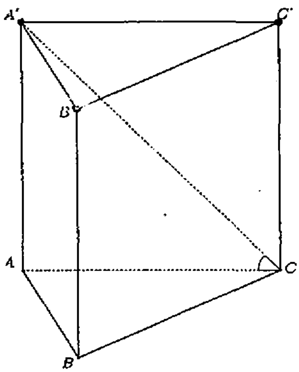
$$AA' = AC.\tan\widehat{ACA'} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$$

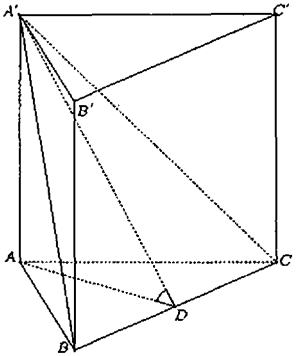
Vậy đáp án là là A.



VÍ DỤ 5.19. *Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

GIẢI.



Gọi D là trung điểm BC.
Ta có: $BC \perp AD$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'D)$
$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{ADA'} \Rightarrow \widehat{ADA'} = 60^0$.
Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra:
$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Xét tam giác $AA'D$ vuông tại A có:

$$AA' = AD.\tan\widehat{ADA'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$$

Vậy, thể tích khối chóp là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$$

Vậy đáp án là là B.

VÍ DỤ 5.20. *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết cạnh bên BB' tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$

GIẢI.

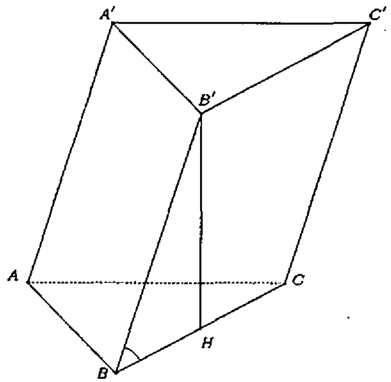
Gọi H là trung điểm của BC.
Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$
$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng BB' với mặt phẳng đáy là $\widehat{B'BH} \Rightarrow \widehat{B'BH} = 60^0$.
Xét tam giác ABC vuông tại A có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4a^2 = a^2 + AC^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 3a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$$

Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Xét tam giác $B'BH$ vuông tại H có:

$$B'H = BH.\tan\widehat{B'BH} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}.$$

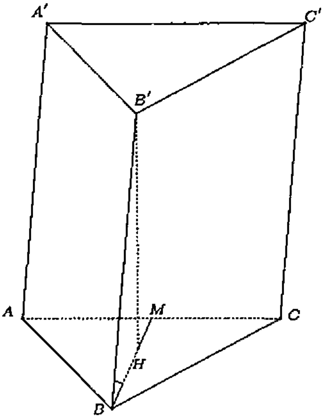


Vậy, thể tích khối chóp là: $V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$.
Vậy đáp án là là C.

VÍ DỤ 5.21. *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của tam giác ABC. Biết cạnh bên BB' tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.*

A. $2a^3\sqrt{3}$ B. $3a^3\sqrt{3}$ C. $4a^3\sqrt{3}$ D. $6a^3\sqrt{3}$

GIẢI.



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC
$\Rightarrow B'H \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên BB' và mặt phẳng đáy (ABC) là $\widehat{B'BH}$.
$\Rightarrow \widehat{B'BH} = 60^0$.
Gọi M là trung điểm AC.
Ta có: tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$
$\Rightarrow S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$ và $BM = a\sqrt{3}$
$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác $BB'H$ vuông tại H có:

$$B'H = BH.\tan\widehat{B'BH} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^0 = 2a$$

Vậy, thể tích khối chóp là:
$V_{ABC.A'B'C'} = 2a.a^2\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$.
Vậy đáp án là là A.

Dạng 3: Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện

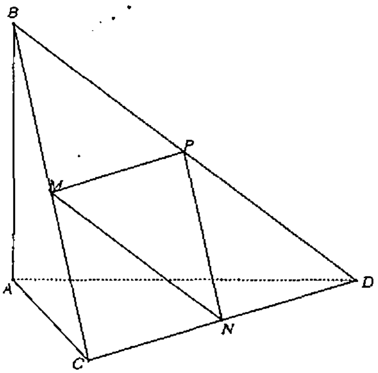
Phương pháp giải: Một số dạng tỉ số thể tích của hai khối chóp

- **Loại 1:** Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C'. Khi đó:
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$
- **Loại 2:** Cho khối chóp $S.ABC$ và một điểm S'. Khi đó:
$$\frac{V_{S'.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{S'H'}{SH} = \frac{d(S';(ABC))}{d(S;(ABC))}$$
  – Nếu $S'S \parallel (ABC)$ thì $\frac{d(S';(ABC))}{d(S;(ABC))} = 1$.
  – Nếu $S'S \cap (ABC) = M$ thì $\frac{d(S';(ABC))}{d(S;(ABC))} = \frac{S'M}{SM}$.
- **Loại 3:** Cho hai hình chóp $S.ABC$ và $S'.A'B'C'$. Khi đó:
$$\frac{V_{S'.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S'.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}.\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$$

VÍ DỤ 5.22 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = 6a$, $AC = 7a$, $AD = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích tứ diện $AMNP$.*

A. $6a^3$ *B.* $14a^3$ *C.* $12a^3$ *D.* $7a^3$

GIẢI.



Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AD.S_{ABC} = \frac{1}{6}.AB.AC.AD$

$= \frac{1}{6}.6a.7a.4a = 28a^3$

Theo giả thiết: M, N, P cùng thuộc mặt phẳng (BCD) suy ra khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (MNP) chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do đó, hai hình chóp $A.MNP$ và $A.BCD$ cùng đường cao.

Mặt khác:

$S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{BCD} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{4}V_{A.BCD}$.

Vậy, thể tích tứ diện $AMNP$ là:

$V_{AMNP} = \frac{1}{4}.28a^3 = 7a^3$.

Vậy đáp án là là D.

VÍ DỤ 5.23. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Tính thể tích $CMNP$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ *B.* $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ *C.* $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ *D.* $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$

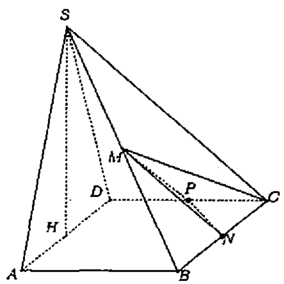
GIẢI.

Mặt khác:

$$\frac{V_{M.CNP}}{V_{S.CNP}} = \frac{d(M,(CNP))}{d(S,(CNP))} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2}$$

Suy ra,

$$V_{CMNP} = \frac{1}{2}.V_{S.CNP} = \frac{1}{2}.\frac{a^3\sqrt{3}}{48} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

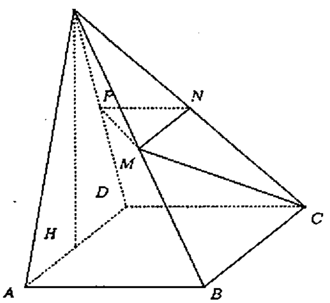


Vậy đáp án là là B.

VÍ DỤ 5.24. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD. Tính thể tích tứ diện $CMNP$.*

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$

GIẢI.



Kẻ $SH \perp AD$ ($H \in AD$).
Ta có $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
ΔSAD đều có cạnh $AD = a \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra, thể tích hình chóp $S.BCD$ là:

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Mặt khác:

$$\frac{V_{C.MNP}}{V_{S.MNP}} = \frac{d(C,(MNP))}{d(S,(MNP))} = \frac{CN}{SN} = 1$$

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.\frac{SP}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

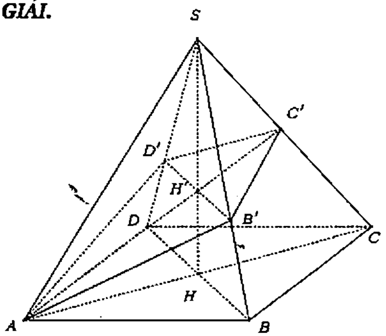
Suy ra: $V_{CMNP} = \dfrac{1}{8}.V_{S.BCD} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Vậy đáp án là là D.

VÍ DỤ 5.25. *Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Biết $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.*

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{4}$

GIẢI.



Gọi H là tâm của $ABCD$ suy ra SH là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, SH cắt (P) tại H'.
Vì $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ nên $BD \parallel (P)$.
Từ đó suy ra (P) cắt (SBD) theo giao tuyến $B'D'$ song song với BD.
Do đó: $\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SH'}{SH} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow H'$ là trọng tâm của tam giác SAC
$\Rightarrow C'$ là trung điểm của SC.
Ta có:

$$\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{4}{9}$$

và

$$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD} = \frac{2}{9}.$$

Suy ra: $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right).\frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{3}.V_{S.ABCD}$.

Vậy đáp án là là C.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 5.1. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

BÀI TẬP 5.2. Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a, $SC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

BÀI TẬP 5.3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, $AC = 2AB = 2a$, $SD = a\sqrt{5}$, SA vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $a^3\sqrt{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

BÀI TẬP 5.4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; $SC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. a^3 D. $\frac{a^3}{3}$

BÀI TẬP 5.5. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ và mặt bên là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{7}}{36}$

BÀI TẬP 5.6. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ và mặt bên là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

BÀI TẬP 5.7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Gọi H là trung điểm của AB biết rằng $SH\perp(ABCD)$ và tam giác SAB là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3}{3}$

BÀI TẬP 5.8. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Biết rằng góc giữa SB và (ABC) bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

BÀI TẬP 5.9. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết rằng SB hợp với đáy một góc 30^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3}{12}$

BÀI TẬP 5.10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AC = 2AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SO và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. a^3 D. $\frac{a^3}{3}$

BÀI TẬP 5.11. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng tam giác SAB đều.

A. $9a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $9a^3$ D. $\frac{9a^3}{2}$

BÀI TẬP 5.12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2a$, $AC = 3a$. Gọi H là trọng tâm tam giác ABD, biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. a^3 B. $2a^3$ C. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$

BÀI TẬP 5.13. Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $(A'BC)$ hợp với đáy một góc 30^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

BÀI TẬP 5.14. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt $(A'BC)$ hợp với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

BÀI TẬP 5.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$. SA vuông góc với mp$(ABCD)$. Gọi I là giao điểm của BM và AC với M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Tính thể tích tứ diện $AINB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

BÀI TẬP 5.16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a với $\widehat{BAD} = 60^0$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 5.1. Xét tam giác ABC vuông ở B có $AC = a\sqrt{3}$ và $AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAC vuông ở A có $AC = a\sqrt{3}$ và $SC = a\sqrt{6} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.2. Xét tam giác SAC vuông ở A có $AC = a$ và $SC = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.
Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.3. Xét ΔABD vuông tại A có: $AB = a$ và $BD = AC = 2a \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.
Xét tam giác SAD vuông ở A có $AD = a\sqrt{3}$ và $SD = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.4. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a nên $AC = a\sqrt{2}$ và $S_{ABCD} = a^2$.
Xét tam giác SAC vuông ở A có $AC = a\sqrt{2}$ và $SC = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = a$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{3}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.5. Gọi O là tâm của tam giác ABC, M là trung điểm $BC \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp.
Vì ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ nên $AM = \frac{3a}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = a$.
Xét tam giác SAO vuông ở O có $AO = a$ và $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$.
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.6. Gọi O là tâm của tứ giác $ABCD \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp.
Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$ nên $AC = a\sqrt{6}$ và $S_{ABCD} = 3a^2 \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Xét tam giác SAO vuông ở O có $AO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.3a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.7. Vì tam giác SAB đều có cạnh $AB = 2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.(2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.8. Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa SB và mặt đáy là $\widehat{SBA} = 30^0$.
Xét tam giác ABC vuông ở B có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAB vuông ở A có $AB = a$ và $\widehat{SBA} = 30^0 \Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.9. Hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SB và mặt đáy là $\widehat{SBA} = 30^0$.
Xét tam giác SAB vuông ở A có $AB = a$ và $\widehat{SBA} = 30^0 \Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{12}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.10. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SO và mặt đáy là $\widehat{SOA} = 60^0$.
Xét tam giác ABC vuông ở B có $AB = a$; $AC = 2a \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.
Xét tam giác SAO vuông ở A có $AO = \frac{1}{2}AC = a$ và $\widehat{SOA} = 60^0 \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a.a\sqrt{3} = a^3$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.11. Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB)$. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Xét tam giác SAB đều có cạnh $AB = 3a \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2}.(3a)^2 = \frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.12. Vì $SH \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAH} = 45^0$.
Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.
Ta có: H là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.AC = \frac{1}{3}AC = a$.
Xét tam giác ADC vuông tại D có $AC = 3a$, $AD = 2a \Rightarrow DC = a\sqrt{5}$.
Xét tam giác SAH vuông tại H có $AH = a$, $\widehat{SAH} = 45^0 \Rightarrow SH = a$.
Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.2a.a\sqrt{5} = \frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.13. Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'HA} = 30^0$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\widehat{A'HA} = 30^0 \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.14. Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow$ góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'HA} = 45^0$.

Xét tam giác ABC đều cạnh bằng $a \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{A'HA} = 45^0 \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.15. Ta có: $\dfrac{V_{N.AIB}}{V_{S.AIB}} = \dfrac{d(N;(AIB))}{d(S;(AIB))} = \dfrac{NC}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{AINB} = \dfrac{1}{2}V_{S.INB}$.

Mặt khác, vì $AM \parallel BC$ nên theo định lý Talet ta có: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AI = \dfrac{1}{3}AC$

$\Rightarrow S_{AIB} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Suy ra: $V_{S.AIB} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{AIB} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{18} \Rightarrow V_{AINB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.16. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và $I = AC' \cap SO$. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD nên nó cắt mặt phẳng (SBD) theo một giao tuyến song song với $BD \Rightarrow B'D'$ đi qua I và $B'D' \parallel BD$.

Ta có: $I = AC' \cap SO \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó, $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{1}{3}.V_{S.ABCD}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.a^2.\sin 60^0 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Đáp án đúng là B. □

CHUYÊN ĐỀ 5.2
Các bài toán về khoảng cách trong không gian

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các loại khoảng cách trong không gian:

- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

$$d(M;(P)) = MH \text{ với } H \in (P) \text{ sao cho: } MH \perp (P).$$

- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:

$$d(\Delta;(P)) = d(M;(P)) \text{ với } M \text{ là điểm bất kì thuộc } \Delta.$$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:

$$d((P);(Q)) = d(M;(Q)) \text{ với } M \text{ là điểm bất kì thuộc } (P).$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

$$d(a;b) = AB \text{ với } A \in a; B \in b \text{ sao cho } AB \perp a \text{ và } AB \perp b.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp giải:

Cho điểm M và mặt phẳng (P). Ta cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

a) **Phương pháp 1:** Ta cần xác định điểm H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (P), từ đó tính độ dài MH.

- **Dạng 1:** M là chân đường cao O của hình chóp hoặc hình lăng trụ ban đầu
  - Bước 1: Tìm đường thẳng a là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng đáy của hình ban đầu.
  - Bước 2: Xác định mặt phẳng (Q) đi qua M và vuông góc với a.
  - Bước 3: Xác định giao tuyến b của hai mặt phẳng (P) và (Q).
  - Bước 4: Xác định điểm $H \in b$ sao cho $MH \perp b$.
- **Dạng 2:** M khác chân đường cao O của hình chóp hoặc hình lăng trụ ban đầu
  Sử dụng **kĩ thuật đổi đỉnh** để chuyển từ việc tính khoảng cách $d(M;(P))$ sang việc tính khoảng cách $d(O;(P))$.
  - Trường hợp 1: nếu $MO \parallel (P)$ thì $d(M;(P)) = d(O;(P))$.
  - Trường hợp 2: nếu $MO \cap (P) = I$ thì $\dfrac{d(M;(P))}{d(O;(P))} = \dfrac{MI}{OI}$.

b) **Phương pháp 2:** Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) chính là đường cao h của hình chóp $M.ABC$. Khi đó:

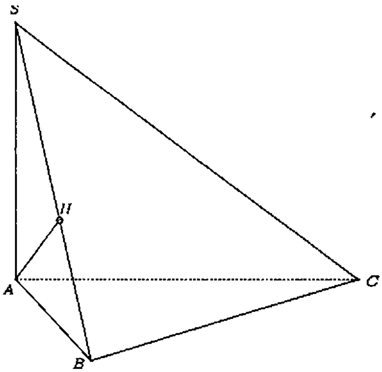
$$V_{MABC} = \frac{1}{3}.h.S_{ABC} = \frac{1}{3}.d\left(M;(ABC)\right).S_{ABC} \Rightarrow d\left(M;(ABC)\right) = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}}.$$

VÍ DỤ 5.26. *Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a$; $BC = 2a$; $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).*

A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

GIẢI.

* <u>Cách 1:</u> Ta sử dụng phương pháp xác định chân đường vuông góc.



Kẻ $AH\perp SB$ $(H \in SB)$.
Ta có: $BC\perp AB$ và $BC\perp SA \Rightarrow BC\perp(SAB)$
$\Rightarrow BC\perp AH$ mà $AH\perp SB \Rightarrow AH\perp(SBA)$.
Suy ra: AH là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).
Xét tam giác SAB vuông tại A, đường cao AH:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$
$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy đáp án là là D.

* <u>Cách 2:</u> Ta sử dụng phương pháp thể tích.
Ta coi khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là đường cao của hình chóp $A.SBC$, khi đó: $d\left(A;(SBC)\right) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}$.

Ta có: $V_{A.SBC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Mặt khác: $BC\perp AB$ và $BC\perp SA \Rightarrow BC\perp(SAB) \Rightarrow BC\perp SB$.
Xét tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Do đó: $S_{SBC} = \frac{1}{2}.SB.BC = \frac{1}{2}2a.2a = 2a^2 \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{3}}{2a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy đáp án là là D.

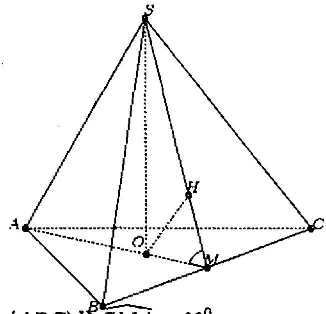
<u>Nhận xét:</u> Mỗi phương pháp có ưu, nhược điểm riêng. Phương pháp 1 tính toán ít nhưng phải vẽ thêm hình còn phương pháp 2 tính toán nhiều hơn nhưng không cần phải vẽ thêm hình. Do đó, tùy vào từng bài toán mà chúng ta chọn phương pháp giải cho phù hợp.

VÍ DỤ 5.27. *Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)?*

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3a}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

GIẢI.

* Cách 1: Ta sử dụng phương pháp xác định chân đường vuông góc.



Gọi O là tâm của tam giác ABC, M là trung điểm $BC \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp $S.ABC$.
Vì A không phải là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$ nên ta sử dụng kĩ thuật đổi đỉnh:

$$\frac{d(A;(SBC))}{d(O;(SBC))} = \frac{AM}{OM} = 3$$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = 3d(O;(SBC))$.
Kẻ $OH \perp SM$ $(H \in SM)$.
Ta có: $BC \perp AM$ và $BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp OH$ mà $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SBC)$.
Suy ra: OH là khoảng cách từ O đến (SBC).
Vì $BC \perp (SAM)$ nên góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA} = 60^0$.

Tam giác ABC đều cạnh bằng $a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác OHM vuông tại H có: $OH = OM.\sin\widehat{OMH} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sin 60 = \frac{a}{4}$.

Vậy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là: $d(A;(SBC)) = 3d(O;(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

Vậy đáp án là là B.

* Cách 2: Ta sử dụng phương pháp thể tích.
Ta coi khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là đường cao của hình chóp $A.SBC$, khi đó: $d(A;(SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}$.
Xét tam giác SOM vuông tại O ta có:

$$SO = OM.\tan\widehat{OMS} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60 = \frac{a}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Thể tích khối chóp $A.SBC$ là: $V_{A.SBC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABC} == \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

và diện tích tam giác SBC là: $S_{SBC} = \frac{1}{2}.SM.BC = \frac{1}{2}.\frac{a}{\sqrt{3}}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra: khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là: $d(A;(SBC)) = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}} = \frac{3a}{4}$.

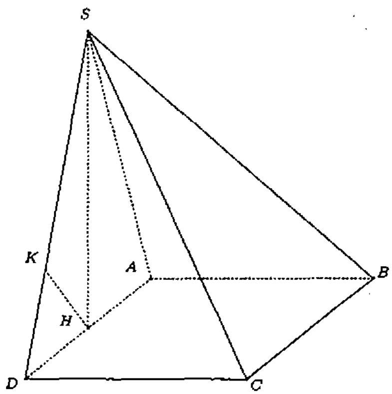
Vậy đáp án là là B.

VÍ DỤ 5.28 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).*

A. $\frac{2a}{3}$ B. $\frac{4a}{3}$ C. $\frac{8a}{3}$ D. $\frac{3a}{4}$

GIẢI.

* <u>Cách 1:</u> Ta sử dụng phương pháp xác định chân đường vuông góc.



Kẻ $SH \perp AD$ $(H \in AD) \Rightarrow H$ là trung điểm AD.
Mặt bên (SAD) vuông góc với đáy $(ABCD) \Rightarrow$ SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.
Vì B không phải là chân đường cao của hình chóp $S.ABCD$ nên ta sử dụng kĩ thuật đổi đỉnh:

$$d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD)).$$

Kẻ $HK \perp SD$ $(K \in SD)$.
Ta có: $CD \perp AD$ và $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SAD)$
$\Rightarrow CD \perp HK$ mà $HK \perp SD \Rightarrow HK \perp (SCD)$.
Suy ra: HK là khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).
Mặt khác: $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2} \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $S_{ABCD} = 2a^2$.
Vì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{4a^3}{3}$ nên

$$SH = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3.\frac{4}{3}a^3}{2a^2} = 2a.$$

Xét tam giác SHD vuông tại H với đường cao HK, ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}$$

Vậy, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là: $d(B;(SCD)) = 2.\frac{2a}{3} = \frac{4a}{3}$.

Vậy đáp án là là B.

* <u>Cách 2:</u> Ta sử dụng phương pháp thể tích.

Ta coi khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là đường cao của hình chóp $B.SCD$, khi đó: $d(B;(SCD)) = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}}$.

Ta có: $V_{B.SCD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}.\frac{4a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$.

Xét tam giác SHD vuông tại H ta có: $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Vì $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên $S_{SCD} = \frac{1}{2}.CD.SD = \frac{1}{2}.\frac{3a}{\sqrt{2}}.a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}$.

Suy ra: khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là:

$$d(B;(SCD)) = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{3.\frac{2}{3}a^3}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{4a}{3}.$$

Vậy đáp án là là B.

Dạng 2: **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

Phương pháp giải:

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Ta cần tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

a) **Trường hợp 1:** Nếu a và b vuông góc với nhau thì ta xác định đoạn vuông góc chung AB của hai đường thẳng, từ đó tính độ dài AB.

- Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a.
- Bước 2: Xác định giao điểm $A = a \cap (P)$.
- Bước 3: Xác định điểm $B \in b$ sao cho $AB \perp b$.

b) **Trường hợp 2:** Nếu a và b không vuông góc với nhau thì ta dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a. Khi đó: $d(a;b) = d(a;(P))$.

VÍ DỤ 5.29. *Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.*

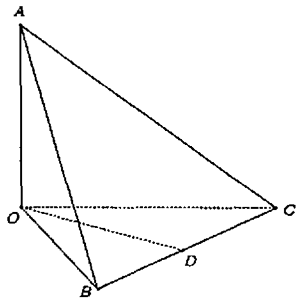
A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

GIẢI.

Gọi D là trung điểm của $BC \Rightarrow OD \perp BC$.
Vì $OA \perp OB$ và $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OD$.
Suy ra: OD là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng OA và $BC \Rightarrow OD = d(OA; BC)$.
Xét tam giác OBC vuông cân tại O ta có:

$$OD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy, khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC là: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



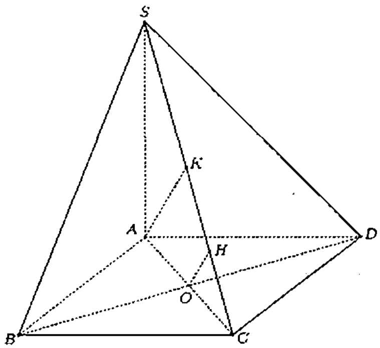
Vậy đáp án là là A.

VÍ DỤ 5.30. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.*

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

GIẢI. Kẻ $OH \perp SC$ ($H \in SC$).
Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$.
Suy ra: OH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $SC \Rightarrow OH = d(BD; SC)$.
Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.
Kẻ $AK \perp SC$ $K \in SC$.
Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$$



$\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $OH \parallel AK$ và O là trung điểm của AC

$\Rightarrow OH$ là đường trung bình của tam giác AKC

$\Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy đáp án là là B.

VÍ DỤ 5.31. *Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và OC.*

A. $\dfrac{a}{3}$ B. $\dfrac{4a}{5}$ C. $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$ D. $\dfrac{3a}{4}$

GIẢI.

Kẻ $ID \parallel OC$ $(D \in OB)$.

$\Rightarrow d(AI; OC) = d(OC; (ADI)) = d(O; (ADI))$.

Kẻ $OH \perp AD$ $(H \in AD)$.

Ta có: $ID \parallel OC$ và $OC \perp OB \Rightarrow ID \perp OB$ mà $ID \perp OA \Rightarrow ID \perp (AOB) \Rightarrow ID \perp OH$ mà $OH \perp AD$ $\Rightarrow OH \perp (ADI) \Rightarrow OH$ là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ADI).

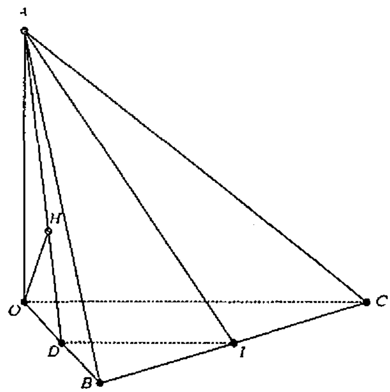
Xét tam giác AOD vuông tại O, đường cao OH ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{5}{a^2}.$$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy khoảng cách giữa AI và OC là: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

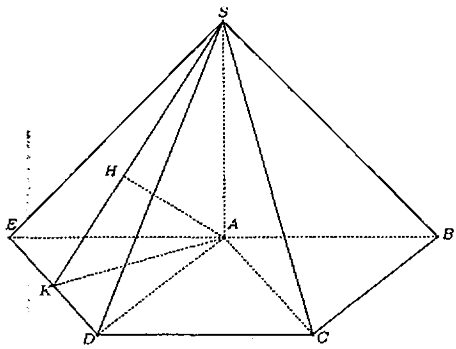
Vậy đáp án là là C.



VÍ DỤ 5.32. *Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.*

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

GIẢI.



Kẻ $DE \parallel AC$ $(E \in AB)$.
Suy ra: $d(AC;SD) = d(AC;(SDE)) = d(A;(SDE))$.
Kẻ $AK \perp DE$ $(K \in DE)$ và kẻ $AH \perp SK$ $(H \in SK)$.
Ta có: $DE \perp AK$ và $DE \perp SA \Rightarrow DE \perp (SAK)$ $\Rightarrow DE \perp AH$ mà $AH \perp SK \Rightarrow AH \perp (SDE)$ $\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến (SDE).
Ta có: $AE \parallel CD$ và $DE \parallel AC \Rightarrow AEDC$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = CD = a$.
Xét tam giác AED vuông tại A có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Xét tam giác SAK vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy đáp án là là D.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 5.17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ và $AC = AD = 4a, AB = 3a, BC = 5a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD)?

A. $\dfrac{6a}{17}$ B. $\dfrac{\sqrt{6}a}{\sqrt{17}}$ C. $\dfrac{12a}{\sqrt{34}}$ D. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{17}$

BÀI TẬP 5.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $\widehat{BAD} = 120^0$, $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính khoảng cách từ D đến mp(SBC)?

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

BÀI TẬP 5.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết $SD = \dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mp$(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách từ A đến mp(SBD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\dfrac{2a}{3}$ C. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$ D. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

BÀI TẬP 5.20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính khoảng cách từ B đến mp(SAC) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI TẬP 5.21. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông với (ABC), $SA = a$. Tính khoảng cách giữa AB và SC?

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$ D. $\frac{a\sqrt{14}}{7}$

BÀI TẬP 5.22. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông với (ABC), góc giữa SB và đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa AC và SB?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$

BÀI TẬP 5.23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

BÀI TẬP 5.24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mp(SBC) vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 5.17. Kẻ $AK \perp BC$ và $AH \perp DK \Rightarrow AH = d(A; (BCD))$.

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{17}{72a^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{12a}{\sqrt{34}}$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.18. Vì $AD \parallel BC$ nên $d(D; (SBC)) = d(A; (SBC))$.

Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH = d(A; (SBC))$.

Ta có: tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.19. Kẻ $HK \perp BD$ và $HE \perp SK \Rightarrow HE = d(H; (SBD))$.

Ta có: $HK = HB.\sin\widehat{KBH} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HE = \frac{a}{3} \Rightarrow d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = \frac{2a}{3}$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.20. Kẻ $HD \perp AC$ và $HK \perp SD \Rightarrow HK = d(H;(SAC))$.
Vì $BH = SB.\cos\widehat{SBC} = 3a \Rightarrow BC = 4HC \Rightarrow d(B,(SAC)) = 4d(H;(SAC))$.
Ta có: $AC = 5a$; $HC = a \Rightarrow HD = \dfrac{3a}{5} \Rightarrow HK = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14} \Rightarrow d(B;(SAC)) = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.21. Vẽ hình bình hành $ABCD$.
$\Rightarrow d(AB;SC) = d(AB;(SCD)) = d(A;(SCD))$.
Kẻ $AE \perp CD$ và $AH \perp SE \Rightarrow AH = d(A;(SCD))$.
Ta có: $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SA = a \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(AB;SC) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.22. Vẽ hình bình hành $ABDC$.
$\Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SBD)) = d(A;(SBD))$.
Kẻ $AK \perp BD$ và $AH \perp SK \Rightarrow AH = d(A;(SBD))$.
Ta có: $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d(AC;SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Đáp án đúng là C. □

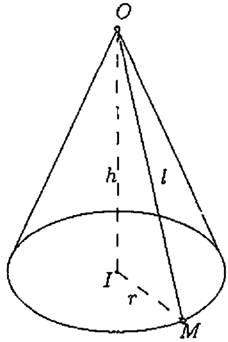
GIẢI BÀI TẬP 5.23. Kẻ đường thẳng d đi qua B và song song với AC.
Kẻ $AM \perp d$ và $AH \perp SM$. $\Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SMB)) = d(A;(SMB)) = AH$.
Ta có: $SA = AC = 2a$ và $AM = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(AC;SB) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.24. Gọi H là trung điểm BC và kẻ $HK \perp SA \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của BC và SA.
Ta có: $AH = \dfrac{a}{2}$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(BC;SA) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Đáp án đúng là D. □

CHƯƠNG 6
KHỐI TRÒN XOAY

CHUYÊN ĐỀ 6.1
Hình nón

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



1. Điểm O được gọi là đỉnh của hình nón.
2. Đường tròn tâm I, bán kính r được gọi là mặt đáy.
3. Độ dài $h = OI$ được gọi là chiều cao của hình nón.
4. Độ dài đoạn thẳng $l = IM$ được gọi là đường sinh của hình nón.
5. Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l$.
6. Thể tích của khối nón tròn xoay là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
7. Giữa r, l, h có mối liên hệ $r^2 + h^2 = l^2$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 6.1. *Một hình nón có đường sinh bằng $2a$ và thiết diện qua trục là tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh S của hình nón và thể tích V của khối nón.*

A. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi a^2, V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2, V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$

C. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi a^2, V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ D. $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2, V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

GIẢI. Do thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông nên ΔOIM vuông cân tại I. Suy ra $h = r = \dfrac{l}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ nên

$$S_{xq} = \pi.a\sqrt{2}.2a = 2\sqrt{2}\pi a^2, V = \frac{1}{3}(a\sqrt{2})^2.a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 6.2. *Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và đáy bằng 60^0, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC là:*

A. $\dfrac{\pi a^2}{6}$ B. $\dfrac{\pi a^2}{4}$ C. $\dfrac{\pi a^2}{3}$ D. $\dfrac{5\pi a^2}{6}$

GIẢI. Gọi 0 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do ΔABC đều cạnh a nên $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ với M là trung điểm của AB. Vì góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0 nên $\widehat{SMO} = 60^0 \Rightarrow SM = 2OM = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Do vậy,

$$S_{xq} = \pi.OM.SM = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2}{6}$$

Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 6.1. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Đẳng thức luôn đúng là:

A. $l = h$ B. $r = h$ C. $l^2 = h^2 + r^2$ D. $r^2 = h^2 + l^2$

BÀI TẬP 6.2. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh ,chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón.Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $l^2 = h^2 + R^2$ B. $\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{R^2}$ C. $R^2 = h^2 + l^2$ D. $l^2 = hr$

BÀI TẬP 6.3. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh ,chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón.Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là:

A. πRh B. πRl C. $2\pi Rl$ D. πR^2h

BÀI TẬP 6.4. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh ,chiều cao và bán kính đáy mặt đáy của hình nón.Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón (N) là:

A. $\pi Rl + \pi R^2$ B. $2\pi Rl + 2\pi R^2$ C. $\pi Rl + 2\pi R^2$ D. $\pi Rh + \pi R^2$

BÀI TẬP 6.5. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh ,chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón.Thể tích V của hình nón (N) là:

A. $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ B. $\pi R^2 h$ C. $\pi R^2 l$ D. $\frac{1}{3}\pi R^2 l$

BÀI TẬP 6.6. Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$ chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $20\pi a^2$ B. $40\pi a^2$ C. $24\pi a^2$ D. $12\pi a^2$

BÀI TẬP 6.7. Cho hình nón có bán kính đáy là $3a$ chiều cao là $4a$. Thể tích của khối nón là:

A. $21\pi a^3$ B. $36\pi a^3$ C. $15\pi a^3$ D. $12\pi a^3$

BÀI TẬP 6.8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ là:

A. $\frac{\pi a^2}{2}$ B. $\frac{3\pi a^2}{2}$ C. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{6}$ D. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$

BÀI TẬP 6.9. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền $2a$. Thể tích của khối nón bằng:

A. πa^3 B. $\frac{2\pi a^3}{3}$ C. $\frac{\pi a^3}{3}$ D. $2\pi a^3$

BÀI TẬP 6.10. Diện tích toàn phần của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\sqrt{3}$ và thiết diện qua trục là tam giác đều là:

A. 12π B. 20π C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

BÀI TẬP 6.11. Hình nón có đường sinh l, góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là 30^0. Diện tích xung quanh của hình nón này là:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{8}$ B. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{6}$ C. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{4}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{2}$

BÀI TẬP 6.12. Trong không gian cho tam giác OAB vuông tại O có $OA = 4, OB = 3$. Khi quay tam giác vuông OAB quanh cạnh góc vuông OA thì đường gấp khúc OAB tạo thành một hình nón tròn xoay. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của khối nón lần lượt là:

A. $15\pi; 24\pi; 12\pi$ A. $15\pi; 24\pi; 6\pi$ A. $15\pi; 24\pi; 14\pi$ A. $15\pi; 24\pi; 2\pi$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 6.1. Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.2. Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.3. $S_{xq} = \pi Rl$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.4. Ta có công thức : $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi Rl + \pi R^2$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.5. Ta có công thức: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.6. Ta có:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi.4a.l = 4a\pi\sqrt{h^2+R^2} = 4a\pi\sqrt{9a^2+16a^2} = 4a.\pi.5a = 20\pi a^2$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.7.

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 9a^2.4a = 12\pi a^3$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.8. O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. M là trung điểm của AB.
Ta dễ có $OM = \frac{a}{\sqrt{2}}; SM = \sqrt{OM^2 + SO^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

$$S_{xq} = \pi.OM.SM = \pi.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.9.

$$R = a; h = a \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3}{3}$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.10. AB là đường kính đáy, 0 là trung điểm của AB. Do thiết diện qua trục là tam giác đều $\Rightarrow AB = AS = BS$. Gọi H là hình chiếu của O lên $SA \Rightarrow OH = \sqrt{3}$. $OH = OA\sin(60^0) \Rightarrow OA = 2; SA = AB = 2OA = 4$

$$S_{tp} = \pi.2.4 + \pi.2^2 = 12\pi$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.11.

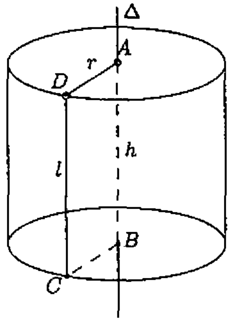
$$R = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{xq} = \frac{\pi.\sqrt{3}l^2}{2}$$

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.12. Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.
Đáp án đúng là A. □

CHUYÊN ĐỀ 6.2
Mặt trụ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



1. Đường tròn tâm A, bán kính r và đường tròn tâm B, bán kính r được gọi là hai đáy của hình trụ.

2. Độ dài $l = CD$ được gọi là đường sinh của hình trụ.

3. Độ dài $h = AB$ được gọi là chiều cao của hình trụ.

4. Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = \pi r l$..

5. Thể tích của khối nón tròn xoay là $V = \pi r^2 h$.

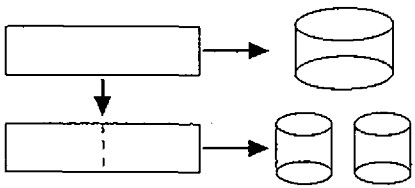
6. Giữa l, h có mối liên hệ $h = l$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 6.3 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước* $50cm \times 240cm$*, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai các sau (xem hình minh họa dưới đây):*

- *Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.*
- *Cách 2: Cắt tấm tôn thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.*

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$ C. $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$ D. $\dfrac{V_1}{V_2} = 4$

GIẢI. Chu vi đáy hình trụ theo cách 1 là $2\pi r_1 = 240$.

Chu vi đáy hình trụ theo cách 2 là $2\pi r_2 = 120$. Do đó $r_1 = 2r_2$. Suy ra

$$V_1 = \pi r_1^2.h; V_2 = 2\pi r_2^2.h \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2.$$

Vậy đáp án đúng là C. □

VÍ DỤ 6.4 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.*

A. $S_{tp} = 4\pi$ *B.* $S_{tp} = 2\pi$ *C.* $S_{tp} = 6\pi$ *D.* $S_{tp} = 10\pi$

GIẢI. Đường sinh của hình trụ là $l = AB = 1$, bán kính mặt đáy là $r = \frac{AD}{2} = 1$. Do đó diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi l + 2\pi r = 4\pi.$$

Vậy đáp án đúng là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 6.13. Gọi h, R lần lượt là độ dài chiều cao và bán kính đáy của hình trụ đứng (T). Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ (T) là

A. $S_{xq} = 2\pi Rh$ B. $S_{xq} = \pi Rh$ C. $S_{xq} = \frac{1}{2}\pi Rh$ D. $S_{xq} = \pi R^2 h$

BÀI TẬP 6.14. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là

A. $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$ B. $S_{tp} = \pi Rh + \pi R^2$

C. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$ D. $S_{tp} = \pi R^2 h + \pi R^2$

BÀI TẬP 6.15. Gọi h, r lần lượt là độ dài chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thể tích V của khối trụ (T) là:

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$ B. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ C. $V = 4\pi R^3$ D. $V = \pi R^2 h$

BÀI TẬP 6.16. Cho hình trụ đứng có bán kính đáy 5 cm, chiều cao 4 cm.Diện tích toàn phần của hình trụ này là:

A. $90\pi(cm^2)$ B. $92\pi(cm^2)$ C. $94\pi(cm^2)$ D. $96\pi(cm^2)$

BÀI TẬP 6.17. Cho hình trụ có bán kính đáy 6 cm, chiều cao 10 cm.Thể tích của hình trụ là:

A. $320\pi(cm^3)$ B. $360\pi(cm^3)$ C. $340\pi(cm^3)$ D. $300\pi(cm^3)$

BÀI TẬP 6.18. Hình trụ (T) được sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB. Biết $AC = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{ACB} = 45^0$. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là:

A. $S_{tp} = 16\pi a^2$ B. $S_{tp} = 8\pi a^2$ C. $S_{tp} = 12\pi a^2$ D. $S_{tp} = 24\pi a^2$

BÀI TẬP 6.19. Cho hình trụ đứng có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3}{2}R$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ với mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$

BÀI TẬP 6.20. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a\sqrt{3}$.Thể tích của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ này là:

A. $6\pi a^3$ B. $4\pi a^3$ C. $2\pi a^3$ D. $8\pi a^3$

BÀI TẬP 6.21. Cho hình trụ có bán kính R. AB, CD lần lượt là hai dây cung song song với nhau và nằm trên hai đường tròn đáy có cùng độ dài bằng $R\sqrt{2}$. Mặt phẳng $(ABCD)$ không song song và cũng không chứa trục của hình trụ. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình gì ?

A. Hình chữ nhật B. Hình bình hành C. Hình vuông D. Hình thoi

BÀI TẬP 6.22. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Khi đó thể tích của khối trụ nội tiếp lăng trụ sẽ bằng:

A. $\frac{\pi ha^2}{2}$ B. $\frac{\pi ha^2}{3}$ C. $\frac{2\pi ha^2}{9}$ D. $\frac{4\pi ha^2}{3}$

BÀI TẬP 6.23. Thiết diện qua trục của hình trụ (T) là một hình vuông có cạnh bằng a. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ (T) là:

A. πa^2 B. $\frac{1}{2}\pi a^2$ C. $2\pi a^2$ D. a^2

BÀI TẬP 6.24. Một hình trụ (T) có diện tích xung quanh bằng 4π và thiết diện qua trục của hình trụ này là một hình vuông. Diện tích toàn phần của (T) là:

A. 8π B. 12π C. 10π D. 6π

BÀI TẬP 6.25. Một hình trụ đứng có bán kính bằng 5 cm và chiều cao bằng 7 cm. Cắt khối trụ bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Diện tích thiết diện tạo bởi khối trụ và mặt phẳng bằng:

A. 52 cm^2 B. 54 cm^2 C. 56 cm^2 D. 58 cm^2

BÀI TẬP 6.26. Cho hình trụ đứng có bán kính R; AB; CD lần lượt là hai dây cung song song với nhau nằm trên hai đường tròn đáy có cùng độ dài là $R\sqrt{2}$. Mặt phẳng $(ABCD)$ không song song và cũng không chứa trục của hình trụ , góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy bằng 30^0. Thể tích khối trụ bằng:

A. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{6}}{3}$ B. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{6}}{2}$ C. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\dfrac{\pi R^2\sqrt{2}}{3}$

BÀI TẬP 6.27. Một hình trụ có chu vi của đường tròn đáy $4\pi a$, chiều cao a. Thể tích của khối trụ này bằng:

A. $4\pi a^3$ B. $2\pi a^3$ C. $16\pi a^3$ D. $\frac{4}{3}\pi a^3$

BÀI TẬP 6.28. Hình trụ có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}$ và thể tích bằng 24π. Chiều cao hình trụ này bằng:

A. 1 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

BÀI TẬP 6.29. Một khối trụ có thể tích bằng 20. Nếu tăng bán kính đường tròn đáy lên hai lần thì thể tích của khối trụ mới là:

A. 60 B. 40 C. 80 D. 120

BÀI TẬP 6.30. Một hình trụ có đường kính đáy bằng với chiều cao của nó. Hỏi nếu thể tích của khối trụ bằng $\dfrac{2}{\pi}$ thì chiều cao của hình trụ là bao nhiêu?

A. $\sqrt[3]{24}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt[3]{4}$

BÀI TẬP 6.31. Cho hình trụ nội tiếp trong hình lập phương có cạnh bằng x. Tỷ số thể tích của khối trụ và khối lập phương trên là:

A. $\dfrac{\pi}{4}$ B. $\dfrac{\pi}{2}$ C. $\dfrac{\pi}{12}$ D. $\dfrac{2}{3}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 6.13. Hình trụ đứng có độ dài đường sinh $l = h$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.14. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.15. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.16. Hình trụ đứng có $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.17. Hình trụ có $V = \pi R^2 h$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.18. $ABCD$ là hình vuông, $h = AB = BC = r = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$.

Hình trụ có $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.19. Thiết diện là hình chữ nhật có 1 cạnh bằng chiều cao h của khối trụ, cạnh còn lại là độ dài dây cung của hình tròn bán kính R cách tâm một khoảng bằng $\dfrac{R}{2}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.20. Mặt đáy của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Bán kính của đường tròn này là $R = \dfrac{1}{2}BC = a\sqrt{3}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.21. *Đáp án đúng là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.22. Mặt đáy của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Bán kính của đường tròn này là $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Đường cao khối trụ là h.

Thể tích khối trụ : $V = \pi R^2 h$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.23. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.24. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.25. *Đáp án đúng là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.26. Đường cao khối trụ là $h = R\sqrt{3}.\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối trụ : $V = \pi R^2 h$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.27. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.28. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.29. Khối trụ có $V = \pi R^2 h$. Nếu tăng bán kính lên 2 lần thì thể tích khối trụ sẽ tăng lên 4 lần.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.30. Chu vi đường tròn đáy bằng chiều cao h. Bán kính $R = \dfrac{h}{2\pi}$. Thể tích $V = \dfrac{h^3}{4\pi}$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.31. Bán kính đường tròn đáy của trụ là $R = \dfrac{\pi}{2}$.
Đáp án đúng là A. □

CHUYÊN ĐỀ 6.3

Mặt cầu

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt cầu $S(O;R)$ là tập hợp các điểm M thỏa mãn $OM = R$.

2. $OH_1 < R$ thì (P_1) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính r thỏa mãn

$$r = \sqrt{R^2 - OH_1^2}.$$

3. $OH_2 = R$ thì (P_2) tiếp xúc (S), (P_2) được gọi là tiếp diện của (S).

4. $OH_3 > R$ thì (P_3) không cắt (S).

5. $OK_1 < R$ thì Δ_1 cắt (S) theo dây cung AB thỏa mãn

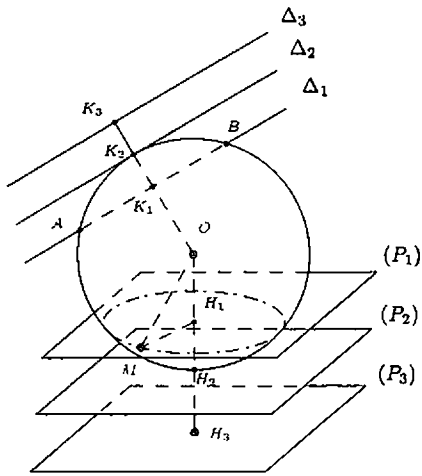
$$\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - OK_1^2}.$$

6. $OK_2 = R$ thì Δ_2 tiếp xúc (S), Δ_2 được gọi là tiếp tuyến của (S).

7. $OK_3 > R$ thì Δ_3 không cắt (S).

8. Mặt cầu (S) có bán kính R, khi đó thể tích và diện tích của (S) là

$$S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

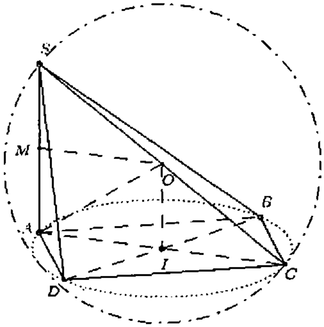


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 6.5. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD*

A. $S = \pi a^2$ B. $V = \frac{4}{3}\pi a^2$ C. $V = 4\pi a^2$ D. $V = 2\pi a^2$

GIẢI. Gọi I là tâm của đáy $ABCD$ và M là trung điểm SA. Tâm của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là O là giao điểm của mặt phẳng trung trực của SA và đường thẳng qua I và vuông góc với đáy $(ABCD)$.



Do $SA \perp (ABCD)$ nên $OIAM$ lập thành một hình chữ nhật. Ta có

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

nên $AM = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Lại có $ABCD$ là hình vuông nên tâm I của đáy là giao điểm hai đường chéo AC, BD. Do đó

$$AI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp:

$$R = OA = \sqrt{AM^2 + AI^2} = a$$

Do vậy diện tích mặt cầu là $V = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Vậy đáp án đúng là C.

VÍ DỤ 6.6 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.*

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ D. $V = \frac{5\pi}{3}$

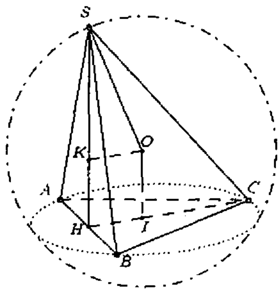
GIẢI. Gọi I, K là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và SAB. Khi đó tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của hai đường thẳng qua I vuông góc với (ABC) và đường thẳng qua K vuông góc với (SAB).

Do ΔSAB đều và $(SAB) \perp (ABC)$ nên $OKIH$ là hình chữ nhật với H là trung điểm AB. Mặt khác,

$$SH = CH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nên $SK = \frac{2}{3}SH = \frac{\sqrt{3}}{3}, OK = HI = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{6}$
Suy ra bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

$$R = \sqrt{SK^2 + OK^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$



Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}.$

Vậy đáp án đúng là B.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 6.32. Diện tích của mặt cầu có bán kính R là:

A. $4\pi R^2$ B. $2\pi R^2$ C. $2\pi R^3$ D. $4\pi R^3$

BÀI TẬP 6.33. Thể của hình cầu có bán kính R là:

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$ B. $4\pi R^3$ C. $2\pi R^3$ D. $\frac{3}{4}\pi R^3$

BÀI TẬP 6.34. Khi tăng bán kính của hình cầu lên 2 lần thì thể tích hình cầu đó tăng hoặc giảm bao nhiêu lần?

A. Tăng 8 lần B. Tăng 4 lần C. Giảm 4 lần D. Tăng 8 lần

BÀI TẬP 6.35. Cho điểm M thuộc mặt cầu (C) tâm O bán kính R. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu với bán kính $r < R$ tiếp xúc với mặt cầu (C) tại điểm M?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

BÀI TẬP 6.36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = a; AB = b, AC = c$. Mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, S, C có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$ B. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ C. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

BÀI TẬP 6.37. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

BÀI TẬP 6.38. Trong các đa diện sau đây, đa diện nào không luôn luôn nội tiếp được trong một mặt cầu?

A. Tứ diện B. Hình chóp ngũ giác đều

C. Hình hộp chữ nhật D. Chóp tứ giác

BÀI TẬP 6.39. Cho hình trụ có bán kính bằng r. Gọi $O; O'$ lần lượt là tâm hai đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu (C) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào sai?

A. Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

B. Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

C. Thể tích khối cầu bằng $\frac{3}{4}$ lần thể tích khối trụ.

D. Thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ lần thể tích khối trụ.

BÀI TẬP 6.40. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào sai ?

A. Bất kì một hình tứ diện nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

B. Bất kì một hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

C. Bất kì một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

D. Bất kì một hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

BÀI TẬP 6.41. Một hình nón có bán kính đáy bằng R, đường sinh hợp với đáy một góc 30^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình nón này là :

A. $4\pi R^2$ B. $\frac{8\pi R^2}{3}$ C. $\frac{16\pi R^2}{3}$ D. $3\pi R^2$

BÀI TẬP 6.42. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp một hình hộp luôn là giao điểm của 4 đường chéo hình hộp đó.

B. Có ít nhất hai hình trụ không bằng nhau cùng ngoại tiếp một hình cầu.

C. Các đỉnh của một hình chóp tứ giác cùng nằm trên một mặt cầu nào đó.

D. Mặt cầu là mặt được tạo thành khi quay một đường tròn xung quanh một đường kính bất kì của nó .

BÀI TẬP 6.43. Câu nào dưới đây là sai ?

A. Hình tròn xoay có ít nhất một trục đối xứng.

B. Mặt cầu có vô số trục đối xứng.

C. Hình trụ có duy nhất một tâm đối xứng.

D. Mặt cầu có duy nhất một mặt phẳng đối xứng.

BÀI TẬP 6.44. Cho hai mặt cầu (S_1) tâm O_1, bán kính R_1 và (S_2) tâm O_2 bán kính R_2 $R_1 < R_2$ tiếp xúc ngoài với nhau tại P. Gọi (S_1) là mặt cầu đường kính AB mà A; B là giao điểm của mặt cầu (S_1) và (S_2) vói đường thẳng O_1O_2. Mặt phẳng (α) qua P và vuông góc với O_1O_2 cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Hỏi đường tròn (C)có bán kính là bao nhiêu ?

A. $\sqrt{R_1R_2}$ B. $2\sqrt{R_1R_2}$ C. $\sqrt{2R_1R_2}$ D. Đáp án khác.

BÀI TẬP 6.45. Cho hai điểm A; B cố định, phân biệt và điểm M di động sao cho $MA = 2MB$. Tìm quỹ tích các điểm M như vậy.

A. Mặt phẳng B. Đường tròn

C. Mặt cầu D. Tất các phương án đã cho đều sai

BÀI TẬP 6.46. Cho hình trụ (T) có hai đáy là hai đường tròn $(O), (O')$ tâm O, O' cùng bán kính r. Gọi (S) là hình cầu có đường kính là OO'. Nếu (S)nội tiếp (T) thì hình nón đỉnh O' ,đáy O có diện tích xung quanh bằng :

A. $\dfrac{4\pi r^2\sqrt{5}}{3}$ B. $\dfrac{\pi r^2\sqrt{5}}{3}$ C. $\pi r^2\sqrt{5}$ D. $2\pi r^2\sqrt{5}$

BÀI TẬP 6.47. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P) có $d(O(P)) = R$. M là một điểm tùy ý thuộc (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N. Hình chiếu của O trên (P) là I. Nếu $\widehat{ION} = 60^0$ thì IN bằng :

A. $3R$ B. $R\sqrt{3}$ C. $R\sqrt{2}$ D. $\frac{3}{2}R$

BÀI TẬP 6.48. Trong mặt phẳng (α), cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R và đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại I. (S) là mặt cầu khi quay (C) xung quanh đường thẳng OI. Nhận định nào dưới đây là đúng ?

A. (P) cắt (S) theo một đường tròn B. (P) là tiếp diện của S

C. $d(O;(P)) > R$ D. Tất cả các phương án đã cho đều sai

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 6.32. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.33. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.34. *Đáp án đúng là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.35. Hai mặt cầu tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài mặt cầu (C).
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.36. Lấy M là trung điểm của BC; H là trung điểm của SA. Ta có

$$r = OA = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.37. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.38. Vì với chóp tứ giác có đáy là một tứ giác không nội tiếp thì sẽ không có hình cầu ngoại tiếp tứ giác đó.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.39.

$$\frac{S_{\text{cầu}}}{S_{tptrụ}} = \frac{4\pi.r^2}{2\pi r^2 + 2\pi r.2r} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}.$$

Đáp án đúng là B.

□

GIẢI BÀI TẬP 6.40. Không phải hình hộp nào cũng nội tiếp trong một mặt cầu.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.41. Bán kính mặt cầu là $R' = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Diện tích mặt cầu là

$$S = 4\pi R'^2 = \frac{16\pi R^2}{3}.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.42. *Đáp án đúng là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 6.43. Mọi mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu đều là mặt phẳng đối xứng của mặt cầu.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.44. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có :

$$R^2 = (2R_1).(2R_2) \Rightarrow R = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.45. Gọi C, D là những điểm chi trong và ngoài đoạn AB với tỉ số bằng 2 thì C, D cố định và $\widehat{CMD} = 90^0$. Vậy tập hợp những điểm M là một mặt cầu.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.46. Đáp án là C. Nếu mặt cầu (S) nội tiếp (T) thì đường kính của mặt cầu (S) bằng $2r \Rightarrow OO' = 2r$. Do đó đường sinh của hình nón đỉnh O', đáy (O) là $r\sqrt{5}$. Vậy $S_{xq} = \pi r.r\sqrt{5} = \pi r^2\sqrt{5}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.47. ΔION vuông tại I có $\widehat{ION} = 60^0$ nên $IN = OI.\tan 60^0 = R\sqrt{3}$.
Đáp án đúng là B.

□

GIẢI BÀI TẬP 6.48. Ta thấy $(P) \perp OI$ tại I nên (P) là tiếp diện của (S).
Đáp án đúng là B. □

CHƯƠNG 7
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

CHUYÊN ĐỀ 7.1
Các bài toán về toạ độ điểm và vectơ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau được gọi là *hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz* trong không gian, hay đơn giản là *hệ tọa độ Oxyz*.

- Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục Ox, Oy, Oz.
- O được gọi là *gốc tọa độ*.
- Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng tọa độ*.

2. Tọa độ của vectơ

* Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{u}$ với $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Khi đó, bộ ba số $(x; y; z)$ được gọi là *tọa độ của vectơ* $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và được kí hiệu là: $\vec{u} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{u}(x; y; z)$.
* Các biểu thức tọa độ của vectơ:
  Cho hai vectơ $\vec{u_1} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{u_2} = (x_2; y_2; z_2)$ và hằng số $k \in \mathbb{R}$:
  - $\vec{u_1} = \vec{u_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$
  - $\vec{u_1} \pm \vec{u_2} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$
  - $k\vec{u_1} = (kx_1; ky_1; kz_1)$
  - $\vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{u_1} = k\vec{u_2} \Leftrightarrow x_1 = kx_2; y_1 = ky_2; z_1 = kz_2$
  - $\vec{u_1}.\vec{u_2} = |\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|.\cos(\vec{u_1}; \vec{u_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

- $|\overrightarrow{u_1}| = \sqrt{\overrightarrow{u_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
- $\cos(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}) = \dfrac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
- $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

3. Tọa độ của điểm

* Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M tùy ý với $\overrightarrow{OM} = (x_M; y_M; z_M)$. Khi đó, bộ ba số $(x_M; y_M; z_M)$ được gọi là *tọa độ của điểm M* đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và được kí hiệu là: $M(x_M; y_M; z_M)$.

* Các biểu thức tọa độ của điểm:
Cho bốn điểm: $A(x_A; y_A; z_A)$; $B(x_B; y_B; z_B)$; $C(x_C; y_C; z_C)$; $D(x_D; y_D; z_D)$.

  - $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
  - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
  - Nếu $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$ thì: $x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}$
  - Nếu I là trung điểm của AB thì: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}; z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
  - Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

  - Nếu G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$$

4. Tích có hướng của hai vectơ

* Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$; được kí hiệu $[\vec{u}; \vec{v}]$ hoặc $\vec{u} \wedge \vec{v}$, là một vectơ được xác định bởi:

$$[\vec{u}; \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

* Các tính chất cơ bản:
  - $\left[\vec{0}; \vec{0}\right] = 0$; $\left[\vec{u}; \vec{0}\right] = 0$; $[\vec{u}; \vec{v}] = -[\vec{v}; \vec{u}]$.
  - Véc tơ $[\vec{u}; \vec{v}]$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
  - $|[\vec{u}; \vec{v}]| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}; \vec{v})$.
  - Hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow [\vec{u}; \vec{v}] = \vec{0}$.

* Các ứng dụng của tích có hướng:

  - Ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u};\vec{v}].\vec{w} = 0$.
  - Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì: $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
    Khi đó, $S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
  - Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.
    Khi đó, thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Tìm tọa độ của một vectơ và các yếu tố liên quan**

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa, khái niệm có liên quan đến vectơ và các biểu thức tọa độ.

VÍ DỤ 7.1. *Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (5;7;2)$, $\vec{b} = (3;0;4)$, $\vec{c} = (-6;1;-1)$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.*

A. $\vec{m} = (3;22;-3)$ *B.* $\vec{m} = (3;-3;22)$ *C.* $\vec{m} = (-3;3;22)$ *D.* $\vec{m} = (3;22;3)$

GIẢI. Sử dụng các biểu thức tọa độ của vectơ, ta có:

$$\begin{cases} 3\vec{a} = (15;21;6) \\ -2\vec{b} = (-6;0;-8) \\ \vec{c} = (-6;1;-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3;22;-3)$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.2. *Trong không gian Oxyz, cho bốn vectơ $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (1;-1;2)$, $\vec{c} = (2;2;-1)$ và $\vec{u} = (3;7;-7)$. Hãy biểu diễn vectơ $\vec{u}$ theo **ba** vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - 1\vec{b} + \vec{c}$ *B.* $\vec{u} = \vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

C. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ *D.* $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

GIẢI. Giả sử ta có biểu diễn $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, khi đó:

$$\vec{u} = (2m + n + 2p; m - n + 2p; 2n - p) = (3;7;-7)$$

Suy ra: $\begin{cases} 2m + n + 2p = 3 \\ m - n + 2p = 7 \\ 2n - p = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -3 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

Vậy đáp án là D. □

Dạng 2: Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

VÍ DỤ 7.3. *Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Biết $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, khi đó giá trị của m bằng?*

A. 0 B. 1 C. 2 D. -1

GIẢI. Sử dụng định nghĩa và công thức tính độ dài của một vectơ, ta có:

$$\vec{u} = (m;1;2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{m^2+1^2+2^2} = \sqrt{m^2+5}.$$

Khi đó:

$$|\vec{u}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.4. *Trong Oxyz, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$ và $C(1;-2;2)$. Tính độ dài ba cạnh AB, BC và CA của tam giác.*

A. $\sqrt{19}; \sqrt{3}; 2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}; \sqrt{19}; 2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}; \sqrt{19}; \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}; 2\sqrt{5}; \sqrt{19}$

GIẢI. Sử dụng biểu thức tọa độ của điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1;1;1), \overrightarrow{BC} = (-1;-3;3), \overrightarrow{CA} = (0;2;-4)$$

Do đó:
$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$
$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{19}$$
$$CA = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{0^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.5. *Trong Oxyz, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;-1)$ và $C(4;2;2)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và côsin của góc $\widehat{BAC}$.*

A. 23 và $\frac{23}{6\sqrt{35}}$ B. -27 và $\frac{-9}{2\sqrt{35}}$ C. 27 và $\frac{9}{2\sqrt{35}}$ D. -23 và $\frac{-23}{6\sqrt{35}}$

GIẢI. Sử dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1;5;-2), \overrightarrow{AC} = (5;4;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1.5 + 5.4 + (-2).(-1) = 27.$$

Theo công thức tính góc giữa hai vectơ, ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{27}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}.\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}} = \frac{27}{\sqrt{30}.\sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$$

Vậy đáp án là C. □

Dạng 3: **Tìm tọa độ của điểm đặc biệt**

Phương pháp giải: Sử dụng công thức và các tính chất hình học đặc biệt để tìm mối quan hệ giữa các vectơ, từ đó tìm tọa độ của điểm đặc biệt.

VÍ DỤ 7.6. *Trong $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$ và $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh AC và trọng tâm G của tam giác ABC.*

A. $M(1;-1;0)$ *và* $G(4;-1;1)$

B. $M(1;-1;0)$ *và* $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

C. $M(2;-2;0)$ *và* $G(4;-1;1)$

D. $M(2;-2;0)$ *và* $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

GIẢI. Theo công thức tọa độ của trung điểm và trọng tâm, ta có:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 1; y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = -1; z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 0$$

và $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{4} = \dfrac{4}{3}; y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\dfrac{1}{3}; z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Suy ra: $M(1;-1;0)$ và $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.7. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.*

A. $D(-1;1;1)$ B. $D(2;1;1)$ C. $D(-1;2;1)$ D. $D(1;1;1)$

GIẢI. Gọi tọa độ D là $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (6;-1;1)$ và $\overrightarrow{DC} = (5-x_D;-y_D;2-z_D)$. Theo tính chất hình bình hành, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên:

$$\begin{cases} 5 - x_D = 6 \\ -y_D = -1 \\ 2 - z_D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 1 \\ z_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1;1).$$

Vậy đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 7.1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$, khi đó tọa độ của $\vec{u}$ đối hệ tọa độ $Oxyz$ là:

A. $(2;1)$ B. $(2;0;1)$ C. $(2;1;0)$ D. $(1;0;2)$

BÀI TẬP 7.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (1;1;-1)$ và $\vec{c} = (2;3;0)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

A. $(5;7;0)$ B. $(2;3;1)$ C. $(1;3;1)$ D. $(-2;-1;1)$

BÀI TẬP 7.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (a;b;c)$, khi đó độ dài của $\vec{u}$ được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\sqrt{a+b+c}$ B. $a+b+c$ C. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ D. $a^2+b^2+c^2$

BÀI TẬP 7.4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ được tính theo công thức nào sau đây?

A. $a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$ B. $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

C. $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$ D. $a_1b_3 + a_3b_2 + a_2b_1$

BÀI TẬP 7.5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = \vec{j} - 3\vec{k}$ và $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$. Khi đó, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là?

A. -3 B. -2 C. 3 D. 2

BÀI TẬP 7.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{j} + m\vec{k} + 3\vec{i}$ và $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$. Tìm m để tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 2?

A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

BÀI TẬP 7.7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;1;2)$ và $\vec{b} = (x;0;1)$. Tìm $x > 0$ để $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{26}$?

A. $x = 3$ B. $x = -4$ C. $x = -2$ D. $x = 4$

BÀI TẬP 7.8. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{OM} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{k}$ và $\overrightarrow{ON} = \vec{j} - \vec{k}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN?

A. 3 B. 4 C. $\sqrt{3}$ D. 2

BÀI TẬP 7.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OM} = -\vec{k} - 3\vec{j}$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ. Tìm tọa độ của điểm M'?

A. $(1;-3;0)$ B. $(0;3;1)$ C. $(0;1;3)$ D. $(1;3;0)$

BÀI TẬP 7.10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;2;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(1;0;2)$. Tìm tọa độ đỉnh D?

A. $(1;-1;1)$ B. $(1;1;3)$ C. $(1;-2;-3)$ D. $(-1;1;1)$

BÀI TẬP 7.11. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\overrightarrow{a} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{b} = (-2;-2;0)$ và $\overrightarrow{c} = (-1;1;1)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ B. $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$ D. $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.1. Ta có: $\overrightarrow{u} = 2.\overrightarrow{i} + 0.\overrightarrow{j} + 1.\overrightarrow{k} \Rightarrow \overrightarrow{u} = (2;0;1)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.2. Ta có: $\overrightarrow{d} = (2+1+2;3+1+3;1-1+0) = (5;7;0)$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.3. Ta có: độ dài vectơ $\overrightarrow{u}$ là: $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.4. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là: $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.5. Ta có: $\overrightarrow{u} = (0;1;-3)$ và $\overrightarrow{v} = (1;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -3$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.6. Ta có: $\overrightarrow{u} = (3;2;m)$ và $\overrightarrow{v} = (1;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3 - m = 2 \Rightarrow m = 1$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.7. Ta có: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x+1;1;3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = x^2 + 2x + 11 = 26 \Rightarrow x = 3$ hoặc $x = -5$ (loại).
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.8. Ta có: $M(\sqrt{3});0;-1$ và $N(0;1;-1) \Rightarrow MN = 2$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.9. Ta có: $M(0;-3;-1$ và $O(0;0;0)$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(0;3;1)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.10. Gọi $D(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,(0;-1;-1) = \overrightarrow{DC}\,(1-a;-b;2-c) \Rightarrow D(1;1;3)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.11. Ta có: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (3;3;0) \neq \overrightarrow{c} \Rightarrow$ mệnh đề D sai.
Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 7.2
Các bài toán về phương trình mặt cầu

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình chính tắc

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I\,(a;b;c)$ và bán kính $R>0$ có phương trình chính tắc là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

2. Phương trình tổng quát

Trong không gian $Oxyz$, một mặt cầu (S) bất kì có phương trình tổng quát là:

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \quad (a^2+b^2+c^2-d>0)$$

Khi đó, tâm $I\,(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: **Cho biết phương trình mặt cầu, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó**

Phương pháp giải: Biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình chính tắc:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

VÍ DỤ 7.8. *Trong không gian Oxyz, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình tổng quát sau:* $x^2+y^2+z^2-6x+2y-16z-26=0$.

A. $I(3;-1;8)$, $R=10$ B. $I(-3;1;-8)$, $R=4\sqrt{3}$

C. $I(3;-1;8)$, $R=4\sqrt{3}$ D. $I(-3;1;-8)$, $R=10$

GIẢI. Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết được dưới dạng:

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-16z-26=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-8)^2-100=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-8)^2=10^2$$

Suy ra, mặt cầu đã cho có tâm $I(3;-1;8)$ và bán kính $R=10$.
Vậy đáp án là A. □

Dạng 2: **Lập phương trình mặt cầu khi biết tâm và bán kính của mặt cầu đó**

Phương pháp giải: Sử dụng phương trình chính tắc của mặt cầu.

VÍ DỤ 7.9. *Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB với* $A(4;-3;7)$, $B(2;1;3)$.

A. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=6^2$ B. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=3^2$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=6^2$ D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=3^2$

GIẢI. Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm I của đoạn AB và bán kính $R = \frac{AB}{2}$.
Ta có: $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\frac{4+2}{2}; \frac{-3+1}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (3; -1; 5)$.
Mặt khác, $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{36} = 6$ suy ra $R = 3$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.10. *Trong không gian Oxyz, lập phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ và có tâm $I(3; -3; 1)$.*

A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$ B. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$

C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$ D. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$

GIẢI. Mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A nên bán kính của mặt cầu $R = IA$.
Do đó,

$$R = IA = \sqrt{(3-5)^2 + (-3+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là:

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.11. *Trong không gian Oxyz; Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 4)$ và gốc tọa độ O.*

A. $I(1; 2; 3)$, $R = 2$ B. $I(-1; 2; 4)$, $R = \sqrt{10}$

C. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$, $R = \frac{\sqrt{21}}{2}$ D. $I(-1; 1; 1)$, $R = \sqrt{3}$

GIẢI. Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.
Theo giả thiết, ta có:

$A \in (S) \Rightarrow 1 - 2a + d = 0 \quad (1)$ $B \in (S) \Rightarrow 4 + 4b + d = 0 \quad (2)$

$C \in (S) \Rightarrow 16 - 8c + d = 0 \quad (3)$ $O \in (S) \Rightarrow d = 0 \quad (4)$

Giải hệ phương trình trên ta có: $d = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 2$.
Suy ra, phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$.
Phương trình mặt cầu có thể viết dưới dạng:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{21}}{2}$.
Vậy đáp án là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 7.12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;3;2)$, bán kính $R = 4$ có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 16$ B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$

C. $(x-1) + (y-3) + (z-2) = 16$ D. $(x-1) + (y-3) + (z-2) = 4$

BÀI TẬP 7.13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, đi qua điểm $A(1:1;2)$ có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$

C. $(x-1) + (y-2) + (z-3) = \sqrt{2}$ D. $(x-1) + (y-3) + (z-2) = \sqrt{2}$

BÀI TẬP 7.14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;1)$ và $B(3;1;1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$ B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$

C. $(x-1) + (y-3) + (z-1) = 2$ D. $(x-2) + (y-2) + (z-1) = 2$

BÀI TẬP 7.15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(1;2;1)$, $C(-1;0;-1)$ và $D(0;0;1)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu đi qua bốn điểm này.

A. $I\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ B. $I\left(\frac{3}{2};2;\frac{1}{2}\right)$ C. $I\left(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$ D. $I\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$

BÀI TẬP 7.16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. Chọn phát biểu sai trong các phát biểu sau?

A. Tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R = 4$ B. Điểm $A(1;1;2)$ thuộc mặt cầu.

C. Điểm $B(1;2;1)$ nằm trong mặt cầu. D. Điểm $C(3;1;0)$ nằm ngoài mặt cầu.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.12. Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 16$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.13. Ta có: $R = IA = \sqrt{2}$
$\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.14. Ta có: trung điểm của AB là tâm $I(2;2;1)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là: $(x-2) + (y-2) + (z-1) = 2$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.15. Phương trình tổng quát của mặt cầu có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + d + 4 = 0 \\ 2a + 4b + 2c + d + 6 = 0 \\ -2a - 2c + d + 2 = 0 \\ 2c + d + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

Suy ra: tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.16. Ta có: tâm $I(1; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.
Khi đó, $IC = 2 \Rightarrow C$ thuộc mặt cầu $\Rightarrow$ phát biểu D sai.
Đáp án đúng là D. □

CHUYÊN ĐỀ 7.3
Các bài toán về phương trình mặt phẳng

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng

* Véc tơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng (P).
* **Chú ý:**
  - Một mặt phẳng bất kì có vô số vectơ pháp tuyến.
  - Tất cả các vectơ pháp tuyến của cùng một mặt phẳng cùng phương với nhau.

2. Phương trình mặt phẳng

* Mặt phẳng (P) đi qua một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

* Một mặt phẳng bất kì có **phương trình tổng quát** là:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với điều kiện } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Khi đó: vectơ $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

3. Các trường hợp đặc biệt

* Phương trình các mặt phẳng tọa độ là: $(Oxy): z = 0$; $(Oyz): x = 0$ và $(Ozx): y = 0$.
* Mặt phẳng (P) không đi qua gốc O và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ được gọi là **mặt phẳng theo đoạn chắn** và có phương trình là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Gọi $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2). Khi đó:

- $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$ với k là một số thực.
- $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ được tính bởi công thức:

$$d(M; (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

***Dạng 1:* Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng**

Phương pháp giải:

* **Loại 1.** Viết phương trình mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ và một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (α).
  - Phương trình (α) có dạng: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
  - Khai triển, rút gọn rồi đưa phương trình về dạng tổng quát: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.
* **Loại 2.** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ song song với một vectơ $\vec{a}$ cho trước.
  - Chọn vectơ pháp tuyến của (α) sao cho: $\vec{n} \parallel \vec{a}$.
  - Viết phương trình mặt phẳng (α) theo loại 1.
* **Loại 3.** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cho trước.
  - Chọn vectơ pháp tuyến của (α) sao cho: $\vec{n} \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}$.
  - Viết phương trình mặt phẳng (α) theo loại 1.
* **Loại 4.** Viết phương trình mặt phẳng (α) biết vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ và một điều kiện có liên quan đến mặt phẳng (độ dài đoạn thẳng, khoảng cách,...).
  - Phương trình (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (1).
  - Từ điều kiện của mặt phẳng tìm D.

VÍ DỤ 7.12 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với AB.*

A. $x + y + 2z - 3 = 0$ *B.* $x + 3y + 4z - 7 = 0$

C. $x + y + 2z - 6 = 0$ *D.* $x + 3y + 4z - 26 = 0$

GIẢI. Mặt phẳng (α) vuông góc với AB nên vectơ pháp tuyến $\vec{n_\alpha}$ của (α) song song với $\overrightarrow{AB}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2) \Rightarrow$ ta chọn $\vec{n_\alpha} = (1; 1; 2)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (α) là: $1(x - 0) + 1(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0$.

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.13. *Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-4z-2=0$ và điểm $A(0;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).*

A. $2x+3y-4z+2=0$ *B.* $2x+3y-4z-6=0$

C. $2x+3y-4z-3=0$ *D.* $2x+3y-4z-5=0$

GIẢI. Vì mặt phẳng (β) song song với (α) nên vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}$ của (β) song song với vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α).
Ta có: $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;3;-4) \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n_\beta}=(2;3;-4)$. Suy ra, phương trình mặt phẳng (β) có dạng:

$$2(x-0)+3(y-2)-4(z-0)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+3y-4z-6=0$$

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.14. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;5;-7)$ và song song với giá của hai vectơ $\overrightarrow{a}=(1;-2;3)$ và $\overrightarrow{b}=(3;0;5)$.*

A. $5x-2y-3z-21=0$ *B.* $-5x+2y+3z-21=0$

C. $5x-2y-3z+21=0$ *D.* $-5x+2y+3z+21=0$

GIẢI. Ta có: $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}=(-10;4;6)=-2(5;-2;-3)$.
Do đó, ta chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n}=(5;-2;-3)$. Suy ra, phương trình mặt phẳng (α) là: $5(x-2)-2(y-5)-3(z+7)=0 \Leftrightarrow 5x-2y-3z-21=0$.
Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.15. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$.*

A. $-x-2y-2z-6=0$ *B.* $-x-2y-2z-5=0$

C. $x+2y+2z-3=0$ *D.* $x+2y+2z-6=0$

GIẢI. Vì mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C nên vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Do đó, $\overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(12;24;24) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $1(x-2)+2(y+1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-6=0$.
Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.16. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x-y+2z-1=0$ đồng thời (α) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.*

A. $x-y+2z-2=0$ *B.* $x-y+2z+2=0$

C. $x-y+2z=0$ *D.* $x-y+2z\pm2=0$

GIẢI. Ta có: $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{n_\beta} = (1;-1;2) \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x - y + 2z + D = 0$.
Theo giả thiết, mặt phẳng (α) cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm M, N suy ra $M(-D;0;0)$ và $N(0;D;0)$.
Khi đó, $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{D^2 + D^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2D^2 = 8 \Leftrightarrow D^2 = 4 \Leftrightarrow D = \pm 2$.
Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.17. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-3)$.*

A. $6x - 3y - 2z + 6 = 0$ *B.* $6x - 3y - 2z - 1 = 0$

C. $6x - 3y - 2z - 6 = 0$ *D.* $6x - 3y - 2z + 3 = 0$

GIẢI. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được phương trình mặt phẳng (α) là: $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 6x - 3y - 2z - 6 = 0$.
Vậy đáp án là C. □

Dạng 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp giải: Sử dụng điều kiện song song và vuông góc của hai mặt phẳng.

VÍ DỤ 7.18. *Xác định giá trị của m để mặt phẳng $(\alpha) : 2x + my + 2mz - 9 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : 6x - y - z - 10 = 0$.*

A. $m = -4$ *B.* $m = 4$ *C.* $m = -2$ *D.* $m = 7$

GIẢI. Ta có: vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;m;2m)$ và $\overrightarrow{n_\beta} = (6;-1;-1)$.

Do đó: $(\alpha) \perp (\beta)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta} = 0$

$\Leftrightarrow 2.6 + m.(-1) + 2m.(-1) = 0$

$\Leftrightarrow 12 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow m = 4$

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.19. *Xác định giá trị của m và n để mặt phẳng $(\alpha) : 2x + my + 3z - 5 = 0$ song song với mặt phẳng $(\beta) : nx - 8y - 6z + 2 = 0$.*

A. $m = 4; n = -1$ *B.* $m = -4; n = 4$

C. $m = 1; n = -4$ *D.* $m = 4; n = -4$

GIẢI. Ta có:

$$(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -12 \\ -6m = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -4 \end{cases}.$$

Vậy đáp án là D. □

Dạng 3: Các bài toán liên quan đến khoảng cách

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

VÍ DỤ 7.20 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Tính khoảng cách từ điểm $A(1;-2;3)$ đến mặt phẳng $(P): 3x+4y+2z+4=0$.*

A. $m=\dfrac{5}{9}$ B. $m=\dfrac{5}{29}$ C. $m=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ D. $m=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

GIẢI. Ta có: $d(A;(P))=\dfrac{|3x_A+4y_A+2z_A+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{|3.1+4.(-2)+2.3+4|}{\sqrt{29}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.21. *Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha): x+2y+2z+11=0$ và $(\beta): x+2y+2z+2=0$.*

A. $d=3$ B. $d=4$ C. $d=5$ D. $d=10$

GIẢI. Ta lấy điểm $M(0;0;-1)$ thuộc mặt phẳng (β), khi đó:

$$d((\alpha);(\beta))=d(M;(\alpha))=\frac{|x_M+2y_M+2z_M+11|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|0+2.0+2.(-1)+11|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3.$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.22. *Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z-17=0$.*

A. $M(0;0;-3)$ B. $M(3;0;0)$ C. $M(0;0;3)$ D. $M(0;-3;0)$

GIẢI. Vì $M\in Oz$ nên tọa độ điểm M có dạng $(0;0;z_M)$.
Ta có, điểm M cách đều điểm A và mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow AM=d(M;(\alpha))\Leftrightarrow\sqrt{(0-2)^2+(0-3)^2+(z_M-4)^2}=\frac{|z_M-17|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{13+(z_M-4)^2}=\frac{|z_M-17|}{\sqrt{14}}$$
$$\Leftrightarrow 13+(z_M-4)^2=\frac{(z_M-17)^2}{14}$$
$$\Leftrightarrow 14\left(z_M^2-8z_M+29\right)=z_M^2-34z_M+289$$
$$\Leftrightarrow z_M^2-6z_M+9=0$$
$$\Leftrightarrow z_M=3$$

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.23. *Viết phương trình mặt phẳng* (α) *song song với mặt phẳng* $(\beta): -x+z+1=0$ *đồng thời khoảng cách từ điểm* $A(-1;2;0)$ *đến mặt phẳng* (α) *bằng* $\sqrt{2}$.

A. $-x+z+1=0$ B. $-x+z-3=0$ C. $-x+z-1=0$ D. $-x+z+3=0$

GIẢI. Ta có: $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{n_\beta} = (-1;0;1) \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n_\alpha} = (-1;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $-x+z+D=0$.
Mặt khác, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow d(A;(\alpha)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|1+D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |D+1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D+1=2 \\ D+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=1 \\ D=-3 \end{cases}.$$

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên $D \neq 1$ suy ra $D=-3$.
Vậy đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 7.17 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-z+2=0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n} = (-1;0;-1)$ B. $\vec{n} = (3;-1;2)$

C. $\vec{n} = (3;-1;0)$ D. $\vec{n} = (3;0;-1)$

BÀI TẬP 7.18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;1;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$ là:

A. $x+y-z-2=0$ B. $x+y+z-1=0$

C. $x+y+z-3=0$ D. $x+y+z+2=0$

BÀI TẬP 7.19. Trong hệ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;6)$, $B(0;-3;0)$ và $C(6;0;0)$. Phương trình nào sau đây **không** là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $x-2y+z-6=0$ B. $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$

C. $x+2y+z-6=0$ D. $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}-1=0$

BÀI TẬP 7.20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(3;1;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là:

A. $x+y-z=0$ B. $x+z-3=0$

C. $x+y-z+1=0$ D. $x+y-z-2=0$

BÀI TẬP 7.21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(3;0;0)$, $B(-1;1;1)$ và $C(-3;1;2)$ là:

A. $2x + y + 2z - 2 = 0$ B. $x + 2y + 2z - 3 = 0$

C. $x + 2y + z - 3 = 0$ D. $x + y + 2z - 3 = 0$

BÀI TẬP 7.22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): -2x - y + z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (β) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

A. $x + 2y + z - 1 = 0$ B. $x + y + 4z - 1 = 0$

C. $x + 2y + 4z - 1 = 0$ D. $x + y + z - 1 = 0$

BÀI TẬP 7.23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách (α) một đoạn bằng $\frac{2}{3}$ là:

A. $2x + y + 2z + 1 = 0; 2x + y + 2z + 3 = 0$ B. $2x + y + 2z + 1 = 0; 2x + y + 2z - 3 = 0$

C. $2x + y + 2z + 3 = 0; 2x + y + 2z - 3 = 0$ D. $2x + y + 2z - 4 = 0; 2x + y + 2z - 2 = 0$

BÀI TẬP 7.24. Cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x - y + 4z + 2 = 0$ và $(\alpha_2): 3x - y + 4z + 8 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) song song và cách đều với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) là:

A. $3x - y + 4z + 6 = 0$ B. $3x - y + 4z + 3 = 0$

C. $3x - y + 4z + 4 = 0$ D. $3x - y + 4z + 5 = 0$

BÀI TẬP 7.25. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;1;1)$, $B(1;-3;-1)$ và song song với trục Ox. Khoảng cách từ điểm $C(0;2;2)$ đến mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{4}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.17. Ta có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = (3;0;-1)$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.18. Phương trình mặt phẳng là:

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.19. Phương trình mặt phẳng chắn (ABC) là:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x - 2y + z - 6 = 0.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.20. Ta có: trung điểm của AB là $M(2;1;1)$ và $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2;0;2)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực là:

$$2(x-2)+0(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+z-3=0.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.21. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (-6;1;2) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1;2;2)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$1(x-3)+2(y-0)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-3=0.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.22. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;1;0)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (-2;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n_\alpha} = (1;2;4)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (β) là:

$$1(x-1)+2(y-0)+4(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+4z-1=0.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.23. Ta có: $A(0;1;0) \in (\alpha)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (2;1;2)$.
Suy ra, phương trình mặt phẳng (β) có dạng: $2x+y+2z+D=0$.
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\frac{2}{3}$ nên:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow d(A;(\beta)) = \frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow \frac{|2.0+1.1+2.0+D|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow |D+1| = 2\\
&\Leftrightarrow D = 1 \text{ hoặc } D = -3.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là: $2x+y+2z+1=0$ hoặc $2x+y+2z-3=0$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.24. Ta có: $A_1(0;2;0) \in (\alpha_1)$, $A_2(0;0;-2) \in (\alpha_2)$ và

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_{\alpha_1}} = \overrightarrow{n_{\alpha_2}} = (3;-1;4).$$

Suy ra, phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $3x-y+4z+D=0$.
Mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow d(A_1;(\alpha)) = d(A_2;(\alpha))\\
&\Leftrightarrow \frac{|3.0-2+4.0+D|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{|3.0-0+4.(-2)+D|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}}\\
&\Leftrightarrow |D-2| = |D-8| \Leftrightarrow D = 5
\end{aligned}$$

Vậy, phương trình mặt phẳng (α) là: $3x-y+4z+5=0$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.25. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-4;-2)$ và $\overrightarrow{u_{Ox}} = \overrightarrow{i} = (1;0;0)$.
Suy ra, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{i} = (0;-2;4)$.
Khi đó, phương trình mặt phẳng (α) là:

$$0(x-0) - 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow -2y + 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 1 = 0.$$

Do đó, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α) là:

$$d(C;(\alpha)) = \frac{|2 - 2.2 + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Đáp án đúng là A. □

CHUYÊN ĐỀ 7.4
Các bài toán về phương trình đường thẳng

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vecto chỉ phương của đường thẳng

* Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng d.
* **Chú ý:**
  - Một đường thẳng bất kì có vô số vectơ chỉ phương.
  - Tất cả các vectơ chỉ phương của cùng một đường thẳng cùng phương với nhau.

2. Phương trình đường thẳng

* Đường thẳng d đi qua một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương có **phương trình tham số** là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{với tham số } t \in \mathbb{R}.$$

* Đường thẳng d đi qua một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương có **phương trình chính tắc** là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{với điều kiện } abc \neq 0.$$

* **Nhận xét:** Tọa độ của một điểm A bất kì thuộc đường thẳng d đều có dạng:

$$A(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$$

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

* Cho đường thẳng d đi qua M, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua M' có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.
  - $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0} \\ M \in d' \quad \text{hoặc} \quad M' \in d \end{cases}$
  - $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0} \\ M \notin d' \text{ hoặc } M' \notin d \end{cases}$
  - d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{u}' \neq \vec{0} \\ (\vec{u} \wedge \vec{u}').\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}$

- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{u}').\overrightarrow{MM'} \neq 0$.
- **Đặc biệt:** $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u}' = 0$.

* Khi d và d' cắt nhau, để tìm giao điểm của hai đường thẳng, ta xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases} \quad (1)$$

Giải hệ phương trình (1) tìm t hoặc t', từ đó tìm giao điểm của hai đường thẳng.

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

* Cho đường thẳng d đi qua M có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.
  - $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$
  - $d \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$
  - d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} \neq 0$
  - **Đặc biệt:** $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n}$ với k là một số thực.

* Khi d và (α) cắt nhau, để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta xét phương trình sau:

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \quad (1)$$

Giải phương trình (1) tìm t từ đó tìm tọa độ giao điểm của d và (α).

5. Tính khoảng cách

* Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với Δ là:

$$d(\Delta; (\alpha)) = d(M; (\alpha)) \quad \forall M \in \Delta$$

* Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA}\right|}{|\vec{u}|}$$

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 biết Δ_1 đi qua M_1, có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}$ và Δ_2 đi qua M_2, có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}$ là:

$$d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{\left|(\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}).\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}|}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng

Phương pháp giải: Xác định tọa độ của một điểm M thuộc d và vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của d, từ đó viết phương trình đường thẳng.

VÍ DỤ 7.24. *Trong không gian $Oxyz$, Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;5;7)$.*

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ *và* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ *và* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ *và* $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ *và* $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+3}{4}$

GIẢI. Vì đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B nên ta có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của Δ song song với $\overrightarrow{AB} = (2;3;4)$. Do đó, ta chọn $\vec{u} = (2;3;4)$.

Suy ra, phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của Δ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.25. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta) : 2x + y = z - 2 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng.*

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

GIẢI. Đường thẳng Δ nằm trên cả hai mặt phẳng (α) và (β) nên vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng vuông góc với cả hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ và $\overrightarrow{n_\beta}$. Do đó: $\vec{u} \parallel \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta}$.

Ta có: $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{n_\beta} = (2;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = (3;-3;-3)$ nên ta chọn $\vec{u} = (1;-1;-1)$.

Mặt khác, ta lấy một điểm bất kì, ví dụ $A(0;1;1)$ thuộc $(\alpha) \cap (\beta)$ suy ra $A \in \Delta$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.26 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). *Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt đường thẳng d.*

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ *B.* $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ *D.* $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$

GIẢI. Gọi $B=\Delta\cap d\Rightarrow$ đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB. Vecto chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;1;2)$.

Ta có: $B\in d\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$.

Khi đó, $\Delta\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t+t+4t-6=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$.

Suy ra phương trình của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Vậy đáp án là B. □

Dạng 2: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Dùng các điều kiện song song, vuông góc và cắt nhau của hai đường thẳng.

VÍ DỤ 7.27. *Cho hai đường thẳng* $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ *và* $d':\begin{cases}x=3-t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}$ *cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.*

A. $(1;-1;0)$ *B.* $(2;2;0)$ *C.* $(-1;0;1)$ *D.* $(3;0;-1)$

GIẢI. Ta có phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t'\\y=-1+t'\\z=-t'\end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}3-t=1+2t' & (1)\\2t=-1+t' & (2)\\-1+t=-t' & (3)\end{cases}$

Giải hệ (1) và (2) ta suy ra: $\begin{cases}t+2t'=2\\2t-t'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=1\end{cases}$.

Thử lại ta thấy t,t' thỏa mãn phương trình (3). Do đó, thay $t=0$ vào phương trình tham số của d ta được tọa độ giao điểm là $M(3;0;-1)$.

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.28. *Tìm a để hai đường thẳng* $d:\begin{cases}x=1+at\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ *và* $d':\begin{cases}x=1-t'\\y=2+2t'\\z=3-t'\end{cases}$ *cắt nhau.*

A. $a=0$ *B.* $a=1$ *C.* $a=2$ *D.* $a=-1$

GIẢI. Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$

Giải hệ (2) và (3) ta suy ra: $\begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$.

Thay các giá trị của t, t' vào phương trình (1) ta được: $1 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy đáp án là A. □

Dạng 3: Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp giải: Sử dụng các điều kiện song song, vuông góc và cắt nhau của đường thẳng và mặt phẳng.

VÍ DỤ 7.29. *Cho phương trình đường thẳng* $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ *và phương trình mặt phẳng* $(\alpha) : mx + 2y + 1z + 11 = 0$ *với* m *là tham số thực. Tìm* m *để mặt phẳng* (α) *song song với đường thẳng* Δ.

A. $m = -3$ *B.* $m = 2$ *C.* $m = -1$ *D.* $m = 1$

GIẢI. Theo đề bài ta có: $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1; 1)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (m; 2; 1)$.

Vì mặt phẳng (α) song song với đường thẳng Δ nên:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow m.1 + 2.1 + 1.1 = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.30 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Trong hệ Oxyz, cho phương trình đường thẳng* $\Delta : \dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$ *và phương trình mặt phẳng* $(\alpha) : 10x + 2y + mz + 11 = 0$ *với* m *là tham số thực. Tìm* m *để mặt phẳng* (α) *vuông góc với đường thẳng* Δ.

A. $m = -2$ *B.* $m = 2$ *C.* $m = -52$ *D.* $m = 52$

GIẢI. Theo đề bài ta có: $\overrightarrow{u_\Delta} = (5; 1; 1)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (10; 2; m)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng Δ nên:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = k.\overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.31. *Cho đường thẳng* $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ *và mặt phẳng* $(\alpha) : x + 2y + z - 2 = 0$. *Tìm tọa độ giao điểm* M *của* d *và* (α).

A. $M(3; 0; 1)$ *B.* $M(-1; 0; 1)$ *C.* $M(1; -1; 0)$ *D.* $M(3; 0; -1)$

GIẢI. Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

Vì $M \in d$ nên tọa độ điểm M có dạng: $M(1 + 2t; -1 + t; -t)$.
Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (α) ta được:

$$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và (α) là: $M(3; 0; -1)$.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.32. *Cho hai điểm* $A(1;0;3)$, $B(1;1;1)$ *và đường thẳng* d : $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.
Phương trình mặt phẳng (α) *đi qua* A, B *và song song với đường thẳng* d *là:*

A. $x + 3y + z - 3 = 0$ *B.* $x + 2y + z - 4 = 0$ *C.* $x + y + z - 4 = 0$ *D.* $2x + 3y + z - 3 = 0$

GIẢI. Theo đề bài, mặt phẳng (α) đi qua A, B và song song với đường thẳng d nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$ và vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$. Do đó: $\overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u_d}$.
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 1; -2)$ và $\overrightarrow{u_d} = (-1; 2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u_d} = (1; 2; 1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 2; 1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x - 1) + 2(y - 0) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 4 = 0.$$

Vậy đáp án là B. □

Dạng 4: **Các bài toán liên quan đến khoảng cách**

Phương pháp giải: Sử dụng các công thức tính khoảng cách.

VÍ DỤ 7.33. *Tính độ dài khoảng cách từ điểm* $M(1;2;1)$ *đến đường thẳng có phương trình* $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$.

A. $d = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ *B.* $d = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ *C.* $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ *D.* $d = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

GIẢI. Từ giả thiết ta có: đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$.
Suy ra: $\overrightarrow{MA} = (-3; -1; -2) \Rightarrow \vec{u} \wedge \overrightarrow{MA} = (-6; 8; 5)$.
Theo công thức, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 5^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.34. *Cho phương trình mặt phẳng* $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ *và phương trình đường thẳng* $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$. *Chứng minh* Δ *song song với* (α) *và tính khoảng cách giữa chúng.*

A. $d = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ B. $d = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$ C. $d = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ D. $d = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$

GIẢI. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;7;3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;4)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;-2;-1)$.
Vì $\vec{u}.\vec{n} = 2.3 + 1.(-2) + 4.(-1) = 0$ và $M \notin (\alpha)$ nên suy ra: Δ song song với (α).
Mặt khác, ta có: $d(\Delta;(\alpha)) = d(M;(\alpha)) = \dfrac{|3.(-1) + (-2).7 + (-1).3 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$.

Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.35. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:*

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

A. $d = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$ B. $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. $d = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ D. $d = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

GIẢI. Từ giả thiết suy ra: đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1;-1;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2;-1;0)$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(2;-2;3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1;1;1)$.
Ta có: $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = (-1;2;1)$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;-1;2)$.
Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$d(\Delta_1;\Delta_2) = \frac{\left|(\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}).\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}|} = \frac{|1.(-1) + (-1).(-2) + 2.1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 7.26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;2;1)$ là:

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;1)$ và $B(3;2;-2)$. Phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình đường thẳng AB?

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -5 - 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1;1;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+1=0$?

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=-1+2t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=-1+2t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+t\\z=2-t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=1-3t\\y=1-2t\\z=-1+2t\end{cases}$

BÀI TẬP 7.29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với d. Phương trình nào sau đây **không** là phương trình đường thẳng d?

A. $\begin{cases}x=2+3t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=5-3t\\y=2-t\\z=4-t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=-4+3t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$

BÀI TẬP 7.30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z-3=0$ và $(\beta): x+y+z-1=0$. Viết phương trình chính tắc giao tuyến của hai mặt phẳng.

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ B. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z11}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ D. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{-1}$

BÀI TẬP 7.31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ B. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

BÀI TẬP 7.32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;1;1)$, vuông góc với $d_1: \begin{cases}x=3+t\\y=1\\z=2-t\end{cases}$ và cắt $d_2: \begin{cases}x=3+2t\\y=3+t\\z=0\end{cases}$.

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=-2t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=2t\end{cases}$

BÀI TẬP 7.33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases}x=3+t\\y=1\\z=2-t\end{cases}$ và $d_2: \begin{cases}x=3+2t\\y=3+t\\z=0\end{cases}$.

A. $\begin{cases}x=3-t\\y=3-2t\\z=-t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=3+t\\y=3+2t\\z=-t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=3-t\\y=3+2t\\z=-t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=3-t\\y=3+2t\\z=t\end{cases}$

BÀI TẬP 7.34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - y - z = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 5t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(2;0;1)$ đến đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.26. Phương trình tham số đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.27. Điểm $M(3;3;1)$ không thuộc đường thẳng AB nên phương trình D không là phương trình đường thẳng AB.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.28. Ta có: $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_\alpha} = (3;-2;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.29. Điểm $M(-4;-1;2)$ không thuộc đường thẳng d nên phương trình D không là phương trình đường thẳng d.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.30. Ta có: $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;1;-1)$ và $\overrightarrow{n_\beta} = (1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = (2;-3;1)$.
Điểm $A(0;2;-1)$ thuộc vào cả 2 mặt phẳng suy ra phương trình đường thẳng giao tuyến là: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.31. Gọi $B = \Delta \cap d \Rightarrow B(4+3t; 2+t; -1+t)$.
Ta có: $\Delta \perp d \Rightarrow AB \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_d} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow t = -1$.
Suy ra, điểm $B(1;1;-2) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{2}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.32. Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(3+2t;3+t;0)$.
Ta có: $\Delta \perp d_1 \Rightarrow AB \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{d_1}} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \Rightarrow t = -1$. Suy ra: $B(1;2;0) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.33. Gọi $A = \Delta \cap d_1$ và $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow A(3+t_1;1;2-t_1)$ và $B(3+2t_2;3+t_2;0)$.
Ta có: Δ là đường thẳng vuông góc chung nên $\Delta \perp d_1$ và $\Delta \perp d_2$.
Khi đó: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ và $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{d_2}} \Rightarrow$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -t_1 + t_2 = -1 \\ -2t_1 + 5t_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{cases}$.
Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 3-t \\ y = 3+2t \\ z = -t \end{cases}$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.34. Gọi $A = \Delta \cap d_1$ và $B = \Delta \cap d_2$. Vì Δ nằm trong (α) nên $A = d_1 \cap (\alpha)$ và $B = d_2 \cap (\alpha)$.
Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(2+t_1;1-5t_1;1-t_1)$ và $B \in d_2 \Rightarrow B(1+2t_2;1-t_2;t_2)$.
Khi đó, A và B cùng thuộc mặt phẳng (α) nên ta có: $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$.
Suy ra: $A(2;1;1)$ và $B(1;1;0) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1 \\ z = 1+t \end{cases}$.

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.35. Từ phương trình đường thẳng Δ ta có: $A(1;0;2) \in \Delta$ và $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;2;1)$.
Khi đó: $\overrightarrow{MA} = (-1;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u_\Delta} = (-2;2;-2)$.
Suy ra, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là:

$$d(M;\Delta) = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

Đáp án đúng là C. □

CHUYÊN ĐỀ 7.5
Các bài toán tổng hợp

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng, mặt phẳng với mặt cầu

* Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ:

  - (S) và Δ không cắt nhau nếu $d(I;\Delta) > R$.
  - (S) tiếp xúc với Δ tại H nếu $d(I;\Delta) = R$. Khi đó, H được gọi là tiếp điểm và là hình chiếu vuông góc của I trên Δ. Đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.
  - (S) cắt Δ tại hai điểm phân biệt A, B nếu $d(I;\Delta) < R$. Khi đó:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I;\Delta)}$$

* Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α):

  - (S) và (α) không cắt nhau nếu $d(I;(P)) > R$.
  - (S) tiếp xúc với (α) tại H nếu $d(I;(P)) = R$. Khi đó, H được gọi là tiếp điểm và là hình chiếu vuông góc của I trên (α). Mặt phẳng (α) được gọi là tiếp diện.
  - (S) cắt (α) theo thiết diện là một đường tròn (C) nếu $d(I;(P)) < R$. Khi đó, đường tròn (C) có tâm J là hình chiếu vuông góc của I trên (α) và bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = \sqrt{R^2 - d^2(I;(P))}$$

2. Một số bài toán tìm điểm đặc biệt

* Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M xuống mặt phẳng (α) được xác định như sau:

  - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (α).
  - Xác định tọa độ giao điểm H của Δ và (α).

* Tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α) được xác định như sau:

  - Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).
  - Xác định tọa độ điểm M' sao cho H là trung điểm MM'.

* Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M xuống đường thẳng Δ được xác định như sau:

  - Gọi tọa độ điểm H được tham số theo phương trình đường thẳng Δ.
  - Từ điều kiện MH vuông góc với Δ tìm H.

* Tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng Δ được xác định như sau:
    - Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M xuống đường thẳng Δ.
    - Xác định tọa độ điểm M' sao cho H là trung điểm MM'.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

VÍ DỤ 7.36. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y-z-3=0$.*

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ *B.* $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ *D.* $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=2$

GIẢI. Vì mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên:

$$R=d(I;(\alpha))=\frac{|2.1+2.2-(-3)-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2.$$

Suy ra, phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.
Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.37. *Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$ *B.* $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{50}$ *D.* $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{50}$

GIẢI. Ta có: đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{MI}=(2;-4;6) \Rightarrow \overrightarrow{MI}\wedge\vec{u}=(-2;14;10)$.
Vì đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) nên:

$$R=d(I;\Delta)=\frac{\left|\overrightarrow{MI}\wedge\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+14^2+10^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{6}}=\sqrt{50}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.
Vậy đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.38. *Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(4;1;6)$ và cắt đường thẳng có phương trình $\Delta: \frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$.*

A. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$ *B.* $(x+4)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=18$

C. $(x+4)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=12$ *D.* $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=12$

GIẢI. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng $\Delta \Rightarrow H$ là trung điểm AB.
Đường thẳng Δ đi qua $M(-5;7;0)$ và $\vec{u} = (2;-2;1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{MI} = (9;-6;6) \Rightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \vec{u} = (6;3;-6)$

$$\Rightarrow d(I;\Delta) = \frac{\left|\overrightarrow{MI} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6^2+3^2+(-6)^2}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

Xét tam giác IAH vuông tại H, theo định lý Pitago ta có:

$$IA^2 = AH^2 + IH^2 \Rightarrow R^2 = \frac{AB^2}{4} + d^2(I;\Delta) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I;\Delta)} = \sqrt{\frac{6^2}{4} + 3^2} = \sqrt{18}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.
Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.39 (***Đề Minh họa THPTQG 2017***). *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S).*

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

GIẢI. Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow J$ là tâm của đường tròn. Xét một điểm A bất kì thuộc đường tròn. Khi đó, tam giác IJA vuông tại J, theo định lý Pitago ta có:

$$IA^2 = AJ^2 + IJ^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + d^2(I;(P)) \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + d^2(I;(P))} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.
Vậy đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.40 (***D-2014***). *Cho mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm của (C).*

A. $H\left(\frac{5}{7};\frac{3}{7};\frac{13}{7}\right)$ B. $H\left(\frac{3}{7};\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$ C. $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7}\right)$ D. $H\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7};\frac{3}{7}\right)$

GIẢI. Theo giả thiết, mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R=5$.
Vì $d(I;(P)) = \dfrac{|6.3+3.2-2.1-1|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}} = \dfrac{21}{\sqrt{49}} = 3 < R$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C).
Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow J$ là tâm của đường tròn (C).
Ta có, $IJ \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \parallel \overrightarrow{n_P} = (6;3;-2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_{IJ}} = (6;3;-2)$.

Suy ra, phương trình tham số của đường thẳng IJ là: $\begin{cases} x = 3+6t \\ y = 2+3t \\ z = 1-2t \end{cases}$.

Khi đó, tọa độ của J có dạng $(3+6t;2+3t;1-2t)$. Thay tọa độ của J vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$6(3+6t)+3(2+3t)-2(1-2t)-1=0 \Leftrightarrow 49t+21=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{7} \Rightarrow J\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7}\right).$$

Vậy đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.41 (***THPTQG-2016***). *Cho ba điểm* $A(3;2;-2)$, $B(1;0;1)$ *và* $C(2;-1;3)$. *Tìm tọa độ điểm* H *là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng* BC.

A. $H(0;1;1)$ B. $H(0;-1;-1)$ C. $H(0;1;-1)$ D. $H(1;0;-1)$

GIẢI. Ta có, $\overrightarrow{BC}=(1;-1;2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_{BC}}=(1;-1;2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng BC là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Suy ra, tọa độ điểm H có dạng $(1+t;-t;1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-2;-t-2;2t+3)$.
Vì $AH \perp BC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (t-2)-(-t-2)+2(2t+3)=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;1;-1).$$

Vậy đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.42 (***B-2013***). *Cho điểm* $A(3;5;0)$ *và mặt phẳng* $(P): 2x+3y-z-7=0$. *Tìm tọa độ điểm* B *đối xứng của A qua* (P).

A. $B(1;1;2)$ B. $B(-1;-1;2)$ C. $B(0;1;-1)$ D. $B(1;0;-1)$

GIẢI. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $(P) \Rightarrow B$ thuộc Δ và trung điểm M của AB thuộc (P).
Ta có, $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P}=(2;3;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;3;-1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=5+3t \\ z=-t \end{cases}$.

Khi đó, tọa độ của B có dạng $(3+2t;5+3t;-t) \Rightarrow M\left(3+t;\frac{10+3t}{2};\frac{-t}{2}\right)$.

Vì $M \in (P)$ nên: $2(3+t)+3\left(\frac{10+3t}{2}\right)-\left(\frac{-t}{2}\right)-7=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow B(-1;-1;2)$.

Vậy đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 7.36. Cho các điểm $A(1;-2;1)$, $B(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-3=0$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

A. $M(0;5;1)$ B. $M(0;-5;-1)$ C. $M(0;-1;-5)$ D. $M(0;5;-1)$

BÀI TẬP 7.37. Cho phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$ và phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).

A. $x - 8y + 5z + 13 = 0$ B. $x - 8y - 5z + 13 = 0$

C. $x + 8y + 5z - 13 = 0$ D. $x + 8y + 5z + 13 = 0$

BÀI TẬP 7.38. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d.

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 17$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 17$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 17$

BÀI TẬP 7.39. Cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2;1;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16$ B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 25$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 16$

BÀI TẬP 7.40. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.41. Cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$.

A. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 49$ B. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$

C. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 49$ D. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

BÀI TẬP 7.42. Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

A. $x - z + 2\sqrt{2} = 0$ B. $x - z - 2\sqrt{2} = 0$ C. $x - z \pm 2\sqrt{2} = 0$ D. $x - z = 0$

BÀI TẬP 7.43. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

A. $M(-4;-1;-1)$ hoặc $M(7;4;4)$

B. $M(4;1;1)$ hoặc $M(7;4;4)$

C. $M(1;1;4)$ hoặc $M(4;4;7)$

D. $M(4;1;1)$ hoặc $M(-7;-4;-4)$

BÀI TẬP 7.44. Cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn đó.

A. $J(2;0;0), r=4$

B. $J(1;-1;0), r=4$

C. $J(3;0;2), r=4$

D. $J(3;0;2), r=5$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.36. Phương trình đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \\ z=1+2t \end{cases} \Rightarrow M(1+t;-2+3t;1+2t).$$

Vì $M\in(P)$ nên $(1+t)-(-2+3t)+2(1+2t)-3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(0;-5;-1)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.37. Từ giả thiết ta có: $M(2;0;-3)\in d$ và $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;3)$; $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_d}\wedge\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;8;5)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là: $x+8y+5z+13=0$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.38. Ta có: tâm $I\in d \Rightarrow I(1+2t;t;-2t)$.
Do $A,B\in(S) \Rightarrow IA=IA \Rightarrow t=-1$.
Suy ra phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.39. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $(P) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S).
Ta có: $IH=d(I;(P))=3 \Rightarrow R=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
Suy ra, phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.40. Gọi $B=(P)\cap Ox \Rightarrow \Delta$ chính là đường thẳng AB.
Ta có: $B\in Ox \Rightarrow B(b;0;0)$. Thay tọa độ của B vào phương trình $(P) \Rightarrow 2b+2=0 \Rightarrow B(-1;0;0)$.

Suy ra phương trình Δ là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.41. Theo công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng ta có: $d(A;\Delta)=3$.
Khi đó, bán kính mặt cầu là $R=5$.
Suy ra phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.
Đáp án đúng là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.42. Ta có: $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)\,\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;1)\Rightarrow\overrightarrow{n_R}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=(2;0;-2)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (R) có dạng: $x-z+D=0$.
Ta có: $d(O;(R))=2\Rightarrow D=\pm2\sqrt{2}$.
Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.43. Ta có: $A(2;1;0)\in\Delta_2$ và $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(2;1;2)$.
Điểm $M\in\Delta_1\Rightarrow M(3+t;t;t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1+t;t-1;t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(t-2;-2;-t+3)$.
Suy ra khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ_2 là:

$$d(M;\Delta_2)=\frac{\sqrt{(t-2)^2+(-2)^2+(-t+3)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1$$
$$\Leftrightarrow\quad 2t^2-10t+17=9\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=4\end{cases}$$

Suy ra ta có hai điểm $M(4;1;1)$ hoặc $M(7;4;4)$.
Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.44. Từ phương trình mặt cầu ta có: tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.
Gọi J là tâm đường tròn giao tuyến và r là bán kính của đường tròn đó.
Khi đó, IJ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P)\Rightarrow IJ=3\Rightarrow r=\sqrt{R^2-IJ^2}=4$.
Mặt khác, $IJ\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_{IJ}}=\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-2;-1)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng IJ là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$.

Do đó, tọa độ của J có dạng $J(1+2t;2-2t;3-t)$. Vì $J\in(P)\Rightarrow t=1\Rightarrow J(3;0;2)$.
Đáp án đúng là C. □

CHƯƠNG 8
MỘT SỐ ĐỀ THI MẪU

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề)

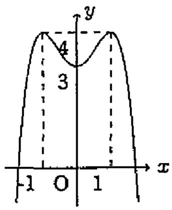
Câu 1. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ

A. $y = -x^4 + 4x^2 + 1$

B. $y = x^4 + x^2 - 3$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$



Câu 2. Tìm khẳng định SAI:

A. Đồ thị hàm số $y = x^3$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

B. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số $y = |x^3|$ nhận trục hoành làm trục đối xứng.

Câu 3. Hàm số nào có bảng biến thiên sau đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

A. $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ B. $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ C. $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ D. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

Câu 4. Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây không có tiệm cận ngang ?

A. $\dfrac{2x+1}{x^2-1}$ B. $\dfrac{x-1}{2x+1}$ C. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ D. $\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

Câu 5. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ B. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$

C. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ D. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} - 1$

Câu 6. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + 3x$ song song với đường thẳng có phương trình $y = 3x + 1$ là:

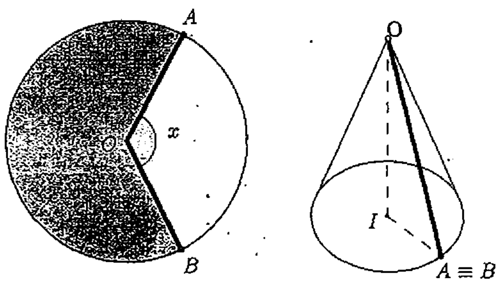
A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 7. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x - \dfrac{1}{2}$ là:

A. $\max y = \dfrac{3}{2}, \min y = -\dfrac{3}{4}$ B. $\max y = \dfrac{2}{3}, \min y = -\dfrac{4}{3}$

C. $\max y = -\dfrac{1}{2}, \min y = -\dfrac{3}{4}$ D. Kết quả khác

Câu 8. Cắt từ một tấm bìa hình tròn tâm O bán kính 10 cm theo một góc x *(tính theo radian)*. Sau đó dán hai đoạn thẳng OA và OB lại ta được một hình nón. Tìm x để thể tích hình nón thu được là lớn nhất



A. $x = \dfrac{2\pi}{3}$ B. $x = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $x = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$

Câu 9. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. $m < -\dfrac{1}{2}$ B. $m > -\dfrac{1}{2}$ C. $-1 < m \le 0$ D. $-1 < m < 1$

Câu 10. Tìm m để đồ thị hàm số $y = (x+2)(x^2 - 2x + m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt:

A. $m < 1$ và $x = 3$ B. Không tồn tại m

C. $m \neq 1$ D. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1$ đồng biến trên khoảng có độ dài lớn nhất bằng 3?

A. Đáp án khác B. $m \geq -\frac{3}{4}$ C. $m > -3$ D. $m = -\frac{3}{4}$

Câu 12. Nếu $\log_{12} 18 = a$ thì $\log_2 3$ bằng

A. $\frac{1-a}{a-2}$ B. $\frac{2a-1}{a-2}$ C. $\frac{a-1}{2a-2}$ D. $\frac{1-2a}{a-2}$

Câu 13. Nếu $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$ thì $\log_2 \sqrt{0.3}$ bằng

A. $a - b - 1$ B. $\frac{1}{2}(a - b - 1)$ C. $2(a - b - 1)$ D. $a + b - 1$

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{x}}(1 - 2x + x^2)$ là

A. $(0; +\infty)$ B. $[0; +\infty)$ C. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$ D. $(1; +\infty)$

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ bằng

A. $y' = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$ B. $y' = e^x + e^{-x}$

C. $y' = \frac{e^x}{(e^x - e^{-x})^2}$ D. $y' = \frac{-5}{(e^x - e^{-x})^2}$

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên $[2; 3]$ là

A. Đáp số khác B. e C. 1 D. $4 - 2\ln 2$

Câu 17. Cho hàm số $y = x - \ln(x+1)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

B. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 0)$

Câu 18. Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có nghiệm là x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Khi đó $A = 2x_1 + 3x_2$ có giá trị là

A. 1 B. $4\log_3 2$ C. $3\log_3 2$ D. 3

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $6^{x^2-7x+12} > 1$ là

A. $(-\infty; 3)$ B. $(4; +\infty)$

C. $(3; 4)$ D. $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$

Câu 20. Số nghiệm âm của phương trình $1 + \log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$ là

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 21. Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng người đó không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người đó nhận về là bao nhiêu, biết rằng theo định kỳ hàng năm số tiền lãi sẽ nhập vào tiền gốc và được tính cho năm tiếp theo

A. 1.689.966.000 đồng B. 2.689.966.000 đồng

C. 3.689.966.000 đồng D. 4.689.966.000 đồng

Câu 22. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) - G(x)$ là hằng số.

C. $F(x) = x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sqrt{x}$.

D. $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$.

Câu 23. Tìm nguyên hàm $\int \left(\frac{5}{x} + \sqrt{x^3}\right) dx$

A. $5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ B. $-5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

C. $-5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ D. $5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

Câu 24. Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$

A. $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ C. $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $I = \frac{2}{3}$

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (x+2)\cos 2x dx$

A. 0 B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 26. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = 3t^2 + 5\ m/s$. Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 36 m B. 252 m C. 1200 m D. 966 m

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và đồ thị $y = -x^2 + x$.

A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{9}{8}$ C. $\frac{27}{8}$ D. 0

Câu 28. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và $y = 0$ quanh trục Ox

A. $\frac{16\pi}{15}$ B. $\frac{15\pi}{16}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{6\pi}{5}$

Câu 29. Môđun của số phức $z = 5 + 2i - (1 + i)^3$

A. 7 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 30. Số phức z thỏa mãn hệ thức $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$ là

A. $z = -3 - i$ B. $z = -2 - i$ C. $z = 2 - i$ D. $z = 2 + i$

Câu 31. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$.

A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 32. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0$. Khi đó $z_1^4 + z_2^4$ bằng

A. 11 B. 23 C. 13 D. 15

Câu 33. Gọi A và B thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 2 + 3i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ

B. A và B đối xứng nhau qua Ox

C. A và B đối xứng nhau qua Oy

D. A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $x = y$.

Câu 34. Tìm biểu diễn của tập hợp các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{z-2+3i}\right| = 1$ là.

A. Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $r = 1$ B. Đường thẳng $x - 5y - 6 = 0$

C. Đường thẳng $2x - 6y - 12 = 0$ D. Đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$

Câu 35. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60^0. Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = a^3$ B. $V = 3a^3$ C. $V = 2a^3$ D. $V = 6a^3$

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{4}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$

Câu 37. Tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau: $BA = 3a$, $BC = BD = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của AB và AD. Tính thể tích V của khối chóp $C.BDNM$

A. $V = 8a^3$ B. $V = \dfrac{2a^3}{3}$ C. $V = \dfrac{3a^3}{2}$ D. $V = a^3$

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SA \perp (ABCD), SC$ hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α với $\tan\alpha = \dfrac{4}{5}, AB = 2a$ và $BC = 4a$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{9a}{5}$ B. $d = \dfrac{12a}{5}$ C. $d = \dfrac{3a}{5}$ D. $d = \dfrac{a}{5}$

Câu 39. Tứ diện đều cạnh a có 1 đỉnh trùng với đỉnh của hình nón tròn xoay, còn 3 đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó, diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là:

A. $\pi a^2\sqrt{3}$ B. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pi a^2$ C. $\dfrac{1}{3}\pi a^2$ D. $\dfrac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2}$

Câu 40. Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước có chiều cao 12 cm, đường kính đáy 4 cm, lượng nước trong cốc cao 10 cm. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính 2 cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu xăng- ti- mét? (Làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân)

A. $0,33$ cm B. $0,67$ cm C. $0,75$ cm D. $0,25$ cm

Câu 41. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a . Các mặt bên là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$.Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ là:

A. $\dfrac{2}{3}\pi a^3$ B. $\dfrac{1}{3}\pi a^3$ C. $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ D. πa^3

Câu 42. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $V = \dfrac{2\pi a^3}{3}$ B. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$ C. $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ D. $V = \pi a^3$

Câu 43. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(3;1;0)$, $B(2;0;2)$ và trọng tâm $G\left(\dfrac{1}{3};-1;\dfrac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $(1;-2;1)$ B. $(-2;-2;1)$ C. $(-4;-4;0)$ D. $(2;-2;3)$

Câu 44. Cho $A(1;-1;2)$, $B(3;0;3)$ và $M(-3;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB.

A. $(P): x+2y-4z-9=0$ B. $(P): 2x+y+z+3=0$

C. $(P): x-y+2z=0$ D. $(P): 3x+3z+3=0$

Câu 45. Cho $M(1;-2;0)$, $N(-3;4;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-7=0$. Tính khoảng cách d từ trung điểm của MN tới (P).

A. $d=2$ B. $d=3$ C. $d=1$ D. $d=\frac{1}{3}$

Câu 46. Cho $A(2;1;1)$, $B(3;2;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-5z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P).

A. $(Q): x+2y-5z+1=0$ B. $(Q): x+2y-5z+3=0$

C. $(Q): 7x-6y-z-3=0$ D. $(Q): 7x-6y-z-7=0$

Câu 47. Cho $A(1;1;1)$, $B(3;5;2)$, $C(3;1-3)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A. $d: \frac{x}{8}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$ B. $d: \frac{x}{13}=\frac{y}{-9}=\frac{z}{10}$

C. $d: \frac{x}{20}=\frac{y}{-18}=\frac{z}{15}$ D. $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$

Câu 48. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-9}{-1}, d_2: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. Lập phương trình đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 và Ox tại A, B, C sao cho B là trung điểm AC.

A. $\Delta: \frac{x-7}{8}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-9}{-4}$ B. $\Delta: \frac{x-3}{8}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-4}$

C. $\Delta: \frac{x}{8}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-4}$ D. $\Delta: \frac{x-5}{8}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+2}{-4}$

Câu 49. Cho $A(-1;3;2)$, $B(1;-1;4)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $(S): x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$

B. $(S): (x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=24$

C. $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=24$

D. $(S): (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

Câu 50. Cho các mặt phẳng $(P_1): 2x-y-z-2=0, (P_2): x-2y+z+2=0, (P_3): x+y-2z+2=0$ và $(Q): x+y+z=0$. Có bao nhiêu mặt cầu có tâm nằm trên (Q) và tiếp xúc với cả ba mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$

A. Có 1 mặt cầu B. Có 4 mặt cầu C. Có 7 mặt cầu D. Có vô số mặt cầu

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề)

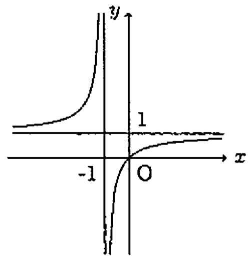
Câu 1. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ

A. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$

B. $y = \dfrac{-x}{x+1}$

C. $y = \dfrac{x+2}{x+1}$

D. $y = \dfrac{x}{x+1}$



Câu 2. Cho hàm f có đạo hàm cấp hai tại x_0. Tìm phát biểu đúng?

A. x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $y(x_0)$.

B. x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0.

C. x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$.

D. x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại 1.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại 1 .

Câu 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + x^2 - 5x + 6$ B. $y = -x^4 + x + 2$

C. $y = x^4 - 4x^2 + 3$ D. $y = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

Câu 5. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$ là:

A. $M(-2; 24)$ B. $N(-2; 25)$ C. $P(7; 3)$ D. $Q(1; -6)$

Câu 6. Hàm số $y = x^3 + \dfrac{48}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$ bằng:

A. $y = 49$ B. $y = 20$ C. $y = 4$ D. $y = 0$

Câu 7. Tung độ giao điểm của đồ thị $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$ với đường thẳng $y = 1 - 2x$ là:

A. 0 B. 1 C. 1 và -1 D. 0 và -1

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 - 9x - m$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$?

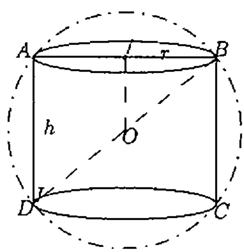
A. $m = -2$ hoặc $m = 0$ B. $m = 0$ hoặc $m = 2$

C. $m = 2$ D. $m = 0$

Câu 9. Trong các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 12x + 4$ có một tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $y = -12x + 4$ B. $y = 12x - 4$ C. $y = -12x - 4$ D. $y = 12x + 4$

Câu 10. Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 10cm$. Trong các hình trụ nội tiếp đường tròn, hình trụ có thể tích lớn nhất có chiều cao h là bao nhiêu?



A. $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$ B. $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ C. $h = R$ D. $h = R\sqrt{3}$

Câu 11. Với điều kiện nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2m^2x^2 + 5m - 4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều?

A. $m = \sqrt{3}$ B. $m = \pm\sqrt[6]{3}$ C. $m = -\sqrt{3}$ D. $m = \pm\sqrt{3}$

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \log_{x-1} x$ là

A. $(1; \infty) \setminus \{2\}$ B. $(2; +\infty)$ C. $(1; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là

A. $y' = x^2e^x$ B. $y' = -2xe^x$

C. $y' = (2x - 2)e^x$ D. $y' = \left(x^3 - x^2 + 2x\right)e^x$

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{e^x}{2x+1}$ trên $[0; 2]$ là

A. 1 B. $\dfrac{e^2}{5}$ C. 2 D. $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

Câu 15. Nếu $\log_2 5 = a$ thì $\log_4 1250$ bằng

A. $\dfrac{1}{2} + 2a$ B. $4a - 1$ C. $4a + 1$ D. $\dfrac{1}{2} + a$

Câu 16. Nếu $\log_{30} 3 = a$ và $\log_{30} 5 = b$ thì $\log_{30} 1350$ bằng

A. $2a - b - 1$ B. $2a - b + 1$ C. $2a + b + 1$ D. $a + 2b + 1$

Câu 17. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\log(a + 3b) = \log a + \log b$. B. $\log(a + 1) + \log b = 1$.

C. $2\log(a + 3b) = \log a + \log b$. D. $\log\dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

Câu 18. Tìm m để phương trình $9^x - m.3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

A. $m > 2$ hoặc $m < -2$ B. $m > 2$

C. $-2 < m < 2$ D. $m < -2$

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\log_4(x + 12).\log_2 x = 1$ là

A. $x = -3$ B. $x = 4$

C. $x = -3, x = 4$ D. Đáp án khác

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2 - x^2)) > 0$ là

A. $(-1; 1) \cup (2; +\infty)$ B. $(-1; 1)$ C. Đáp án khác D. $(-1; 0) \cup (0; 1)$

Câu 21. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 6 năm B. 7 năm C. 8 năm D. 9 năm

Câu 22. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

A. $I = 2$ B. $I = 1$ C. $I = \frac{1}{2}$ D. $I = \frac{1}{4}$

Câu 23. Giả sử rằng $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $a+b$

A. -1 B. 5 C. -5 D. 1

Câu 24. Tìm nguyên hàm $\int (1+\sin x)^2 dx$.

A. $\frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ B. $\frac{3}{2}x - 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
C. $\frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ D. $\frac{3}{2}x + 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Câu 25. Tính $I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$

A. $I = \frac{e^2-1}{4}$ B. $I = \frac{e^2+1}{4}$ C. $I = \frac{e^2}{4}$ D. $I = \frac{1}{4}$

Câu 26. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $w'(t)$ là tốc độ tăng trưởng cân nặng/năm của một đứa trẻ thì $\int_5^{10} w'(t)dt$ là độ chênh lệch cân nặng giữa đứa trẻ 5 tuổi và 10 tuổi.

B. Nếu dầu rò rỉ từ 1 cái thùng với tốc độ $r(t)$ tính bằng ga lông/phút tại thời gian t, thì $\int_0^{120} r(t)dt$ biểu thị lượng ga lông dầu rò rỉ trong 2 giờ đầu tiên.

C. Nếu $r(t)$ là tốc độ tiêu thụ dầu của thế giới, trong đó t được tính theo năm, bắt đầu tại $t = 0$ vào ngày 1 tháng 1 năm 2000 và $r(t)$ được tính bằng thùng/năm thì $\int_0^{17} r(t)dt$ biểu thị số lượng thùng dầu tiêu thụ từ ngày 1 tháng 1 năm 2000 đến ngày 1 tháng 1 năm 2017.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^2 + 2x$ và $y = x + 6$

A. $\frac{95}{6}$. B. $\frac{265}{6}$. C. $\frac{125}{6}$. D. $\frac{65}{6}$

Câu 28. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi Ox và $y = \sqrt{1 - x^2}$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox

A. $\frac{3}{2}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Tìm môđun của số phức $w = z + i + 1$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 30. Số phức z thỏa mãn hệ thức $z + 2\bar{z} = 3 - i$ có phần ảo bằng

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -1 D. 1

Câu 31. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Khi đó $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 2 B. 6 C. 8 D. 4

Câu 32. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2 - 3i}$ là

A. $(3; -2)$ B. $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$ C. $(2; -3)$ D. $\left(\frac{2}{13}; \frac{-3}{13}\right)$

Câu 33. Cho số phức $z = 1 + bi$. Khi b thay đổi tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường cố định nào.

A. Đường thẳng $y - b = 0$ B. Đường thẳng $x - 1 = 0$

C. Đường thẳng $bx + y - 1 = 0$ D. Đường thẳng $x - y - b = 0$

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3i| \leq |\bar{z} + 2 - i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là

A. Nửa mặt phẳng cho bởi $x - y - 1 \leq 0$ B. Nửa mặt phẳng cho bởi $x - y - 1 \geq 0$

C. Đường tròn tâm $I(-1; 3)$ bán kính $r = 2$ D. Đường thẳng $x - y - 1 = 0$

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $18a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$ C. $9a^3\sqrt{3}$ D. $18a^3\sqrt{15}$

Câu 36. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $A'C$ tạo với mặt đáy một góc 60^0.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $3a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $6a^3\sqrt{3}$

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB và CD. Tính thể tích tứ diện $AMNP$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)?

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 39. Cho hình trụ đứng có bán kính đáy R, chiều cao trụ là $R\sqrt{2}$. Diện tích toàn phần và thể tích của khối trụ đã cho là:

A. $2\pi(\sqrt{2}+1)R^2; \pi R^3$ B. $\pi(\sqrt{2}+1)R^2; \pi R^3$

C. $\pi(\sqrt{2}+1)R^2; \pi R^3\sqrt{2}$ D. $2\pi(\sqrt{2}+1)R^2; \pi R^3\sqrt{2}$

Câu 40. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích của khối cầu ngoại tiếp và nội tiếp khối nón trên .Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

Câu 41. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a ,mặt bên là các hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ là:

A. $4\pi a^2$ B. $\frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+1)$ C. $2\pi a^2$ D. $\frac{3\pi a^2}{2}$

Câu 42. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính thể tích V của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện $ABCD$

A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$ C. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;1)$ và $\vec{c} = (3;-1;2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$ thỏa mãn biểu thức: $2\vec{b} - \vec{a} + 3\vec{c} = \vec{0}$?

A. $\left(-\frac{3}{2};1;-\frac{5}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2};-2;-\frac{5}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{7}{2};2;-\frac{5}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z + 1 = 0$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;2)$ và hai mặt phẳng (α_1) : $x-y+3=0$ và $(\alpha_2): y-z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) là:

A. $x+y+z-2=0$ B. $x+y+2z-4=0$

C. $x-2y+z-2=0$ D. $2x+y+z-2=0$

Câu 46. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;3;1)$, vuông góc với đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-3=0$.

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+6t \\ z=1+5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3-6t \\ z=1-5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+6t \\ z=1-5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+6t \\ z=1+5t \end{cases}$

Câu 47. Cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-8}{-1}, d_2: \dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2.

A. $(Q): x+2y-z-10=0$ B. $(Q): 7x+2y+3z-26=0$

C. $(P): 4x-5y-6z+41=0$ D. $(Q): x-2y-z+10=0$

Câu 48. Cho $M(2;1;0)$ và $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ B. $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$

C. $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{4}$ D. $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{4}$

Câu 49. Cho $I(2;-5;6)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+3=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (P)

A. $(S): (x-2)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$

B. $(S): (x-2)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=9$

C. $(S): (x-2)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=27$

D. $(S): (x-2)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=\dfrac{81}{2}$

Câu 50. Cho các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$ và $(Q): x+y+z=0$. Có bao nhiêu mặt cầu có tâm nằm trên (Q) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA

A. Có 1 mặt cầu B. Có 4 mặt cầu

C. Có 7 mặt cầu D. Có vô số mặt cầu

ĐÁP ÁN

ĐỀ 1

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Đáp án	C	D	D	D	C	B	D	D	C	D	D	A	B	A	C	D	A

Câu	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Đáp án	C	D	B	A	C	D	B	A	D	B	A	A	C	C	B	D	C

Câu	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
Đáp án	D	A	C	B	B	B	A	C	C	B	A	D	A	D	A	B	

ĐỀ 2

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Đáp án	B	B	C	D	B	B	C	A	A	A	B	A	A	B	A	C	D

Câu	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Đáp án	A	D	D	D	B	A	C	A	D	C	B	C	D	C	B	B	B

Câu	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
Đáp án	B	C	C	C	A	A	B	B	C	A	A	C	C	B	B	B	