NGUYỄN TẤT THU (Chủ biên)

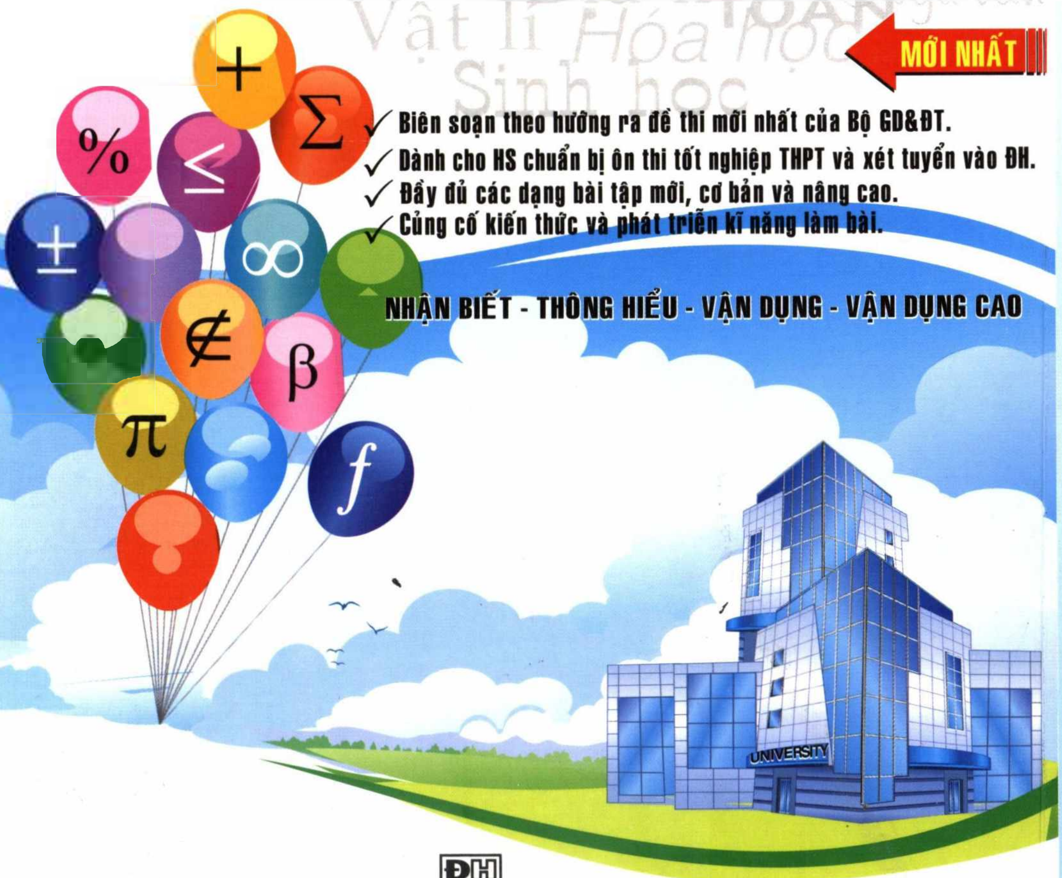
# TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA

## Môn TOÁN ★

MỚI NHẤT

✓ Biên soạn theo hướng ra đề thi mới nhất của Bộ GD&ĐT.
✓ Dành cho HS chuẩn bị ôn thi tốt nghiệp THPT và xét tuyển vào ĐH.
✓ Đầy đủ các dạng bài tập mới, cơ bản và nâng cao.
✓ Củng cố kiến thức và phát triển kĩ năng làm bài.

NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU - VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO




ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

DẠY TỐT HỌC TỐT

Mời các bạn tìm đọc:

*NGUYỄN TẤT THU (Chủ biên)*

TRUNG TÂM SÁCH GIÁO DỤC ALPHA

# TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA

# Môn TOÁN

- ✓ Biên soạn theo hướng ra đề thi mới nhất của Bộ GD&ĐT.
- ✓ Dành cho HS chuẩn bị ôn thi tốt nghiệp THPT và xét tuyển vào ĐH.
- ✓ Đầy đủ các dạng bài tập mới, cơ bản và nâng cao.
- ✓ Củng cố kiến thức và phát triển kĩ năng làm bài.

**NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU - VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO**

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39729436
***

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc - Tổng biên tập*
*TS.* PHẠM THỊ TRÂM

*Biên tập nội dung*
ĐẶNG PHƯƠNG ANH
*Sửa bài*
DIÊN NGUYÊN
*Chế bản*
CÔNG TI AN PHA VN
*Trình bày bìa*
SƠN KỲ
*Đối tác liên kết xuất bản*
CÔNG TI AN PHA VN

SÁCH LIÊN KẾT

**TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN - TẬP 1**
Mã số: 1L-596ĐH2014
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH in Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 2136-2014/CXB/06-323/ĐHQGHN
Quyết định xuất bản số: 592LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2015.

# LỜI MỞ ĐẦU

Trong năm học 2014 - 2105, Bộ giáo dục đã đổi mới thi cử nhập hai kì thi Tốt nghiệp THPT và kì thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng thành một kì thi. Sử dụng kết quả của kì thi để xét Tốt nghiệp THPT và làm dữ liệu để xét tuyển vào các trường Đại học - Cao đẳng. Một kì thi với hai mục đích nên đề thi có tính phân loại cao. Do đó, việc ôn tập theo cấu trúc đề thi mới gây nhiều khó khăn cho các em học sinh. Nhằm chia sẻ những khó khăn đó và góp phần vào việc ôn tập được hiệu quả hơn, chúng tôi biên soạn bộ sách "***Tài liệu ôn thi THPT Quốc gia môn Toán***" gồm hai tập. Cuốn sách các bạn đang cầm trên tay là **cuốn thứ 1** gồm 6 chương và một số đề thi mẫu. Cụ thể:

*Chương 1:* Hàm số và các vấn đề liên quan

*Chương 2:* Phương trình lượng giác

*Chương 3:* Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

*Chương 4:* Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình mũ và logarit

*Chương 5:* Tích phân và ứng dụng.

Trong mỗi chương, chúng tôi phân chia theo các chủ đề trọng điểm. Trong mỗi chuyên đề được chia làm 3 phần:

- Phần 1: Tóm tắt lí thuyết: Trong phần này, chúng tôi hệ thống lại một số kiến thức cần thiết liên quan đến chuyên đề và phương pháp giải dạng toán thuộc chuyên đề đó.

- Phần 2: Các ví dụ minh họa: Trong phần này, chúng tôi chia làm hai phần gồm: Các ví dụ cơ bản dành cho mức độ nhận biết, thông hiểu để đáp ứng phần điểm xét thi tốt nghiệp trong đề thi. Phần thứ hai là các ví dụ phân loại dành cho mức độ vận dụng và vận dụng cao để đáp ứng phần điểm để xét tuyển vào các trường đại học - cao đẳng.

- Phần 3: Bài tập vận dụng: Phần này chúng tôi đưa ra hệ thống bài tập được sắp xếp từ dễ đến khó để bạn đọc có thể ôn tập lại và rèn luyện thêm kĩ năng giải toán thuộc chuyên đề đó. Phần hướng dẫn các bài tập này được chúng tôi đưa ra ngay sau để giúp các bạn đối chiếu với kết quả của mình.

Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu 4 đề thi và đáp án theo cấu trúc mới, nhằm giúp các em học sinh làm quen với dạng đề thi sắp tới.

Mặc dù đã dành nhiều thời gian và tâm huyết cho cuốn sách, dù vậy sai sót là điều khó tránh khỏi. Mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong những lần tái bản.

Mọi đóng góp xin gởi về:

* **Trung tâm sách Giáo dục Alpha**

ĐT: 0862676463, email: alphabookcenter@yahoo.com,

* **Công ti An Pha VN**

50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM

Điện thoại: 08.38547464

Tác giả

# CHƯƠNG 1. HÀM SỐ VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

## Chuyên đề 1.
## Tính đơn điệu của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

### I. Tóm tắt lí thuyết

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}.$$

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}.$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0\ \forall x \in (\alpha;\beta)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0\ \forall x \in (\alpha;\beta)$.

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Khi đó, để giải quyết bài toán $f(x) \geq 0\ (\leq 0)\ \forall x \in (\alpha;\beta)$ (1) ta có các cách sau:

**Cách 1:** Nếu biến đổi (1) về dạng: $h(x) \geq g(m)$ (hoặc $h(x) \leq g(m)$).

Khi đó (1) đúng khi và chỉ khi $g(m) \leq \min\limits_{[\alpha;\beta]} h(x)$ hoặc $g(m) \geq \max\limits_{[\alpha;\beta]} h(x)$

(Với điều kiện tồn tại $\min\limits_{[\alpha;\beta]} h(x)$ và $\max\limits_{[\alpha;\beta]} h(x)$).

**Cách 2:** Nếu chúng ta không cô lập được tham số $m$ thì ta dùng dấu tam thức bậc hai để giải quyết.

### II. Các ví dụ minh họa

**1. Các ví dụ mẫu cơ bản**

**Ví dụ 1.** Tìm $m$ để hàm số

1) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+2)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2) $y = -2x^3 + 6(m+1)x^2 + 6(m-1)x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

***Lời giải***

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(x^2 - 2mx + m + 2)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

Vậy $-1 \leq m \leq 2$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -6\left|x^2 - 2(m+1)x - m + 1\right|$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $x^2 - 2(m+1)x - m + 1 \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 3m \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 0$.

Vậy $-3 \le m \le 0$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (3m-1)x^2 + (m+3)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

***Lời giải***

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 2(3m-1)x + m + 3$.

- $m = 0$, khi đó $y' = 2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{2}$.

Do đó $m = 0$ không thỏa bài toán.

- $m \ne 0$, khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $mx^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' = (3m-1)^2 - m(m+3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 8m^2 - 9m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le m \le 1.$$

Vậy $\dfrac{1}{8} \le m \le 1$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3[(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3]$.

- $m = 1$, khi đó $y' = -3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

- $m \ne 1$, khi đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(2m-3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ m^2 - 3m + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m \le 1$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

$$y = (m^2 - 3m + 2)x^3 - 3(m-1)x^2 + 6x + m^2$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

***Lời giải***

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3[(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2(m-1)x + 2]$.

- $m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow m=1, m=2$.

  +) $m=1$, ta có $y'=6>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

  +) $m=2$, ta có $y'=3(-2x+2) \Rightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$. Suy ra $m=2$ không thỏa mãn bài toán.

- $m^2-3m+2\ne 0 \Leftrightarrow m\notin\{1,2\}$. Khi đó, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

  Hay $(m^2-3m+2)x^2-2(m-1)x+2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ \Delta' = (m-1)^2-2(m-1)(m-2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2)>0 \\ (m-1)(3-m)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m\ge 3 \end{array}\right..$$

  Vậy $m\le 1$ hoặc $m\ge 3$ là những giá trị cần tìm.

**2. Các ví dụ phân loại**

**Ví dụ 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **(Khối A - 2013).**

2) $y=\dfrac{x^3}{3}+mx^2-(5m+3)x+3$ đồng biến trên $(-\infty;-4)$.

***Lời giải***

1) Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x>0$

Hay là: $m+1\le x^2-2x+1=(x-1)^2,\ \forall x>0$ (*)

Do $\min\limits_{x>0}(x-1)^2=0$ nên (*) $\Leftrightarrow m+1\le 0 \Leftrightarrow m\le -1$.

Vậy $m\le -1$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có $y'=x^2+2mx-5m-3$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-4)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0\ \forall x<-4$

Hay $x^2+2mx-5m-3\ge 0\ \forall x<-4 \Leftrightarrow x^2-3\ge m(5-2x)\ \forall x<-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3}{5-2x}\ge m\ \forall x<-4$ (*).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3}{5-2x},\ x\le -4$ ta có:

$$f'(x)=\frac{2x(5-2x)+2(x^2-3)}{(5-2x)^2}=\frac{-2x^2+10x-6}{(5-2x)^2}<0\ \forall x\le -4.$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow m\le \min\limits_{x\le -4} f(x)=f(-4)=1$.

Vậy $m\le 1$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

1) $y = mx^3 - 3(m+1)x^2 + 3(3m+1)x + 1$ đồng biến trên $[1;2]$

2) $y = \dfrac{(m-1)}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x + 3$ nghịch biến trên $(-1;5)$.

***Lời giải***

1) Ta có $y' = 3\left[mx^2 - 2(m+1)x + 3m + 1\right]$.

- $m = 0$, ta có $y' = 3(-2x+1) < 0\ \forall x \in [1;2]$ nên $m = 0$ không thỏa bài toán.
- $m \neq 0$, khi đó hàm số đồng biến trên $[1;2]$ khi và chỉ khi $y' \geq 0\ \forall x \in [1;2]$

Hay $mx^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 \geq 0\ \forall x \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) \geq 2x - 1\ \forall x \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{2x-1}{x^2 - 2x + 3}\ \forall x \in [1;2]$ (*).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$, $x \in [1;2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{2(x^2-2x+3) - (2x-2)(2x-1)}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2-2x+3)^2} \geq 0\ \forall x \in [1;2].$$

Suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = 1$. Do đó (*) $\Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy $m \geq 1$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có $y' = (m-1)x^2 + 2mx + 2m - 1$

- $m = 1$, ta có $y' = 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$ nên $m = 1$ không thỏa mãn bài toán.
- $m \neq 1$, khi đó hàm số nghịch biến trên $(-1;5)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0\ \forall x \in (-1;5)$

Hay $(m-1)x^2 + 2mx + 2m - 1 \leq 0\ \forall x \in (-1;5)$

$\Leftrightarrow m(x^2 + 2x + 2) \leq x^2 + 1\ \forall x \in (-1;5)$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2} = f(x)\ \forall x \in (-1;5)$ (*).

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in [-1;5]$, ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2x+2) - (x^2+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x^2+2x-2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Do $f(-1) = 2,\ f(5) = \dfrac{26}{37},\ f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;5]} f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ nên $(*) \Leftrightarrow m \le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $m \le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y = mx^3 - 3(2m-1)x^2 + 3(m-1)x + m$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

2) $y = \dfrac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 1$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

***Lời giải***

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3[mx^2 - 2(2m-1)x + m - 1]$

- $m = 0$, ta có: $y' = 3(2x-1) > 0,\ \forall x > 2$ nên hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- $m \ne 0$, khi đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \ge 0,\ \forall x > 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(2m-1)x + m - 1 \ge 0,\ \forall x > 2$ (1)

Đặt $g(x) = mx^2 - 2(2m-1)x + m - 1$, có

$a = m,\ \Delta' = 3m^2 - 3m + 1 > 0,\ \forall m$

Do đó $g(x)$ luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m-1-\sqrt{\Delta'}}{m},\ x_2 = \frac{2m-1+\sqrt{\Delta'}}{m}.$$

+) Với $m < 0$, ta có $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [x_2;x_1]$. Do đó, không thể xảy ra trường hợp $g(x) \ge 0,\ \forall x > 2$. Nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

+) Với $m > 0$, ta có $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right.$.

Do đó $g(x) \ge 0,\ \forall x > 2 \Leftrightarrow x_2 \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{2m-1+\sqrt{\Delta'}}{m} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} \le 1$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 3m + 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$.

Vậy $0 \le m \le 1$ là những giá trị cần tìm.

2) $y' = (m^2-1)x^2 - 2(m-1)x - 2 = f(x)$

• Nếu $m = 0$ thì $y' = -2x - 3 \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ hay hàm số chỉ đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$. Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• $m \neq 0$, khi đó hàm số đồng biến trên toàn trục số $\Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - m(2m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + 5m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{29}}{2}.$$

Vậy $m \geq \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3\left[(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5\right]$

• $m = 1$, ta có: $y' = -9 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên toàn trục số

Suy ra $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

• $m \neq 1$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(2m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ -m + 4 \leq 0 \end{cases}$$ hệ này vô nghiệm.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

3) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 + 2mx + m + 2$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

Vậy $-1 \leq m \leq 2$ là những giá trị cần tìm.

4) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3\left[x^2 - 2(m+1)x - 2m + 1\right]$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 2m + 1 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Vậy $-4 \leq m \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

5) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m+2)x + 3m - 2$

• $m = 0$, ta có $y' = -4x - 2$ nên hàm số không thể nghịch biến trên toàn trục số.

• $m \neq 0$, hàm số nghịch biến trên toàn trục số khi và chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 6m + 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Vậy $m \le \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

6) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = mx^2 - 2mx + 2m + 1$

- $m = 0$, ta có $y' = 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên toàn trục số.
- $m \ne 0$, hàm số đồng biến trên toàn trục số khi và chỉ khi $y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = m^2 - m(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy $m \ge 0$ là những giá trị cần tìm.

7) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x - 3m + 1$.

- Nếu $m = -2$, khi đó $y' = 7 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = -2$ thỏa bài toán
- Nếu $m \ne -2$, khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m + 2 > 0 \\ \Delta' = (m+2)(4m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ 4m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \le -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $-2 \le m \le -\dfrac{1}{4}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 2.**

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = mx^2 - 2(2m-1)x + 4m - 1$

- $m = 0$, ta có $y' = 2x - 1 \Rightarrow y' \le 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.
- $m \ne 0$, khi đó hàm số nghịch trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0,\ \forall x < 1$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2(2m-1)x + 4m - 1 \le 0,\ \forall x < 1$ (2)

Để giải (2) ta xét các cách sau

**Cách 1:**

Ta có: (2) $\Leftrightarrow m(x^2 - 4x + 4) \le 1 - 2x,\ \forall x < 1 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1-2x}{x^2-4x+4},\ \forall x < 1$ (3)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-4x+4},\ x \le 1$, có

$f'(x) = \dfrac{2(x^2 - x - 2)}{(x^2-4x+4)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $-1$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có (3) thỏa mãn khi và chỉ khi $m \le -1$.

Vậy $m \le -1$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m+1)x + 2(m-1)$

• Với $m = 0$, ta có $y' = -2x - 2 \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow x > -1$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(0;4)$ nên $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

• $m \neq 0$, hàm số nghịch biến trên $(0;4)$ khi và chỉ khi $y' \le 0,\ \forall x \in (0;4)$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2(m+1)x + 2(m-1) \le 0,\ \forall x \in (0;4)$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2x+2}{x^2 - 2x + 2},\ \forall x \in (0;4)3$ (1).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2 - 2x + 2}$ với $x \in [0;4]$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 8}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{5}-1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $1$ | $\nearrow$ | $2+\sqrt{5}$ | $\searrow$ | $1$ |

Từ đó, suy ra (1) $\Leftrightarrow m \le 1$.

3) Ta có: $y' = -2x^2 + 2(m+1)x + 2m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in (0;2)$ (*)

Vì $y'(x)$ liên tục tại $x = 0$ và tại $x = 2$ nên (*) $\Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in [0;2]$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 2(m+1)x + 2m \ge 0,\ \forall x \in [0;2]$

$\Leftrightarrow m(x+1) \ge x^2 - x,\ \forall x \in [0;2] \Leftrightarrow m \ge g(x),\ \forall x \in [0;2]$

(Trong đó $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$)

$\Leftrightarrow m \ge \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, g(x)$, xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2} \quad, \forall x \in [0;2]$

$g(0) = 0;\ g(2) = \dfrac{2}{3};\ g(-1+\sqrt{2}) = -3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \underset{[0;+\infty)}{\text{Max}}\, g(x) = \dfrac{2}{3}$ tại $x = 2$

Vậy $m \ge \dfrac{2}{3}$ thì hàm số đồng biến trên khoảng (0;2).

4) Ta có: $y' = -(m-1)x^2 + 2(m+2) + 3m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in (1;2)$

Vì $y'(x)$ liên tục tại $x = 2;\ x = 1$ nên $\Leftrightarrow y' \ge 0\ \ \forall x \in (1;2)$ (*)

$\Leftrightarrow -(m-1)x^2 + 2(m+1)x + 3m \ge 0\ , \forall x \in (-\infty;-2]$

$| x^4 - 4x^2 + 3 | = m$ (Trong đó $g(x) = \dfrac{-x^2 - 4x}{-x^2 + 2x + 3}$)

$\Leftrightarrow m(-x^2 + 2x + 3) + x^2 + 2x \ge 0\ \forall x \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in [1;2]$ (Trong đó: $g(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$)

$\Leftrightarrow m \ge \underset{[1;2]}{\text{Max}}\, g(x)$. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$ trên $[1;2]$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{-6x - 6}{(x^2 + 2x + 3)^2} < 0\ \forall x \in [1;2] \qquad \Rightarrow \underset{[1;2]}{\text{Max}}\, g(x) = -\dfrac{3}{4}$ tại $x = 1$

Vậy $m \ge -\dfrac{3}{4}$ thì hàm số đồng biến trên khoảng (0;2)

5) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

*Cách 1.* Hàm đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0\ \ \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \ge 0,\ \forall x \in (2;+\infty)$ **(1)**

**TH 1:** $m = 0$ khi đó (1) chỉ đúng với mọi $x \ge 3$.

**TH 2:** $m < 0$ ta thấy trường hợp này không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**TH 3:** $m > 0$, $f(x)$ có $\Delta' = -2m^2 + 4m + 1$

* Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ (do $m > 0$) $\Rightarrow f(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

* Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ (*).

Khi đó $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \geq 0,\ \forall x > 2 \Leftrightarrow x_2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1+\sqrt{\Delta'}}{m} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} \leq m+1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$$

Kết hợp với (*) $\Rightarrow \frac{2}{3} \leq m < \frac{2+\sqrt{6}}{2}$. Vậy $m \geq \frac{2}{3}$ là những giá trị cần tìm.

*Cách 2:* Hàm đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0,\quad \forall x \in (2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0\ \ \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3} = g(x),\ \forall x \in (2;+\infty).$$

Xét hàm số $g(x)$ với $x \geq 2$, ta có: $g'(x) = \frac{2(x^2-6x+3)}{(x^2-2x+3)^2}$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{6}$ (vì $x \geq 2$) và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Lập bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\geq 2} g(x) = g(2) = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow m \geq g(x)\ \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{x\geq 2} g(x) = \frac{2}{3}.$$

6) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + m - 1$, $\Delta' = 3m + 6$

* Nếu $m \leq -2 \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow y' \leq 0\ \forall x \in R \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng đồng biến.

* Nếu $m > -2 \Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$

Suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 1$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{4(m-1)}{3} > 1 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}.$$

Vậy $m > -\frac{5}{4}$ là những giá trị cần tìm.

7) Ta có $y' = x^2 + 2(m-1)x + 2m + 1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1} \geq -2m\ \ \forall x \in (0;3)$ (*)

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+1}, x \in [0;3]$

Ta có: $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (*) $\Leftrightarrow -2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

8) Ta có: $y' = 3(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m$

- $m = -1 \Rightarrow y' = -2 < 0$ (loại).
- $m > -1$. Khi đó hàm số luôn có khoảng đồng biến có độ dài lớn hơn 1.
- $m < -1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa $|x_1 - x_2| \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9(m+1)^2 - 6m(m+1) > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(m+1) > 0 \\ 3 - \dfrac{8m}{3(m+1)} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 < 0 \\ m + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -9 \quad (\text{Do } m < -1).$$

Vậy $m \in (-\infty; -9] \cup (-1; +\infty)$ là những giá trị cần tìm.

9) Ta có $y' = 3(x^2 + 2x - m^2 + 1) = 3(x - m + 1)(x + m + 1)$

- Nếu $m - 1 = -m - 1 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' \geq 0 \ \forall x$ nên hàm số đồng biến trên R.
- Nếu $m > 0$, suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 < 1 \\ m - 1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.
- Nếu $m < 0$, suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 2 \\ m - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$.

Vậy $|m| > 3$.

## Chuyên đề 2.

## Cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$

### I. Tóm tắt lí thuyết

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$

1) Hàm số có hai cực trị (có cực trị) khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

2) Hàm số có hai cực trị trái dấu khi và chỉ khi đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

3) Hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0\ (> 0) \end{cases}$

Cách tính cực trị hàm số bậc ba:

**Cách 1:** Nếu hai nghiệm $x_1, x_2$ của phương trình $y' = 0$ là nghiệm "đẹp" tức là $\Delta = (\alpha m + \beta)^2$ thì ta thay trực tiếp vào phương trình hàm số.

**Cách 2:** Nếu hai nghiệm $x_1, x_2$ của phương trình $y' = 0$ có hình thức phức tạp thì ta chia $y$ cho $y'$ ta được $y = (\alpha x + \beta)y' + mx + n$. Khi đó:

$y_1 = mx_1 + n$; $y_2 = mx_2 + n$ và đường thẳng $y = mx + n$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

## II. Các ví dụ minh họa

### 1. Các ví dụ mẫu cơ bản

**Ví dụ 1.** Tìm $m$ để hàm số

1) $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(m+1)x + 1$ có hai điểm cực trị.

2) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m+1)x^2 + (2m+3)x - 1$ có cực đại.

***Lời giải***

1) Ta có $y' = 3[x^2 - 2(m-1)x + m + 1]$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ (1).

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta' = (m-1)^2 - (m+1) = m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 3$.

Vậy $m < 0$ hoặc $m > 3$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có $y' = mx^2 - 2(m+1)x + 2m + 3$.

- $m = 0$, khi đó $y' = -2x + 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{3}{2}$. Do đó $m = 0$ thỏa bài toán.

- $m \neq 0$, khi đó hàm số có cực đại khi và chỉ khi phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m+1)x + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Điều đó xảy ra khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - m(2m+3) = -m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(5m-2)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

2) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m+2)x^2 + (m^2+2)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = -3$.

***Lời giải***

1) Ta có $y' = 3[x^2 - 2(m+1)x + 5m - 2]$, $y'' = 6(x - m - 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại

$x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2(m+1) + 5m - 2 = 0 \\ -6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

2) Ta có $y' = mx^2 - 2(m+2)x + m^2 + 2$, $y'' = 2mx - 2(m+2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$

$$\begin{cases} y'(-3) = 0 \\ y''(-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 15m + 14 = 0 \\ -2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1, m = -14.$$

Vậy $m = -1, m = -14$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 3.** Tìm các số $a, b, c, d$ sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

***Lời giải***

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , $f''(x) = 6ax + 2b$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (1).$$

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

Ta kiểm tra lại $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6x$ , $f''(x) = -12x + 6$

$f''(0) = 6 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

$f''(1) = -6 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Vậy: $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-4)x + 1$ có hai điểm cực trị lớn hơn $-1$.

2) $y = \dfrac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (m^2+7)x - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1, x_2$ thỏa $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4$.

3) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m+1)x^2 + (2m+1)x - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1, x_2$ thỏa $x_1^2 = 9x_2$.

*Lời giải*

1) Ta có $y' = 3(x^2 - 2mx + m - 4)$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1).

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$.

Hay $\Delta' = m^2 - m + 4 > 0$ , bất phương trình này đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Ta có $x_1, x_2 > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 > 0 \\ x_2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 + 2m + 1 > 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có $y' = x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 7$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 7 = 0$ (2).

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm $x_1, x_2$

Hay $\Delta' = (m + 2)^2 - (m^2 + 7) = 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$ (*).

Khi đó, theo định lí Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m + 2)$, $x_1x_2 = m^2 + 7$.

Do đó $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 7 - 4(m + 2) = 4$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 5$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m = 5$ là giá trị cần tìm.

3) Ta có:

$y' = mx^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1$, $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1 = 0$ (2)

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2$ thỏa $x_1^2 = 9x_2$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa $x_1^2 = 9x_2$.

(2) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -m^2 + m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Khi đó theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m + 1)}{m} = 2 + \frac{2}{m} \\ x_1x_2 = \frac{2m + 1}{m} = 2 + \frac{1}{m} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x_1 + \frac{x_1^2}{9} = 2 + \frac{2}{m} \\ \frac{x_1^3}{9} = 2 + \frac{1}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{2x_1^3}{9} - \frac{x_1^2}{9} - x_1 = 2 \Leftrightarrow 2x_1^3 - x_1^2 - 9x_1 - 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$

Từ đó ta tìm được $m = 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 5.** Tìm $m$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai cực trị $B$ và $C$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ với A(2;3). **(ĐH Khối B - 2014).**

***Lời giải***

Ta có $y' = 3(x^2 - m)$, suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó $B(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + 1)$, $C(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1)$.

Tam giác $ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow AB^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{m} - 2)^2 + (-2m\sqrt{m} - 2)^2 = (\sqrt{m} + 2)^2 + (2m\sqrt{m} - 2)^2$

$\Leftrightarrow -4\sqrt{m} - 4\sqrt{m} + 8m\sqrt{m} + 8m\sqrt{m} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{m}(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (vì $m > 0$).

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 6.** Tìm *m* để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$ có các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

***Lời giải***

Ta có $y' = 6x^2 - 18x + 12, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 + m \\ y = 4 + m \end{array}\right.$

Gọi $A(1; 5 + m); B(2; 4 + m)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1)$, $\overrightarrow{OA} = (1; 5 + m)$ *A*, *B*, *O* không thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OA}$ không cùng phương khi và chỉ khi $5 + m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -6 (*)$

Ta có: $OA = \sqrt{1 + (5 + m)^2}; OB = \sqrt{4 + (4 + m)^2}; AB = \sqrt{2}$.

Chu vi tam giác *OAB*:

$$P_{OAB} = OA + OB + AB = \sqrt{1 + (5 + m)^2} + \sqrt{4 + (4 + m)^2} + \sqrt{2}$$

$P_{OAB}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\sqrt{1 + (5 + m)^2} + \sqrt{4 + (4 + m)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $\vec{u}(1; -5 - m); \vec{v}(2; 4 + m)$, ta có:

$|\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{1+(-5-m)^2} + \sqrt{4+(4+m)^2} = \sqrt{1+(5+m)^2} + \sqrt{4+(4+m)^2}$.

Mặt khác

$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Rightarrow \sqrt{1+(-5-m)^2} + \sqrt{4+(4+m)^2} \geq \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng khi và chỉ khi $0 < \frac{1}{2} = \frac{-5-m}{4+m} \Leftrightarrow m = -\frac{14}{3}$ (thỏa mãn (*)).

Vậy, với $m = -\frac{14}{3}$ thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ *O* tạo thành một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

**Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1$ (1), *m* là tham số. Tìm m dương để đồ thị hàm số (1) có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$.

***Lời giải***

Ta có $y' = 3x^2 - 3(m-2)x - 3(m-1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = -1 \\ x = x_2 = m-1. \end{array}\right.$$

Chú ý rằng với $m > 0$ thì $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x_1 = -1$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = m - 1$.

Do đó: $y_{CĐ} = y(-1) = \frac{3m}{2}$, $y_{CT} = y(m-1) = -\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1$.

Từ giả thiết ta có

$$2.\frac{3m}{2} - \frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 6m - 6 - (m+2)(m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với yêu cầu $m > 0$ ta có giá trị của m là: $m = 1$, $m = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$ (1). Chứng minh rằng với $m \neq 0$ đồ thị hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị và $(x_0 - 1)(y_0 + 2) \geq 0$. Trong đó $(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

***Lời giải***

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2-1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - m, x_2 = 1 + m$

Do đó, khi $m \neq 0$ thì $x_1 \neq x_2$ nên đồ thị hàm số (1) luôn có hai cực trị

$$A(1-m; -2-2m^3),\ B(1+m; -2+2m^3).$$

Suy ra phương trình $AB: 2m^2x - y - 2m^2 - 2 = 0$.

Do đó $y_0 = 2m^2x_0 - 2m^2 - 2$ nên

$$(x_0 - 1)(y_0 + 2) = (x_0 - 1)(2m^2x_0 - 2m^2) = 2m^2(x_0 - 1)^2 \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m-1)x - 1$ có hai cực trị trái dấu.

***Lời giải***

Ta có $y' = 3\left[x^2 - 2x - m(m-1)\right]$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m(m-1) = 0$ (1).

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m(m-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0$ đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chia $y$ cho $x^2 - 2x - m(m-1)$, ta được:

$y = \left[x^2 - 2x - m(m-1)\right](x-1) - 2(m^2 - m + 1)x - (m^2 - m + 1)$

Suy ra $y_1 = -2(m^2 - m + 1)x_1 - (m^2 - m + 1) = -(m^2 - m + 1)(2x_1 + 1)$

$y_2 = -(m^2 - m + 1)(2x_2 + 1)$

Do đó, hai cực trị của hàm số trái dấu khi và chỉ khi $y_1 . y_2 < 0$

$\Leftrightarrow (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) < 0 \Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow -4m(m-1) + 2.2 + 1 < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1+\sqrt{6}}{2} \\ m < \dfrac{1-\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m < \dfrac{1-\sqrt{6}}{2}$ và $m > \dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - mx^2 + (m+2)x + m - 1$ có cực trị.

2) $y = (m-1)x^3 - 3mx^2 + 3(2m+1)x - m$ có cực đại.

3) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m-1)x^2 + (2m-1)x - m$ có cực trị

4) $y = (m-1)x^3 + x^2 - (m-1)x + m$ không có cực trị

5) $y = x^3 - (m+2)x^2 + (4m-3)x + 4$ đạt cực đại tại $x = 1$

6) $y = -\dfrac{mx^3}{3} + (m+1)x^2 + (3m-2)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

7) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m^2+m)x^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 4$.

**Bài 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) $y = \dfrac{mx^3}{3} - (m+1)x^2 + (m-3)x + 1$ đạt cực trị tại $x_1, x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 22$.

2) $y = \dfrac{2}{3}x^3 + mx^2 - (m+1)x - 1$ đạt cực trị tại $x_1, x_2$ sao cho $P = \dfrac{1}{(2x_1-1)^2} + \dfrac{1}{(2x_2-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + (m-1)x - m^2$ đạt cực trị tại $x_1, x_2$ thỏa $x_1 = x_2^2$.

4) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + (m^2-3)x$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2$ là hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

5) $y = \dfrac{x^3}{3} - mx^2 + (m+2)x - 1$ có hai điểm cực trị lớn hơn $1$.

6) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - 3mx + 4$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1, x_2$ thỏa điều kiện sau: $\dfrac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \dfrac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} = 2$.

7) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}mx^2 + 4mx + m^2$ đạt cực trị tại $x_1, x_2$ sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất

$$A = \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 12m} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 12m}{m^2}.$$

8) $y = (m-1)x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + m$ có hai điểm cực trị nhỏ hơn $3$.

**Bài 3.** Tìm $m$ để hàm số

1) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 20m + 13$ có hai cực trị lớn hơn $1$.

2) $y = -x^3 - 3x^2 + 3m(m-2)x - 2m + 1$ có hai cực trị cùng dấu.

3) $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+1)x - 1$ có hai cực trị trái dấu.

4) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m^2$ có cực đại, cực tiểu và tung độ điểm cực đại đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1). Tìm m sao cho đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 48 (**ĐH Khối B - 2012**).

**Bài 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số

1) $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ

2) $y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$

3) $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m + 2$ có hai điểm cực trị sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

4) $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

5) $y = x^3 - 3x^2 + (3m - 3)x + 2$ có cực đại, cực tiểu cùng với điểm $I(-1;-1)$ tạo thành tam giác vuông tại $I$.

## *Hướng dẫn giải*

**Bài 1.**

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2$.

Vậy $m < -1$ và $m > 2$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3\left[(m-1)x^2 - 2mx + 2m + 1\right]$

- $m = 1$, ta có: $y' = 3(-2x + 3)$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$. Do đó, $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.
- $m \neq 0$, hàm số có cực đại khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - (m-1)(2m+1) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

3) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 2m - 1$

- $m = 0$, suy ra $y' = 2x - 1$ nên hàm số có một cực trị

- $m \neq 0$ hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

4)TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m-1)x^2 + 2x - m + 1$

- Với $m = 1$ ta có $y' = 2x$ nên hàm số có một cực trị
- Với $m \neq 1$, hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta' = 1 + 3(m-1)^2 \leq 0$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

5) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+2)x + 4m - 3,\ y'' = 6x - 2(m+2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Khi đó $y''(1) = 2 - 2m = -2 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

6) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m+1)x + 3m - 2,\ y'' = -2mx + 2(m+1)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ thì $y'(-2) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{6}{5}$

Khi đó: $y''(-2) = 6m + 2 = -\frac{26}{5} < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Vậy không có giá trị nào của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

7) Ta có: $y' = mx^2 - 2(m^2 + m)x + m - 1,\ y'' = 2mx - 2(m^2 + m)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$ nên ta có: $y'(4) = 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 9m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = \frac{1}{8}$.

- Với $m = 1$, ta có $y''(4) = 6m - 2m^2 = 4 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$
- Với $m = \frac{1}{8}$, ta có: $y''(4) = \frac{23}{32} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$.

Vậy $m = 1$ và $m = \frac{1}{8}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 2.**

1) Ta có $y' = mx^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$,

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0 \quad (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ hay

Khi đó, theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m} \end{cases}$

Do đó:

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 22 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 22 \Leftrightarrow \dfrac{4(m+1)^2}{m^2} - 3\dfrac{m-3}{m} = 22$

$\Leftrightarrow 21m^2 - 17m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -\dfrac{4}{21}$.

Kết hợp với (*) ta có $m = 1, m = -\dfrac{4}{21}$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có $y' = 2x^2 + 2mx - m - 1$,

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (1)$.

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghệm $x_1, x_2$

hay $\Delta' = m^2 + 2(m+1) = m^2 + 2m + 2 > 0$ đúng với $\forall m$.

Khi đó:

$$P = \frac{(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2}{(4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1)^2} = \frac{4(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 2}{(4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1)^2}$$

$$= \frac{4m^2 + 4m + 4 + 4m + 2}{(-2m - 2 + 2m + 1)^2} = 4m^2 + 8m + 6 = 4(m+1)^2 + 2 \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = -1$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

3) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2x + m - 1$, suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0 \quad (1)$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow m < 2$.

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Mà $x_1 = x_2^2$ nên ta có: $x_2^2 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 1, x_2 = -2$

Từ đó ta tìm được $m = -7$.

4) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - mx + m^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \quad (1)$

(1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = -3m^2 + 12 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 3 > 0 \\ m^2 - 2(m^2 - 3) = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

5) Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1).

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ hay

$\Delta' = m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 2$ (*)

Khi đó:

$x_1, x_2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 - 1 + x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Kết hợp với (*) ta có $2 \leq m < 3$ là những giá trị cần tìm.

6) Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 3m$

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là $\left[ \begin{array}{l} m > 0 \\ m < -3 \end{array} \right.$

Với điều kiện này, hàm số có hai điểm cực trị $x_1$ và $x_2$, với $x_1$ và $x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình: $x^2 - 2mx - 3m = 0$

Do đó ta có: $\begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 - 3m = 0 \\ x_2^2 - 2mx_2 - 3m = 0 \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2mx_1 + 3m \\ x_2^2 = 2mx_2 + 3m \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases}$

Do đó, $\dfrac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \dfrac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2mx_1 + 3m + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \dfrac{m^2}{2mx_2 + 3m + 2mx_1 + 9m} = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x_1 + x_2) + 12}{m} - 2 + \dfrac{m}{2(x_1 + x_2) + 12} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2(x_1 + x_2) + 12 - m)^2}{m(2(x_1 + x_2) + 12m)} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + 12 - m = 0 \Leftrightarrow 3m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm.

7) Ta có $y' = x^2 - 5mx + 4m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5mx + 4m = 0$ (1).

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ hay

$$\Delta = 25m^2 - 16m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > \frac{16}{25} \quad (*).$$

Vì $x_1$ là nghiệm của (1) nên $x_1^2 - 5mx_1 + 4m = 0 \Rightarrow x_1^2 = 5mx_1 - 4m$.

Do đó $x_1^2 + 5mx_2 - 12m = 5m(x_1 + x_2) - 16m = 25m^2 - 16m$.

Tương tự: $x_2^2 + 5mx_1 - 12m = 25m^2 - 16m$.

Suy ra $A = \dfrac{m^2}{25m^2 - 16m} + \dfrac{25m^2 - 16m}{m^2}$.

Do (*) nên $25m^2 - 16m > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $A \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{m}{25m - 16} = \dfrac{25m - 16}{m} \Leftrightarrow m^2 = (25m - 16)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 25m - 16 \\ m = -25m + 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = \dfrac{8}{13} \end{array}\right. .$$

Kết hợp với (*) ta có $m = \dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

8) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3[(m-1)x^2 - 2mx + m^2 - 1]$,

$y' = 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1)

Hàm số có hai điểm cực trị nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-1)(m^2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^3 - 2m^2 - m + 1 < 0 \\ x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^3 - 2m^2 - m + 1 < 0 \\ m + 1 - \dfrac{6m}{m-1} + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^3 - 2m^2 - m + 1 < 0 \\ \dfrac{m^2 + 3m - 10}{m - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -5) \cup (1; 2) \\ m^3 - 2m^2 - m + 1 < 0 \end{cases}$$

(*)

Bằng cách xét hàm số $f(m) = m^3 - 2m^2 - m + 1$ ta chứng minh được $f(m) < 0, \ \forall m \in (-\infty; -5) \cup (1; 2)$. Do đó $(*) \Leftrightarrow m \in (-\infty; -5) \cup (1; 2)$.

Vậy $m \in (-\infty; -5) \cup (1; 2)$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 3.**

1) Ta có: $y' = 3\left|x^2 - 2(m+1)x + 4m\right|$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 2m$.

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $2m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 1$. Khi đó hai cực trị của hàm số là:

$$y_1 = y(2) = 9 - 8m,\ y_2 = y(2m) = -4m^3 + 12m^2 - 20m + 13$$

Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} y_1 > 1 \\ y_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 8m > 0 \\ m^3 - 3m^2 + 5m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (m-1)(m^2 - 2m + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m < 1$ là những giá trị cần tìm.

2) Ta có: $y' = -3\left|x^2 + 2x - m(m-2)\right|$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - m(m-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -m,\ x_2 = m - 2$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow m \neq 1$. Khi đó:

$$y_1 = -2m^3 + 3m^2 - 2m + 1 = -(m-1)(2m^2 - m + 1)$$ và

$$y_2 = (m-1)(2m-1)(m-3)$$

Suy ra yêu cầu bài toán tương đương với $y_1.y_2 > 0$

$$\Leftrightarrow -(m-1)^2(2m^2 - m + 1)(2m-1)(m-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (2m-1)(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} < m < 3 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} < m < 3 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

3) Ta có: $y' = 3(x^2 - 2x - m(m+1)) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m(m+1) = 0 \quad (1)$

Vì $\Delta' = 1 + m(m+1) = m^2 + m + 1 > 0,\ \forall m$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1, x_2$ với $x_1, x_2$ là hai nghiệm của (1).

Suy ra $y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 - m(m+1)x_1 - 1$

$= x_1(2x_1 + m(m+1)) - 3(2x_1 + m(m+1)) - m(m+1)x_1 - 1$

$= 2x_1^2 - 2m(m+1)x_1 - 6x_1 - 3m(m+1) - 1$

$= 2(2x_1 + m(m+1)) - 2m(m+1)x_1 - 6x_1 - 3m(m+1) - 1$

$= (m^2 + m + 1)(-2x_1 - 1)$.

Tương tự: $y_2 = (m^2 + m + 1)(-2x_2 - 1)$

Nên hàm số có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0$

$\Leftrightarrow (2x_1+1)(2x_2+1)<0 \Leftrightarrow 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1<0$

$$\Leftrightarrow -4m(m+1)+5<0 \Leftrightarrow 4m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ m<\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m>\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ m<\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

4) Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

- Suy ra

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow (x-m-1)(x-m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1\end{array}\right.$

Vẽ bảng biến thiên ta tìm được hàm số đạt cực đại tại $x=m-1$ và giá trị cực đại $y_{cd}=m^2-3m+2=\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\ge -\dfrac{1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra $m=\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Bài 4.** Ta có: $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B khi và chỉ khi $m\ne 0$. Khi đó:
$A(0;3m^3)$, $B(2m;-m^3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Phương trình $AB: 2m^2x+y-3m^3=0$. Suy ra $d(O,AB)=\dfrac{|3m^3|}{\sqrt{4m^4+1}}$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}d(O,AB).AB=\frac{1}{2}\frac{|3m^3|}{\sqrt{4m^4+1}}.\sqrt{4m^2+14m^6}=3m^4$$

Do đó $S_{\Delta OAB}=48 \Leftrightarrow m^4=16 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Kết hợp với điều kiện $m\ne 0$, ta có $m=\pm 2$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 5.**

1) Ta có $y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $g'(x)=-3x^2+6x+3(m^2-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9m^2>0 \Leftrightarrow m\ne 0$.

Gọi $A, B$ là các điểm cực trị ta có:

$$A(1-m; -2-2m^3);\ B(1+m; -2+2m^3).$$

Điểm $O$ cách đều hai điểm $A, B$

$$\Leftrightarrow\ OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}\ (m \neq 0).$$

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x,\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$

Suy ra

$$A(0; m),\ B(-2; m+4) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (0; m), \overrightarrow{OB} = (-2; m+4) \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = m^2 + 4m$$

Do đó: $\cos\widehat{AOB} = \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB} = \dfrac{m^2+4m}{|m|\sqrt{(m+4)^2+4}}$

Nên $\widehat{AOB} = 120^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{AOB} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m^2+4m}{|m|\sqrt{m^2+8m+20}} = -\dfrac{1}{2}$ (1)

Vì ta phải có $m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2(m+4) = \sqrt{m^2+8m+20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ 3m^2 + 24m + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12+2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $m = \dfrac{-12+2\sqrt{3}}{3}$ là giá trị cần tìm.

3) Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$ (*)

Khi đó, gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có $y = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\right)y' + [2(m-1)x + 2m + 2]$. Do đó

$$y_1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y'(x_1) + [2(m-1)x_1 + 2m + 2] = 2(m-1)x_1 + 2m + 2$$

và $y_2 = 2(m-1)x_2 + 2m + 2$.

Suy ra tọa độ của *A*, *B* thỏa mãn phương trình $y = 2(m-1)x + 2m + 2$, hay phương trình *AB* là $y = 2(m-1)x + 2m + 2$.

Ta có giao điểm của *AB* với *Ox*, *Oy* lần lượt là

$$M\left(-\frac{m+1}{m-1}; 0\right),\ N(0; 2m+2).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow S_{OMN} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OM.ON = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-\frac{m+1}{m-1}\right|.\left|2m+2\right| = 1$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = \left|m-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m+1)^2 = m-1 \\ (m+1)^2 = -(m-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3 \\ m=0\end{array}\right.$ (thỏa mãn (*)).

4) Ta có $y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \\ x=2m\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại , cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Hai điểm cực trị là $A(0;-3m-1);\ B(2m;4m^3-3m-1)$

Trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(m;2m^3-3m-1)$

Vectơ $\overrightarrow{AB} = (2m;4m^3)$ ; VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (8;-1)$.

Hai điểm cực đại , cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}I \in d \\ AB \perp d\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m + 8(2m^3-3m-1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow m = 2.$

5) Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3m - 3 = 3(x^2 - 2x + m - 1)$

Từ đó: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0$

Hàm số đã cho có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, $y'$ triệt tiêu và đổi dấu qua hai nghiệm đó.

Điều đó tương thích với điều kiện: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1-(m-1) > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Thực hiện phép chia $y$ cho $y'$ ta thu được:

$$y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + (2m-4)x + m + 1.$$

Tọa độ cực điểm $(x\ \ y)$ thỏa hệ:

$$\left\{\begin{array}{l}y' = 0 \\ y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + (2m-4)x + m + 1\end{array}\right. \Rightarrow y = (2m-4)x + m + 1$$

Điều này có nghĩa rằng tọa độ hai cực điểm luôn nằm trên đường thẳng $d: y = (2m-4)x + m + 1$

Từ đó nếu ta gọi tọa độ hai cực điểm lần lượt là

$A(x_1;(2m-4)x_1 + m + 1)$ ; $B(x_2;(2m-4)x_2 + m + 1)$

Do yêu cầu bài toán là tam giác IAB vuông tại I nên ta có: $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0$ (*)

Với $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{IA} = (x_1 + 1\ \ (2m-4)x_1 + m + 2) \\ \overrightarrow{IB} = (x_2 + 1;(2m-4)x_2 + m + 2)\end{array}\right.$

nên (*) $\Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1)+[(2m-4)x_1+m+2][(2m-4)x_2+m+2]=0$

$\Leftrightarrow (4m^2-16m+17)x_1x_2+(2m^2-7)(x_1+x_2)+m^2+4m+5=0$ (1)

Mặt khác ta có $x_1$ ; $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$ nên theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Từ đó ta có (1) trở thành:

$$(4m^2-16m+17)(m-1)+2(2m^2-7)+m^2+4m+5=0$$

$\Leftrightarrow 4m^3-15m^2+37m-16=0 \Leftrightarrow m=1$.

Kết hợp điều kiện ta có $m=1$ là giá trị cần tìm.

## Chuyên đề 3. Cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ a\neq 0$

### I. Tóm tắt lí thuyết

$y'=2x(2ax^2+b)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=0, x^2=-\dfrac{b}{2a}$

- Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}>0$.
- Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

  $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

  tam giác ABC là tam giác cân tại A và Oy là trục đối xứng
- Tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$
- Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB^2=BC^2$
- Diện tích tam giác ABC: $S=\dfrac{1}{2}AH.BC$ với $H\left(0;\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ nên $AH=\left|\dfrac{b^2}{4a}\right|$.

### II. Các ví dụ minh họa

#### 1. Các ví dụ cơ bản

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

1) Có một điểm cực trị. 2) Có 3 điểm cực trị.

***Lời giải***

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4(m+1)x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m+1 \end{array}\right.$.

1) Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m+1 \le 0 \Leftrightarrow m \le -1$.

2) Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = mx^4 - 2(m-1)x^2 - m$. Tìm $m$ để hàm số có cực tiểu.

***Lời giải***

Ta có $y' = 4x(mx^2 - m + 1)$.

- $m = 0$, ta có $y' = 4x$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{m-1}{m} \end{array}\right.$.

+) Nếu $\dfrac{m-1}{m} \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

+) Nếu $\dfrac{m-1}{m} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$ thì hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Vậy hàm số luôn có cực tiểu với mọi giá trị của m.

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có đồ thị $(C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị $(C_m)$:

1) Có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

2) Có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

***Lời giải***

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó, ba điểm cực trị của $(C_m)$ là: $A(0; m+1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + m + 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m + 1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m}; -m^2)$, $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{m}; 0)$. Ta có $\Delta ABC$ cân tại $A$.

1) Tam giác $ABC$ đều khi và chỉ khi $AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$ (do $m > 0$).

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm.

2) Tam giác $ABC$ vuông khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m > 0$).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$ (1), với $m$ là tham số thực. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120^{\circ}$.

*Lời giải*

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m), y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*)

Khi đó phương trình y' = 0 có ba nghiệm phân biệt là x = 0, $x = \pm\sqrt{m}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^2 - m), B(-\sqrt{m}; -m), C(\sqrt{m}; -m)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$

Do $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}$ nên yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 120^0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 120^0 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(m) + m^4}{m + m^4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m^4 - 2m = -m - m^4$$

$$\Leftrightarrow 3m^4 - m = 0 \Leftrightarrow m(3m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện (*) ta được giá trị cần tìm là $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ (1), với $m$ là tham số thực. Xác định $m$ để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác biết:

1) Có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

2) Có trực tâm là gốc tọa độ.

*Lời giải*

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và $y'$ đổi dấu khi $x$ đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$ Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0; m - 1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

1) Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A| \cdot |x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$;

$AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m}$

Suy ra $R = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1$

$$\Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1,\ m = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ là giá trị cần tìm.

2) Vì B, C đối xứng nhau qua trục tung nên BC luôn vuông góc OA

Do đó O là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Mà $\overrightarrow{OB}(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$, $\overrightarrow{AC}(\sqrt{m}; -m^2)$

Suy ra $-m - m^2(-m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow m(-m^3 + m^2 - m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow m(m - 1)(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right..$$

Vậy $m = 0,\ m = 1$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m \quad (C_m)$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đồ thị hàm số $(C_m)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính vòng tròn nội tiếp lớn hơn 1.

***Lời giải***

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad (1) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số:

$A(0; m)$ ; $B(\sqrt{m}; m - m^2)$ ; $C(-\sqrt{m}; m - m^2)$.

Gọi H là trung điểm BC, suy ra $H(0; m - m^2)$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = m^2\sqrt{m}$

Mặt khác chu vi $\Delta ABC$ là:

$$2p = AB + BC + CA = 2(\sqrt{m^4 + m} + \sqrt{m}) \Rightarrow p = \sqrt{m^4 + m} + \sqrt{m}$$

Mà ta có $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m^4 + m} + \sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{\sqrt{m^3 + 1} + 1} > 1$

(do $m > 0$ )

$$\Leftrightarrow m^2(\sqrt{m^3 + 1} - 1) > m^3 + 1 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^3 + 1} > m + 1 \Leftrightarrow m(m^2 - m - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2 \quad (\text{do } m > 0).$$

Vậy $m > 2$ là các giá trị cần tìm.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số

$$y = mx^4 - 2(2m+1)x^2 + 3m - 2$$

1) Có ba điểm cực trị. 2) Chỉ có cực đại mà không có cự tiểu.

**Bài 2.** Xác định $m$ để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ .

1) Có hoành độ điểm cực tiểu bằng 2.

2) Có cực tiểu mà không có cực đại.

3) Có ba cực trị.

**Bài 3.** Tìm $m$ để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ $(C_m)$

1) Có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều

2) Có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

**Bài 4.** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông (**ĐH Khối A - 2012**).

**Bài 5.** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại (**ĐH Khối B - 2011**).

**Bài 6.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

**Bài 7.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có gốc tọa độ O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

**Bài 8.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị này tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

**Bài 9.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 1$ có ba cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy gấp đôi bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

**Bài 10.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3$ có ba cực trị sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị đạt giá trị nhỏ nhất.

### *Hướng dẫn giải*

**Bài 1.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x(mx^2 - 2m - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ mx^2 = 2m + 1 \end{array}\right.$

1) Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ \dfrac{2m+1}{m} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$.

2) Hàm số có cực đại mà không có cực tiểu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{2m+1}{m} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{1}{2}.$$

**Bài 2.** Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \ (1) \end{array}\right.$$

1) Hoành độ điểm cực trị bằng 2 suy ra

$$y'(2) = 0 \Leftrightarrow 4.8 - 4.(m-1).2 = 0 \Leftrightarrow m = 5$$

Với $m = 5$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Ta có $y'' = 12x^2 - 16 \Rightarrow y''(-2) = 32 > 0$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

2) Hàm số đã cho có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm hoặc có một nghiệm bằng $0 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 \Leftrightarrow m \le 1$.

Vậy $m \le 1$ là giá trị cần tìm.

3) Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt phương trình (1) có 2 nghiệm khác $0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.

**Bài 3.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; m+1),\ B(-\sqrt{m}; -m^2 + m + 1),\ C(\sqrt{m}; -m^2 + m + 1)$$

1) Ta có tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$ (do $m > 0$)

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm.

2) Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $H(0; -m^2 + m + 1)$. Do đó $AH = m^2$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.CB = m^2\sqrt{m}$

Nên $S_{\Delta ABC} = 32 \Leftrightarrow \sqrt{m^5} = 32 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

**Bài 4.** Ta có: $y' = 4x(x^2 - m - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > -1$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là:

$A(0; m^2),\ B(\sqrt{m+1}; -2m-1),\ C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Do tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (do $m > -1$)

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

**Bài 5.** Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0; m),\ B(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1),\ C(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$

Do đó $OA = BC \Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn $m > -1$)

Vậy $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 6.** Ta có $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó toạ độ ba điểm cực trị của đồ thi hàm số là: $A(0;2), B(-\sqrt{m}; -m^2 + 2), C(\sqrt{m}; -m^2 + 2)$

Vì tam giác BAC cân tại A nên $OA \perp BC$ nên O là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow OB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC} = 0$ (*)

$\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{m}; -m^2 + 2),\ \overrightarrow{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$

Nên (*) $\Leftrightarrow -m + m^2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^3 - 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Bài 7.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x(x^2 - m), y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; 2m^2 - 1),\ B(-\sqrt{m}; m^2 - 1),\ C(\sqrt{m}; m^2 - 1)$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$OA = OB \Leftrightarrow (2m^2 - 1)^2 = m + (m^2 - 1)^2$

$\Leftrightarrow 3m^4 - 2m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

**Bài 8.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x(1 - m^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = 1 - m^2$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow -1 < m < 1$

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0; 1 + m)$, $B(-\sqrt{1 - m^2}; \sqrt{1 - m^2}); C(\sqrt{1 - m^2}; \sqrt{1 - m^2})$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A; BC).BC = (1 - m^2)^{\frac{5}{2}} \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi m = 0.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

**Bài 9.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x\left(x^2 - m\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó toạ độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0; -1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 - 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 - 1)$

Ta có tam giác ABC cân tại $A$. Gọi $H$ là trung điểm cạnh $BC$

Suy ra $H\left(0; -m^2 - 1\right) \Rightarrow AH = m^2$, $\sin\widehat{ABC} = \frac{AH}{AB}$

Gọi $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Ta có: $R = \frac{AC}{2\sin\widehat{ABC}} = \frac{AB.AC}{2AH}$.

Theo đề bài: $BC = 2R \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = \frac{AB.AC}{AH}$

Hay $4m = \frac{AB^2.AC^2}{AH^2} = \frac{(m + m^4)^2}{m^4} \Leftrightarrow (m^2 + 1)^2 = 4m^3$ (do $m > 0$)

$\Leftrightarrow m^4 - 4m^3 + 2m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^3 - 3m^2 - m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ (Do $m < 3$).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

**Bài 10.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x\left(x^2 - m\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó toạ độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;-3),\ B(\sqrt{m};-m^2-3),\ C(-\sqrt{m};-m^2-3)$

Ta có tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm cạnh BC

Suy ra $H\left(0;-m^2-3\right) \Rightarrow AH = m^2,\ \sin\widehat{ABC} = \dfrac{AH}{AB}$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $2R = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{AB.AC}{AH} = \dfrac{AB^2}{AH} = \dfrac{m+m^4}{m^2}$.

Mà $\dfrac{m+m^4}{m^2} = m^2 + \dfrac{1}{m} = m^2 + \dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{2m} \geq 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

Suy ra $2R \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow R \geq \dfrac{3}{2.\sqrt[3]{4}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m^2 = \dfrac{1}{2m} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ là giá trị cần tìm.

## Chuyên đề 4. Phương trình tiếp tuyến

### I. Tóm tắt lí thuyết

**Bài toán 1:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

***Phương pháp:***

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $y_0 = f(x_0)$.

**Bài toán 2**: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k$.

***Phương pháp***:

* Giải phương trình $f'(x) = k$ giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$.

* Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)\ \ (i = 1, 2, ..., n)$.

**Chú ý:** Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:

* Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình: $f'(x) = k$.

*Cho hai đường thẳng $d_1: y = k_1x + b_1$ và $d_2: y = k_2x + b_2$. Khi đó

i) $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1.k_2}\right|$, trong đó $\alpha = \widehat{(d_1, d_2)}$.

ii) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

iii) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

**Bài toán 3:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.

***Phương pháp***:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó tiếp tuyến có dạng:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Vì tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + y_0$, giải phương trình này ta tìm được $x_0$ suy ra phương trình tiếp tuyến.

## II. Các ví dụ minh họa

### 1. Các ví dụ cơ bản.

**Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Tại điểm $M(2; -2)$. 2) Tại điểm có hoành độ bằng $-1$.

3) Tại điểm có tung độ bằng $-2$.

***Lời giải***

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm: $y' = 3x^2 - 6x$

1) Ta có: $x_0 = 2, y_0 = -2, y'(x_0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 0(x - 2) - 2 = -2$.

2) Ta có $x_0 = -1$, suy ra $y_0 = -2, y'(x_0) = 9$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x + 1) - 2 = 9x + 7$.

3) Ta có $y_0 = 6 \Rightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2$.

- $x_0 = -1$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = 9x + 7$
- $x_0 = 2$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = -2$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C).

1) Tại điểm có hoành độ bằng 2

2) Tại điểm có tung độ bằng 7

3) Tại giao điểm của (C) với parabol (P): $y = x^2 - 2$

***Lời giải***

Ta có $y' = 8x^3 - 8x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

1) Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 17, y'(x_0) = 48$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 48(x-2) + 17 = 48x - 79$.

2) Ta có: $y_0 = 7 \Leftrightarrow 2x_0^4 - 4x_0^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$

- $x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 7, y'(x_0) = 16\sqrt{3}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 16\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 7 = 16\sqrt{3}x - 41$

- $x_0 = -\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 7, y'(x_0) = -16\sqrt{3}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -16\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) + 7 = -16\sqrt{3}x - 41$.

3) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P)

$$2x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^4 - 5x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$$

- $x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -1$

- $x_0 = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{2}, y'(x_0) = \pm 2\sqrt{6}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = \pm 2\sqrt{6}(x \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}) - \dfrac{1}{2} = \pm 2\sqrt{6}x + \dfrac{11}{2}$.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C).

1) Tại giao điểm của (C) với trục Ox.

2) Tại điểm có tung độ bằng 3.

3) Tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y = x + 1$.

***Lời giải***

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

1) Ta có: $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y'(x_0) = -4$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -4x + 2$.

2) Ta có $y_0 = 3 \Rightarrow \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} = 3 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = -1$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -(x-2) + 3 = -x + 5$

3) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$\frac{2x-1}{x-1} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

- $x_0 = 0$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = -(x-0) + 1 = -x + 1$
- $x_0 = 2$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = -x + 5$.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = x^3 - (m-1)x^2 + (3m+1)x + m - 2$. Tìm $m$ để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

***Lời giải***

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m-1)x + 3m + 1$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3m+1$, $y'(1) = m+6$.

Phương trình tiếp tuyến tại M: $y = (m+6)(x-1) + 3m + 1$

Tiếp tuyến đi qua A $\Leftrightarrow -1 = m + 6 + 3m + 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1) Tiếp tuyến có hệ số $k = -1$.

2) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

3) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d': 9x - y - 1 = 0$

***Lời giải***

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

1) Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-1$ nên ta có

$$-\frac{4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

2) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2.$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$.

3) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = 9x - 1$ nên ta có

$$9.y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-36}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 7, x_0 = -5.$$

- $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = \dfrac{8}{3}$ nên ta có phương trình tiếp tuyến:

$$y = -\frac{1}{9}(x-7) + \frac{8}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9}.$$

- $x_0 = -5 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3}$ nên ta có phương trình tiếp tuyến:

$$y = -\frac{1}{9}(x+5) + \frac{4}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{7}{9}.$$

**Ví dụ 6.** Cho đồ thị (C): $y = -x^3 + 3x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1) Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-9$
2) Tiếp tuyến song song với trục Ox.
3) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + y + 1 = 0$
4) Tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

***Lời giải***

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có: $y' = -3x^2 + 3$

1) Ta có $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 3 = -9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0$ nên ta có phương trình tiếp tuyến

$y = -9(x-2) = 0 = -9x + 18$.

- $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 4$ nên ta có phương trình tiếp tuyến

$y = -9(x+2) + 4 = -9x - 14$.

2) Vì tiếp tuyến song song với trục Ox (có phương trình $y = 0$) nên ta có

$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

- $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$ nên ta có phương trình tiếp tuyến: $y = 4$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$ nên ta có phương trình tiếp tuyến: $y = 0$.

3) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1$ nên

ta có $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

- $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{18 + 7\sqrt{6}}{9}$ nên ta có phương trình tiếp tuyến

$$y = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{18 + 7\sqrt{6}}{9} = x + \frac{18 + 4\sqrt{6}}{9}$$

- $x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{18 - 7\sqrt{6}}{9}$ nên ta có phương trình tiếp tuyến

$$y = \left(x + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{18 - 7\sqrt{6}}{9} = x + \frac{18 - 4\sqrt{6}}{9}.$$

4) Ta có $y' = -3x^2 + 3 \le 3\ \forall x \Rightarrow \operatorname{Max} y' = 3$ đạt được khi $x = 0$

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có tiếp điểm là $M(0;2)$ và $y'(x_0) = 3$ nên có phương trình: $y = 3x + 2$.

**Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 - 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 6y - 1 = 0$.

2) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d': y = 6x + 2$.

***Lời giải***

Ta có $y' = -4x^3 - 2x$

1) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$

Suy ra $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow 2x_0^3 + x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = -6x + 3$.

2) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x + 2$ nên ta có:

$$y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow 2x_0^3 + x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(2x_0^2 - 2x_0 + 3) = 0$$

$\Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -3$ nên ta có phương trình tiếp tuyến

$$y = 6(x + 1) - 3 = 6x + 3.$$

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ $I(1;2)$ đến tiếp tuyến tuyến lớn nhất.

***Lời giải***

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M$.

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

1) Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\pm 1$.

$$\frac{-4}{(x_0-1)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

+) $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

+) $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

2) Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại

$$A:\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow A(1;\frac{2x_0+6}{x_0-1})$$

Tiếp tuyến cắt tiệm ngang tại

$$B:\begin{cases}y=2\\ 2=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow B(2x_0-1;2)$$

Suy ra: $IA=\frac{8}{|x_0-1|}$; $IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=16$

Chu vi tam giác $IAB$:

$$P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}$$

Mà $IA+IB\geq 2\sqrt{IA.IB}=8$; $IA^2+IB^2\geq 2IA.IB=32$

Nên $P\geq 8+\sqrt{32}=8+4\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3,x_0=-1$

+) $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow \Delta: y=-x-1$

+) $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow \Delta: y=-x+7$

3) Ta viết lại phương trình tiếp tuyến $\Delta$ như sau:

$$4x+(x_0-1)^2y-2x_0^2-4x_0+2=0.$$

Suy ra $d(I,\Delta)=\frac{|4+2(x_0-1)^2-2x_0^2-4x_0+2|}{\sqrt{16+(x_0-1)^4}}=\frac{8|x_0-1|}{\sqrt{16+(x_0-1)^4}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$16+(x_0-1)^4\geq 2\sqrt{16.(x_0-1)^4}=8(x_0-1)^2.$$

Do đó $d(I,\Delta)\leq\frac{8|x_0-1|}{\sqrt{8(x_0-1)^2}}=2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $16=(x_0-1)^4\Leftrightarrow x_0=-1,x_0=3$.

+) $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow \Delta: y=-x-1$

+) $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow \Delta: y=-x+7$

**Ví dụ 9.** Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C). Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

***Lời giải***

Xét điểm $M(m;0)\in Ox$.

Gọi $N(x_0;y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến $\Delta$ của (C) tại N có phương trình: $y = (-3x_0^2 + 3)(x - x_0) + y_0$.

$\Delta$ đi qua M $\Leftrightarrow 0 = (-3x_0^2 + 3)(m - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)(x_0 + 1)(x_0 - m) - (x_0 + 1)^2(x_0 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)\left[2x_0^2 - (3m + 2)x_0 + 3m + 2\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ 2x_0^2 - (3m + 2)x_0 + 3m + 2 = 0 \quad (a) \end{array}\right.$$

Từ M vẽ được đến (C) ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ (a) có hai nghiệm phân biệt khác $-1$, điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = (3m + 2)^2 - 8(3m + 2) > 0 \\ 2 + 2(3m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 2)(3m - 6) > 0 \\ 3m + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < -\dfrac{2}{3} \vee m > 2 \end{cases} \quad (b).$$

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-3p^2 + 3)(-3q^2 + 3) = -1$

(trong đó $p, q$ là hai nghiệm của phương trình (a))

$\Leftrightarrow 9p^2q^2 - 9(p^2 + q^2) + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 9p^2q^2 - 9(p + q)^2 + 18pq + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{9(3m + 2)^2}{4} - \frac{9(3m + 2)^2}{4} + 9(3m + 2) + 10 = 0$$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{28}{27}$. Vậy $M(-\dfrac{28}{27};0)$.

**Ví dụ 10.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$ có đồ thị là $(C_m)$. Tìm $m$ để từ điểm $M(1;2)$ vẽ đến $(C_m)$ đúng hai tiếp tuyến.

***Lời giải***

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$

Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tại A:

$$y = (3x_0^2 - 4x_0 + m - 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + (m - 1)x_0 + 2m$$

$M \in \Delta \Leftrightarrow 2 = (3x_0^2 - 4x_0 + m - 1)(1 - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + (m - 1)x_0 + 2m$

$\Leftrightarrow 2x_0^3 + 5x_0^2 - 4x_0 + 3m - 3 = 0 \quad (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có đúng hai nghiệm phân biệt (1)

Xét hàm số: $h(t) = 2t^3 + 5t^2 - 4t,\ t \in \mathbb{R}$

Ta có: $h'(t) = 6t^2 + 10t - 4 \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, t = -2$.

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 12 | ↘ | $-\frac{19}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-3m=12 \\ 3-3m=-\frac{19}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\frac{100}{81} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 11.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ (C).

1) Tìm $M \in Oy$ sao cho từ M vẽ đến (C) đúng ba tiếp tuyến.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

***Lời giải***

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

Gọi $A(x_0;y_0) \in (C)$.

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $\Delta: y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + y_0$

1) Vì (C) nhận Oy làm trục đối xứng nên nếu d là một tiếp tuyến của (C) thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của (C). Do đó, để từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C) thì trong ba tiếp tuyến đó phải có một tiếp tuyến vuông góc với Oy. Mà (C) có hai tiếp tuyến cùng phương với Ox là: $y = -2$ và $y = -1$. Đường thẳng này cắt Oy tại $M_1(0;-2),\ M_2(0;-1)$.

Ta kiểm tra được qua $M_1$ chỉ vẽ đến (C) được một tiếp tuyến, còn từ $M_2$ vẽ đến (C) được ba tiếp tuyến.

Vậy $M(0;-1)$ là điểm cần tìm.

2) Giả sử $\Delta$ là tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt $M(m;m^4 - 2m^2 - 1)$ và $N(n;n^4 - 2n^2 - 1)$ với $m \neq n$.

Ta có phương trình $\Delta: y = y'(m)(x - m) + y(m)$

$$\Delta: y = y'(n)(x - n) + y(n)$$

Suy ra $\begin{cases} y'(m) = y'(n) \\ -m.y'(m) + y(m) = -n.y'(n) + y(n) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4n^3 - 4n = 4m^3 - 4m \\ -3m^4 + 2m^2 - 1 = -3n^4 + 2n^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-m)(n^2 + mn + n^2) - (n-m) = 0 \\ 3(n^2 - m^2)(n^2 + m^2) - 2(n^2 - m^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + mn + n^2 - 1 = 0 \\ (n+m)\left|3(n^2 + m^2) - 2\right| = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Từ (*) ta có: $m + n = 0$ hoặc $n^2 + m^2 = \dfrac{2}{3}$.

- $m + n = 0 \Rightarrow m = -n \Rightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = \pm 1$
- $m^2 + n^2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} mn = \dfrac{1}{3} \\ (m+n)^2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy $y = -2$ là tiếp tuyến cần tìm.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C).
Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết
1) Tiếp điểm $M(1;0)$. 2) Hoành độ tiếp điểm $x_0 = -1$.
3) Tung độ tiếp điểm $y_0 = 1$.

**Bài 2.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C)
1) Tại điểm có hoành độ bằng 2. 2) Tại điểm có tung độ bằng 7.
3) Tại các giao điểm của (C) với trục đường thẳng $y = -1$.

**Bài 3.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C).
1) Tại giao điểm của (C) với trục tung.
2) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

**Bài 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị là $(C_m)$. Tìm giá trị tham số $m$ để
1) Tiếp tuyến của $(C_m)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $A(3;4)$.

2) Tiếp tuyến của $(C_m)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

3) Tìm giao điểm của đồ thị $(C_m)$ với tiếp tuyến của $(C_m)$ tại điểm có hoành độ bằng m.

**Bài 5.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ (C).

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng $2$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $6$

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $15$.

4) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

5) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = -x + 1$ một góc $\alpha$ thỏa $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

6) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;6)$.

**Bài 6.**

1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 1$ tại điểm có tung độ bằng $5$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$.

**Bài 7.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

1) Chứng minh rằng trên đồ thị không tồn tại hai điểm sao cho tiếp tuyến tại hai điểm đó của đồ thị vuông góc với nhau.

2) Tìm k để có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = kx$.

**Bài 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Tìm toạ độ điểm M thuộc $d: y = -3x + 2$ sao cho từ M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

**Bài 9.** Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ tại điểm có hoành độ bằng $-1$ song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

**Bài 10.** Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ (C).

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng $2$

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $-1$

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 48y + 1 = 0$.

4) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-3)$.

**Bài 11.** Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-1)$.
2. Tìm những điểm thuộc (C) mà tiếp tuyến của (C) tại đó cắt (C) tại ba điểm phân biệt
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

**Bài 12.** Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết

1) Hoành độ tiếp điểm bằng 2. 2) Tung độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{2}{3}$.

3) Tiếp tuyến đi song song với đường thẳng $4x + y - 1 = 0$

4) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 9y + 1 = 0$

5) Tiếp tuyến tạo với hai đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$ một tam giác vuông cân.

**Bài 13.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C).

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{4}$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai đường thẳng $x = 1$, $y = 2$ một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ $I(1;2)$ đến tiếp tuyến tạo lớn nhất.

4) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với IM.

**Bài 14.** Cho hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ (C) và điểm $A(0;m)$. Xác định m để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

### *Hướng dẫn giải*

**Bài 1.**

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$.

1) Ta có $x_0 = 1, y_0 = 0, y'(x_0) = 0$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = 0$.

2) Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2, y'(x_0) = 12$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến

$y = 12(x+1) - 2 = 12x + 10$.

3) Ta có $y_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^2(2x_0 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = \dfrac{3}{2}$.

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến $y = 1$
- $x_0 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{9}{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = \dfrac{9}{2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 1 = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{23}{4}$.

**Bài 2.** Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có $y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0$.

1) Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 7, y'(x_0) = 24$.

Phương trình tiếp tuyến $y = 24(x-2) + 7 = 24x - 41$.

2) Ta có $y_0 = 7 \Leftrightarrow x_0^4 - 2x_0^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow x_0^4 - 2x_0^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 = 4 \\ x_0^2 = -2 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 24$. Phương trình tiếp tuyên $y = 24x - 41$.
- $x_0 = -2$, suy ra $y'(x_0) = -24$. Phương trình tiếp tuyến

$y = -24x + 41$.

3) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = -1$

$x^4 - 2x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$.

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến $y = -1$
- $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = 4\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) - 1 = 4\sqrt{2}x - 9$.

- $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = -4\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = -4\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) - 1 = -4\sqrt{2}x - 9$.

**Bài 3.** Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

1) Đồ thị (C) cắt Oy tại $M(0;1)$, $y'(0) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến $y = -x + 1$.

2) Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3, y'(x_0) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến $y = -x + 5$.

**Bài 4.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m-1)$

1) Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 - 6m$, $y'(x_0) = 9 - 9m$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;4-6m)$

$$y = (9-9m)(x-2) + 4 - 6m = (9-9m)x + 12m - 14$$

Tiếp tuyến đi qua $A(3;4)$ khi và chỉ khi

$$4 = 3(9-9m) + 12m - 14 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}.$$

2) Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$, $y'(x_0) = -3m$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta : y = -3mx + 3m$.

Với $m \neq 0$ thì đường thẳng $\Delta$ cắt Ox tại $A(1;0)$ và cắt Oy tại $B(0;3m)$.

Tam giác OAB cân khi và chỉ khi $OA = OB$ hay $|3m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{3}$.

3) Ta có $x_0 = m \Rightarrow y_0 = -2m^3 + 3m^2 - 3m + 2$, $y'(x_0) = -3m^2 + 3m - 3$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là

$$y = (-3m^2 + 3m - 3)(x - m) - 2m^3 + 3m^2 - 3m + 2$$
$$= (-3m^2 + 3m - 3)x + m^3 + 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $\Delta$

$$x^3 - 3mx^2 + 3(m-1) + 2 = (-3m^2 + 3m - 3)x + m^3 + 2$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0 \Leftrightarrow (x-m)^3 = 0 \Leftrightarrow x = m.$$

Vậy $(C_m)$ và $\Delta$ chỉ có một điểm chung là $M(m; -2m^3 + 3m^2 - 3m + 2)$.

**Bài 5.** Ta có: $y' = 3(x^2 - 2x - 3)$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

1) Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -21, y'(x_0) = -9$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -9(x-2) - 21 = -9x - 3$.

2) Ta có: $y_0 = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 5$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = 0$ nên phương trình tiếp tuyến: $y = 6$
- $x_0 = 5 \Rightarrow y'(x_0) = 36$ nên phương trình tiếp tuyến: $y = 36x - 174$

3) Ta có: $y'(x_0) = 15 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 4, x_0 = -2$

- $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến: $y = 15x + 29$
- $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = -19$, phương trình tiếp tuyến: $y = 15x - 79$

4) Do $y' = 3\left[(x-1)^2 - 4\right] \geq -12 \Rightarrow \text{Min}\, y' = -12$, đạt được khi $x = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -12x + 2$.

5) Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tại M: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Hay $kx - y + b = 0$, với $k = y'(x_0)$

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$

$\Leftrightarrow 41(k-1)^2 = 50(k^2+1) \Leftrightarrow 9k^2 + 82k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -9, k = -\dfrac{1}{9}$.

- $k = -9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = -9x + 1$ và $y = -9x - 3$

- $k = -\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 27x_0^2 - 54x_0 - 80 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{9 \pm \sqrt{321}}{9}$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là: $y = -\dfrac{1}{9}(x - \dfrac{9 \pm \sqrt{321}}{9}) + y(x_0)$ .

6) Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tại M: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Do tiếp tuyến đi qua A nên ta có phương trình

$6 = 3(x_0^2 - 2x_0 - 3)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1$

$\Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2$

- $x_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến $y = 6$
- $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến $y = -9x - 3$.

**Bài 6.**

1. Ta có: $y = 5 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2; x = 3$

   Phương trình các tiếp tuyến: $y = 2x + 3$ ; $y = -x + 7$ ; $y = 2x - 1$

2. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$

   $\Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 4$

   $\Rightarrow y' = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = 2$

   * $x = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x+3) + \dfrac{1}{6} = 4x + \dfrac{73}{6}$

   * $x = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x-2) - \dfrac{2}{3} = 4x - \dfrac{26}{3}$.

**Bài 7.**

1) Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 2(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$

2) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ PT : $3x^2 + 6x + 3 = -\dfrac{1}{k}$ có ít nhất một nghiệm

   $\Leftrightarrow k < 0$.

**Bài 8.** Gọi $M(m; -3m + 2) \in d$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của (C) tại $A(x_0;y_0)$:

$$y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+2$$

Tiếp tuyến đi qua M $\Leftrightarrow -3m+2=(3x_0^2-3)(m-x_0)+x_0^3-3x_0+2$

$\Leftrightarrow x_0^2(2x_0-3m)=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=\dfrac{3m}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -3\left(\dfrac{27m^2}{4}-3\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$.

**Bài 9.** Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=-1$, có dạng:

$$y=(m+1)x+\frac{m}{2}+1.$$

d song song với đường thẳng $y=5x \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=5 \\ \dfrac{m}{2}+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

**Bài 10.** Ta có $y'=8x^3-8x$. Gọi $M(x_0;y_0)$.

Tiếp tuyến $\Delta$ tại M có phương trình:

$$y=(8x_0^3-8x_0)(x-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1.$$

1) Ta có: $x_0=2 \Rightarrow y_0=15$, $y'(x_0)=48$

Phương trình tiếp tuyến: $y=48(x-2)+15=48x-81$

2) Ta có $y_0=-1 \Leftrightarrow 2x_0^4-4x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=\pm\sqrt{2}$

- $x_0=0$ ta có tiếp tuyến: $y=-1$
- $x_0=\pm\sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0)=\pm 8\sqrt{2}$, phương trình tiếp tuyến

$y=\pm 8\sqrt{2}(x\mp\sqrt{2})-1=\pm 8\sqrt{2}x-17$.

3) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-48y+1=0$

Nên ta có: $y'(x_0).\dfrac{1}{48}=-1 \Leftrightarrow y'(x_0)=-48$

$\Leftrightarrow x_0^3-x_0+6=0 \Leftrightarrow x_0=-2 \Rightarrow y_0=15$.

Phương trình $\Delta: y=-48(x+2)+15=-48x-81$.

4) Vì tiếp tuyến $\Delta$ đi qua $A(1;-3)$ nên ta có

$-3=(8x_0^3-8x_0)(1-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1 \Leftrightarrow 3x_0^4-4x_0^3-2x_0^2+4x_0-1=0$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2(x_0+1)(3x_0-1)=0$

- $x_0=\pm 1 \Rightarrow \Delta: y=-3$
- $x_0=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \Delta: y=-\dfrac{64}{27}x-\dfrac{51}{81}$.

**Bài 11.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến

$$\Delta: y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 + 1$$

1. Ta có $A \in \Delta \Leftrightarrow (8x_0^3 - 8x_0)(1 - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 + 1 = -1$

$\Leftrightarrow 4(x_0^2 - 1)(x_0 - x_0^2) + (x_0^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)(-3x_0^2 + 4x_0 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = \pm 1;\ x_0 = \dfrac{1}{3}$.

* $x_0 = \pm 1 \Rightarrow \Delta: y = -1$

* $x_0 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \Delta: y = -\dfrac{64}{27}x + \dfrac{37}{27}$

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $\Delta$:

$2x^4 - 4x^2 + 1 = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - x_0^2)(x^2 + x_0^2) - 2(x^2 - x_0^2) - 4(x_0^3 - x_0)(x - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_0)[(x + x_0)(x^2 + x_0^2) - 2x - 4x_0^3 + 2x_0] = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_0)^2(x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2x_0^2 + 2 > 0 \\ 6x_0^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_0 < 1 \\ x_0 \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

3. Giả sử $\Delta$ tiếp xúc với (C) tại $N(n;m) \neq M$

$\Rightarrow \Delta: y = (8n^3 - 8n)(x - n) + 2n^4 - 4n^2 + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} 8n^3 - 8n = 8x_0^3 - 8x_0 \\ -6n^4 + 4n^2 + 1 = -6x_0^4 + 4x_0^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + nx_0 + x_0^2 - 1 = 0 \\ (n + x_0)[3(n^2 + x_0^2) - 2] = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + nx_0 + x_0^2 - 1 = 0 \\ n + x_0 = 0 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} n^2 + nx_0 + x_0^2 - 1 = 0 \\ 3(n^2 + x_0^2) - 2 = 0 \end{cases}$ (II)

Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} n = -x_0 \\ n^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -x_0 \\ n = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta: y = -1$.

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + x_0^2 = \dfrac{2}{3} \\ nx_0 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n + x_0)^2 = \dfrac{4}{3} \\ nx_0 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow n = x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (loại ).

Vậy $\Delta: y = -1$ là tiếp tuyến cần tìm.

**Bài 12.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x-1)^2}$.

1) Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{3}, y'(x_0) = -\dfrac{1}{9}$, phương trình tiếp tuyến

$$y = -\frac{1}{9}(x-2) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}x - \frac{1}{9}$$

2) Ta có: $y_0 = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-x_0+1}{2x_0-1} = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = -1, y'(x_0) = -\dfrac{1}{9}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -\dfrac{1}{9}(x+1) - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{9}x - \dfrac{5}{9}$.

3) ĐS: $y = -4x + \dfrac{7}{2}$ và $y = -4x - \dfrac{1}{2}$

4) ĐS: $y = -9x + 1$ và $y = -9x + 7$

5) Tiếp tuyến tạo với hai đường thẳng đó một tam giác vuông cân thì tiếp tuyến phải vuông góc với hai phân giác $y = \pm x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\pm 1$. **ĐS:** $y = -x \pm 1$.

**Bài 13.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tại M

$$y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

1) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$ nên suy ra

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1.$$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$ và $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$.

2. Tiếp tuyến $\Delta$ cắt đường thẳng $x = 1$ tại $A(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1})$, cắt đường thẳng $y = 2$ tại $B(2x_0 - 1;2)$. Hai đường thẳng đó cắt nhau tại $I(1;2)$.

Suy ra $IA = \dfrac{2}{|x_0-1|}, IB = 2|x_0 - 1| \Rightarrow IA.IB = 4$

Chu vi tam giác IAB: $p = AB + IA + IB = \sqrt{IA^2 + IB^2} + IA + IB$

Mặt khác: $IA^2 + IB^2 \geq 2IA.IB = 8$; $IA + IB \geq 2\sqrt{IA.IB} = 4$

Nên $p \geq 2\sqrt{2} + 4$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \text{ và } y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

3) Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta$. Ta có $d(I,\Delta) = IH$

Trong tam giác vuông IAB ta có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA.IB} = \frac{1}{2}$

Suy ra $IH \leq \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \text{ và } y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

4. Đường thẳng $\Delta$ có VTCP $\vec{u} = (1;\frac{-1}{(x_0-1)^2})$, $\overrightarrow{IM} = (x_0 - 1;\frac{1}{x_0-1})$.

$$IM \perp \Delta \Leftrightarrow x_0 - 1 - \frac{1}{(x_0-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2.$$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến: $y = -x+1, y = -x+5$.

**Bài 14.** Gọi điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến $\Delta$ tại M của (C) có phương trình: $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$.

$$A \in \Delta \Leftrightarrow m = \frac{3x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{x_0+2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow m(x_0-1)^2 = 3x_0 + (x_0+2)(x_0-1) = 0 \ \text{(với } x_0 \neq 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x_0^2 - 2(m+2)x_0 + m + 2 = 0 \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm $a, b$ khác 1 sao cho

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(a-1)(b-1)} = \frac{ab+2(a+b)+4}{ab-(a+b)+1} < 0$$

Hay là: $\begin{cases} \Delta' = 3(m+2) > 0 \\ m - 1 \neq 0 \\ -3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

## Chuyên đề 5. Bài toán giao điểm của hai đồ thị

### I. Tóm tắt lí thuyết

Định lí: Số giao điểm của hai đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ chính là số nghiệm của phương trình: $f(x) = g(x)$.

Từ định lí này sẽ dẫn tới hai bài toán giao điểm sau:

**Bài toán 1:** Biện luận số nghiệm của phương trình: $F(x, m) = 0$ (m là tham số)

***Phương pháp giải:***

* Ta biến đổi phương trình $F(x, m) = 0$ về dạng $f(x) = g(m)$, trong đó ta đã biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ hoặc có thể dễ dàng vẽ được.

* Để biện luận số nghiệm của phương trình, ta chuyển về biện luận số giao điểm của (C) và đường thẳng song song với Ox: $y = g(m)$.

**Bài toán 2:** Biện luận số giao điểm của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$

***Phương pháp giải:*** Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$ (*).

Số giao điểm của (C) và (C') chính là số nghiệm của phương trình (*).

### II. Các ví dụ minh họa

#### 1. Các ví dụ cơ bản.

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2) Biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình: $-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - m = 0$.

***Lời giải***

1) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$

Bảng biến thiên

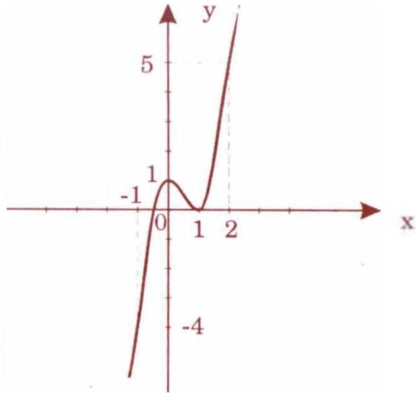
| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 1)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{cd} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{ct} = 0$

Các điểm đi qua $(-1;-4),\ (2;5)$.

Đồ thị




2) Phương trình $\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=1-2m$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases}(C): y=2x^3-3x^2+1\\ \Delta: y=1-2m,\ \Delta // Ox\end{cases}$$

Dựa vào đồ thị (C), ta có:

- $\left[\begin{array}{l}1-2m<0\\1-2m>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{2}\\m<0\end{array}\right.$

thì $\Delta$ và (C) cắt nhau tại một điểm nên phương trình đã cho có một nghiệm.

- $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m=0\end{array}\right.$ thì $\Delta$ và (C) cắt nhau tại hai điểm nên phương trình đã cho có hai nghiệm.

- $0<m<\dfrac{1}{2}$ thì $\Delta$ và (C) cắt nhau tại ba điểm nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2) Tìm giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: y=7$.

3) Tìm $m$ để phương trình $x^4-2x^2+3m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Lời giải***

1) TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x(x^2-1) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \Rightarrow y=-1\\x=\pm1 \Rightarrow y=-2\end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên

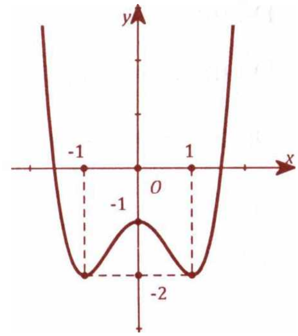
| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{cd} = -1$; đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{ct} = -2$.

Đồ thị:

Do hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là hàm số chẵn nên (C) nhận Oy làm trục đối xứng.




2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -2\ (vn_0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (C) và d là $A(\pm 2;7)$.

3) Phương trình $\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 1 = -3m - 2$.

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -3m - 2$ cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt

Hay $-2 < -3m - 2 < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0$.

Vậy $-\frac{1}{3} < m < 0$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2) Tìm m để đường thẳng $d : y = 2x - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

***Lời giải***

1) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

Hàm số không có cực trị

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

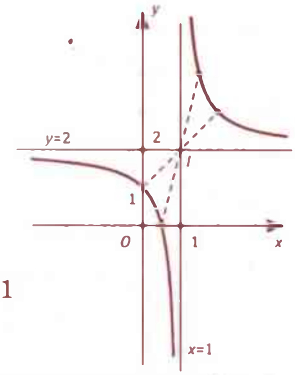
Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | 2 | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2 |

Đồ thị

Đồ thị đi qua $(0;1)$, $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị nhận $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.




2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$\frac{2x-1}{x-1} = 2x - m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x-1)(2x-m)$ với $x \neq 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - (m+4)x + m + 1 = 0$ (1).

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

Hay $\begin{cases} \Delta = (m+4)^2 - 8(m+1) > 0 \\ 2-(m+4)+m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+8>0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Vậy d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2) Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m.$$

***Lời giải***

1) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 6(x^2 - 3x + 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$

Bảng biến thiên

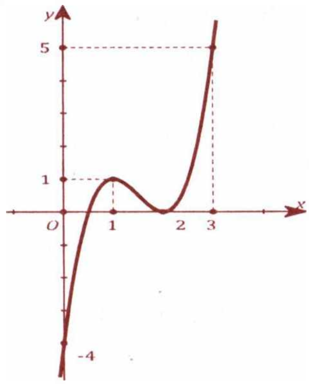
| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(1;2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{cd} = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{ct} = 0$.

Đồ thị:

Các điểm đi qua: $(3;5)$, $(0;-4)$

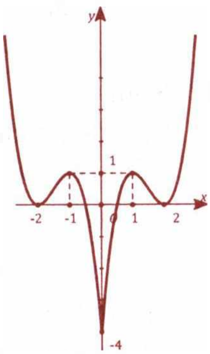



2) Phương trình đã cho tương đương với

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases} (C') : y = f(x) = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| \\ \Delta : y = m - 4, \ \Delta // Ox \end{cases}$$




Ta có $f(-x) = f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn. Do đó, đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

Mặt khác, với $x \geq 0$ ta có

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ nên ứng với phần $x \geq 0$ thì $(C') \equiv (C)$

Từ đó, ta có đồ thị (C').

Dựa vào đồ thị (C'), ta có:

Phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2) Tìm $m$ để phương trình $|2x^3 - 3x^2 + 1| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Lời giải***

1) Xem ví dụ 1.

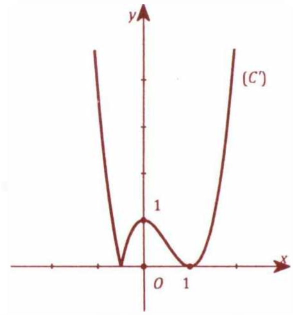
2) Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases} (C') : y = |2x^3 - 3x^2 + 1| \\ \Delta : y = m \end{cases}$$

Ta có: $|2x^3 - 3x^2 + 1| = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 1 & \text{khi } 2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0 \\ -(2x^3 - 3x^2 + 1) & \text{khi } 2x^3 - 3x^2 + 1 < 0 \end{cases}$

- Ứng với phần $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$ (Tức là phần đồ thị (C) nằm trên Ox). Ta có (C) và (C') trùng nhau.
- Ứng với phần $2x^3 - 3x^2 + 1 < 0$ (Tức là phần đồ thị (C) nằm dưới Ox). Ta có (C) và (C') đối xứng nhau qua Ox.

Từ đó ta có đồ thị (C').



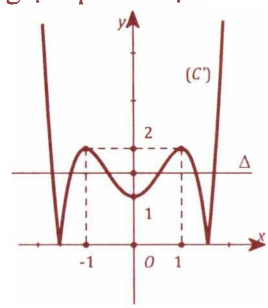

Dựa vào đồ thị (C') ta có yêu cầu bài toán tương đương với $0 < m < 1$.

**Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2) Tìm m để phương trình $\left|x^4 - 2x^2 - 1\right| = 2m$ có 6 nghiệm phân biệt.

***Lời giải***




1) Xem ví dụ 2.
2) Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases} (C'): y = \left|x^4 - 2x^2 - 1\right| \\ \Delta: y = 2m,\ \Delta // Ox \end{cases}$$

Ta có đồ thị (C')

Dựa vào (C'), suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

**Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$, $x_3$ thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 < 4$. **(ĐH Khối A – 2010).**

***Lời giải***

1) Bạn đọc tự làm.
2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và Ox

$$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 1 thỏa

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 < 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 3$$

Hay là: $\begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{4} < m < 1 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{4} < m < 1 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có đồ thị $(C_m)$

1) Tìm $m$ để đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$.

2) Gọi $d$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc $k$. Tìm $k$ để đường thẳng $d$ cắt đồ thị $(C_0)$ tại ba điểm phân biệt $O, A, B$ sao cho $AB = \sqrt{5}$.

***Lời giải***

1) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox

$$x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = -m \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ với $x > -\frac{1}{2}$, ta có $f'(x) = 3x(x-2)$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

Bảng biến thiên:

| x | $-\frac{1}{2}$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\frac{7}{8}$ | ↗ | 0 | ↘ | −4 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hớn $-\frac{1}{2}$ hay đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$-\frac{7}{8} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{7}{8}.$$

2) Phương trình đường thẳng $d: y = kx$

Phương trình $(C_0): y = x^3 - 3x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_0)$ và d :

$$x^3 - 3x^2 = kx \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x - k = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đồ thị $(C_0)$ cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt $O, A, B$ khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$.

Hay $\begin{cases} \Delta = 9 + 4k > 0 \\ -k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{9}{4} \\ k \neq 0 \end{cases}$ (**)

Khi đó $A(x_1; kx_1)$, $B(x_2; kx_2)$ nên

$AB^2 = (k^2 + 1)(x_1 - x_2)^2 = (k^2 + 1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = (k^2 + 1)(4k + 9)$

Suy ra $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (k^2 + 1)(4k + 9) = 5 \Leftrightarrow 4k^3 + 9k^2 + 4k + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (k + 2)(4k^2 + k + 2) = 0 \Leftrightarrow k = -2$ thỏa mãn (**).

Vậy $k = -2$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 9.** Tìm m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị $(C_m)$: $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4), B, C$ sao cho tam giác IBC có diện tích bằng 4 với $I(1; 3)$.

***Lời giải***

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(C_m)$:

$$x^3 + 2mx + (m + 3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (1).$$

Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của (*), ta có $B(x_1; x_1 + 4)$, $C(x_2; x_2 + 4)$

Suy ra $BC^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 8(m^2 - m - 2)$.

Gọi $h = d(I, d) = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{2}h.BC = 2\sqrt{m^2 - m - 2}$.

Do đó $S_{\Delta IBC} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m - 2} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3, m = -2$.

Kết hợp với (1) ta có $m = 3$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 10.** Tìm $m$ để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt $Ox$ tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng một điểm có hoành độ âm.

***Lời giải***

Đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng một điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị đồng thời $\begin{cases} y_{cd}.y_{ct} < 0 \\ y(0) > 0 \end{cases}$ (1).

Ta có: $y' = 3[x^2 - 2(m+1)x + m] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (*)

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 > 0$ đúng $\forall m$.

Chia $y$ cho $y'$ ta được:

$$y = \frac{1}{3}(x - m - 1)y' - 2(m^2 + m + 1)x + m^2 + 1$$

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của (*). Ta có:

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - m - 1)y'(x_1) - 2(m^2 + m + 1)x_1 + m^2 + 1$$
$$= -2(m^2 + m + 1)x_1 + m^2 + 1.$$

Tương tự $y_2 = -2(m^2 + m + 1)x_2 + m^2 + 1$.

Suy ra

$$y_1.y_2 = 4(m^2 + m + 1)^2 x_1x_2 - 2(m^2 + m + 1)(m^2 + 1)(x_1 + x_2) + (m^2 + 1)^2$$
$$= (m+1)(m^3 - m^2 - m - 3)$$

Nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m^3 - m^2 - m - 3) < 0 \\ m < 1 \end{cases}$ (2).

Xét hàm số $g(m) = m^3 - m^2 - m - 3$, $m < 1$

Có $g'(m) = 3m^2 - 2m - 1 \Rightarrow g'(m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{1}{3} \\ m = 1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(m) < 0$ $\forall m < 1$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 11.** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 4m - 1$ $(C_m)$

1) Tìm $m$ để $(C_m)$ cắt đường thẳng $\Delta: y = 2m - 1$ tại bốn điểm có hoành độ lớn hơn $-3$

2) Tìm $m$ để $(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm A, B, C, D (với $x_A < x_B < x_C < x_D$) sao cho $2OA = \sqrt{3}BC$.

### *Lời giải*

1) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $\Delta$:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 4m - 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2(m+1)t + 2m = 0$ (1)

Đồ thị $(C_m)$ cắt $\Delta$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$ (giả sử $t_1 < t_2$). Điều này xả ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' = m^2 + 1 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \\ P = 2m > 0 \end{cases}$ (2).

Khi đó, hoành độ các giao điểm:

$$x_1 = -\sqrt{t_2},\ x_2 = -\sqrt{t_1},\ x_3 = \sqrt{t_1},\ x_4 = \sqrt{t_2}$$

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi $-\sqrt{t_2} > -3 \Leftrightarrow t_2 < 9$

$$\Leftrightarrow m + 1 + \sqrt{\Delta'} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < 8 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m^2 + 1 < 64 - 16m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{63}{16}.$$

Kết hợp với (2) ta có $0 < m < \dfrac{63}{16}$ thỏa yêu cầu bài toán.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(C_m)$ và Ox

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 4m - 1 = 0$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ ta thu được phương trình

$$t^2 - 2(m+1)t + 4m - 1 = 0 \quad (3)$$

Đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $A, B, C, D$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 4m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$ (4).

Giả sử $t_1 < t_2$. Khi đó, tọa độ các giao điểm là:

$$A(-\sqrt{t_2};0),\ B(-\sqrt{t_1};0),\ C(\sqrt{t_1};0),\ D(\sqrt{t_2};0)$$

Theo đề bài: $2OA = \sqrt{3}BC$ nên ta có:

$$2\sqrt{t_2} = \sqrt{3}.2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 3t_1 \quad (5)$$

Mặt khác, theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 4m - 1 \end{cases}$ (6)

Thay (5) và (6) ta có được:

$$\begin{cases} 4t_1 = 2(m+1) \\ 3t_1^2 = 4m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+1}{2} \\ t_1^2 = \dfrac{4m-1}{3} \end{cases}$$

Từ đó, suy ra: $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2 = \dfrac{4m-1}{3} \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 7 = 0$

Giải phương trình này ta tìm được: $m = 1, m = \dfrac{7}{3}$.

Kết hợp với (4), ta có $m = 1, m = \dfrac{7}{3}$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 12.** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 9$ có đồ thị là $(C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị $(C_m)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt $A, B, C, D$ ($x_A < x_B < x_C < x_D$) sao cho tam giác MAC có diện tích bằng 2 với $M(5;1)$.

***Lời giải***

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(C_m)$ và Ox

$$x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 9 = 0$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta có phương trình:

$$t^2 - 2(m-1)t + 3m - 9 = 0 \quad (1).$$

Đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$, hay:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5m + 10 > 0 \\ S = m - 1 > 0 \\ P = 3m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Giả sử $t_1 < t_2$, khi đó tọa độ các giao điểm là:

$$A(-\sqrt{t_2};0),\ B(-\sqrt{t_1};0),\ C(\sqrt{t_1};0),\ D(\sqrt{t_2};0)$$

Diện tích tam giác MAC:

$$S = \frac{1}{2}h.AC = \frac{1}{2}AC = 2 \text{ nên suy ra } AC = 4$$

Hay $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1t_2} = 16$

$\Leftrightarrow m - 1 + \sqrt{3m-9} = 8 \Leftrightarrow 9 - m = \sqrt{3m-9}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < 9 \\ (9-m)^2 = 3m - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < 9 \\ m^2 - 21m + 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 13.** Cho hàm số $y = \frac{2mx - 3 - 2m}{x + 2}$, có đồ thị $(C_m)$ ( m là tham số ).

Xác định m để đường thẳng $\Delta : y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $(C_m)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng $45^0$.

***Lời giải***

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2mx - 3 - 2m}{x + 2} = x - 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1 - 2m) = 0 \quad (x \neq -2) \quad (*)$$.

Đồ thị $(C_m)$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác $-2$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \neq 1 \\ 2m - 1 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Giả sử $A(1;-1)$, $B(2m - 1; 2m - 3)$, khi đó ta có:

$$\left|\overline{OA}.\overline{OB}\right| = OA.OB.\cos 45^0 \Leftrightarrow \sqrt{8m^2 - 16m + 10} = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $m = \frac{3}{2}$ và $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 14.** Cho hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -2x + m$

Chứng minh rằng d và (C) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai nhánh của (C). Khi đó hãy tìm m sao cho:

1) Độ dài AB nhỏ nhất.

2) Diện tích tam giác MAB bằng $\frac{3}{4}$ với $M(1;2)$.

3) Tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

***Lời giải***

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\frac{2x - 3}{x - 1} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - mx + m - 3 = 0 \quad (1)$$

Vì (1) có $\Delta = m^2 - 8m + 24 > 0, \forall m$ và $x = 1$ không là nghiệm của (1) nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ hay (C) và d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\frac{m-3}{2}-\frac{m}{2}+1=-\frac{1}{2}<0$

Nên A và B nằm về hai nhánh so của (C).

1) Ta có $A(x_1;-2x_1+m)$, $B(x_2;-2x_2+m)$

Suy ra

$$AB^2=(x_1-x_2)^2+(2x_1-2x_2)^2=5(x_1-x_2)^2=\frac{5}{4}(m^2-8m+24)$$

$$=\frac{5}{4}\left[(m-4)^2+8\right]\geq 10$$

Nên $AB\geq\sqrt{10}$ và đẳng thức xảy ra khi $m=4$.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

2) Gọi $h=d(M,AB)=\frac{|m-4|}{\sqrt{5}}$ suy ra $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}h.AB=\frac{3}{4}\Leftrightarrow h^2AB^2=\frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{(m-4)^2}{5}.\frac{5}{4}(m^2-8m+24)=\frac{9}{4}\Leftrightarrow(m-4)^4+8(m-4)^2-9=0$$

$\Leftrightarrow m=3, m=5.$

Vậy $m=3, m=5$ là hai giá trị cần tìm.

3) Ta có: $y'=\frac{1}{(x-1)^2}$

Tiếp tuyến tại A và B song song với nhau khi và chỉ khi

$$y'(x_1)=y'(x_2)\Leftrightarrow\frac{1}{(x_1-1)^2}=\frac{1}{(x_2-1)^2}\Leftrightarrow x_1-1=1-x_2\Leftrightarrow x_1+x_2=2$$

$\Leftrightarrow\frac{m}{2}=2\Leftrightarrow m=4$

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2) Tìm m để phương trình $x^3-3x^2=m$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

3) Biện luận số nghiệm của phương trình: $-|x|^3+3x^2+m=0$ (2).

**Bài 2.** Cho hàm số $y=f(x)=-x^3-x+2$, có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C).

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x^3+x-2|=m$ (1)

**Bài 3.** Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2) Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $|x|^3 - \frac{3}{2}x^2 + m = 0$.

3) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$\left|2x^2 - x - 1\right| = \frac{m}{|x-1|}$.

**Bài 4.** Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2) Tìm m để phương trình $(x^2 - 5)\left|x^2 - 1\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

**Bài 5.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có đồ thị $(C_m)$

1) Tìm m để đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-2$.

2) Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị $(C_0)$ tại ba điểm phân biệt $O, A, B$ sao cho $AB = 7\sqrt{2}$.

**Bài 6.** Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (m+1)x$ $(C_m)$

1) Tìm k để đường thẳng d đi qua O, có hệ số góc k cắt $(C_1)$ tại ba điểm phân biệt O,A,B sao cho $AB = 4\sqrt{26}$.

2) Tìm m để $(C_m)$ cắt đường thẳng $d_1 : y = (1-m)x + 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 6$.

3) Tìm m để đường thẳng $y = x$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt $O, M, N$ sao cho tiếp tuyến của $(C_{-1})$ tại M và N vuông góc với nhau.

**Bài 7.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x$ (C) và d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt O, A, B sao cho $AB = \sqrt{17}$.

**Bài 8.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m - 6$ $(C_m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$.

**Bài 9.** Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị $(C) : y = x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$.

**Bài 10.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ $(C_m)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3, x_4$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$.

**Bài 11.** Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị $(C_m)$ $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

**Bài 12.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị $(C_m): y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 4m$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $A, B, C, D$ $(x_A < x_B < x_C < x_D)$ thỏa $BC = 2AB$.

**Bài 13.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị $(C_m): y = x^4 - 2(2m - 1)x^2 + 2m + 3$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $A, B, C, D$ $(x_A < x_B < x_C < x_D)$ thỏa $AB = 2OC$.

**Bài 14.** Tìm $m$ để đường thẳng $\Delta: y = \frac{1}{2}x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$.

**Bài 15.** Cho hàm số $y = \frac{3x + 2}{x + 2}$ (C).

1. Tìm $a, b$ để đường thẳng $\Delta: y = ax + 2b - 4$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng nhau qua O.
2. Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại C, D sao cho ABCD là hình bình hành.

**Bài 16.** Cho hàm số: $y = \frac{2x - m}{mx + 1}$ (1). Chứng minh với mọi $m \neq 0$ đồ thị hàm số (1) cắt $d: y = 2x - 2m$ tại 2 điểm phân biệt A, B thuộc một đường (H) cố định. Đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N. Tìm m để $S_{OAB} = 3S_{OMN}$.

### *Hướng dẫn giải*

**Bài 1.**

1) Bạn đọc tự làm.

2) Ta có phương trình $x^3 - 3x^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = m + 2$.
Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m + 2$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m + 2 < 2 \Leftrightarrow -4 < m < 0$.
Vậy $m \in (-4; 0)$ là những giá trị cần tìm.

3) Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = m - 2$
Do đó số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} y = |x|^3 - 3x^2 + 2 & (C') \\ y = m - 2 \ (\Delta) \end{cases}$.

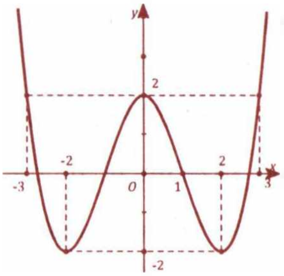
Ta có hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ là hàm số chẵn nên đồ thị (C') nhận trục Oy là trục đối xứng $\Rightarrow$ để vẽ đồ thị (C') ta chỉ cần vẽ (C') nằm phía bên trái hoặc bên phải của trục Oy rồi lấy đối xứng qua Oy ta được phần còn lại.

Mặt khác với $x \ge 0 \Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow (C) \equiv (C')$.

Vậy dựa vào đồ thị (C), ta vẽ đồ thị (C') như sau:

* Giữ nguyên phần bên phải trục Oy của đồ thị (C).

* Lấy đối xứng qua trục Oy phần vừa vẽ ở trên ta có được đồ thị của (C').




Dựa vào đồ thị (C'), ta có:

- $m - 2 < -2 \Leftrightarrow m < 0 \Rightarrow \Delta$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình (2) vô nghiệm.
- $\left[\begin{array}{l} m-2=-2 \\ m-2>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>4 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.
- $m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.
- $-2 < m - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình (2) có bốn nghiệm phân biệt.

**Bài 2.**

1) Bạn đọc tự làm

2) Xét đồ thị $(C'): y = g(x) = |x^3 + x - 2| = |f(x)|$. Khi đó số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $\Delta : y = m$.

Ta có: $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$ suy ra

* Nếu $f(x) \ge 0$ (Tức là phần đồ thị (3) nằm trên truc Ox) thì (C') và (C) trùng nhau.

* Nếu $f(x) < 0$, khi đó mọi điểm $M'$ thuộc (C') thì $M'(x;-f(x))$ còn $M$ thuộc (3) thì $M(x;-f(x))$ suy ra $M$ và $M'$ đối xứng nhau qua trục Ox hay là (3) và (C') đối xứng nhau qua trục Ox.

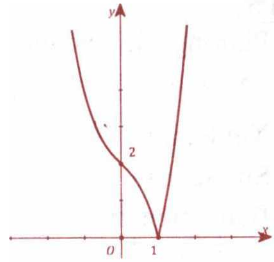
**Cách vẽ:**

**Bước 1**: Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với phần $f(x) \ge 0$ (Phần đồ thị nằm trên Ox).

**Bước 2**: Lấy đối xứng qua trục Ox đồ thị (3) phần $f(x) < 0$ (Phần nằm phía dưới trục Ox).

Ta có đồ thị (C')

Dựa vào đồ thị (C') ta có:

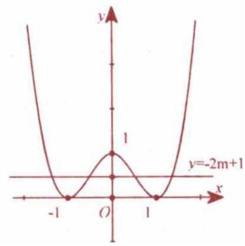



- Nếu $m < 0 \Rightarrow \Delta$ và (C') không cắt nhau
$\Rightarrow (1)$ vô nghiệm
- Nếu $m = 0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại một điểm
$\Rightarrow (1)$ có một nghiệm
- Nếu $m > 0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm
$\Rightarrow (1)$ có hai nghiệm.

**Bài 3.**

1) Bạn đọc tự làm

2) Phương trình $\Leftrightarrow 2|x|^2 - 3x^2 + 1 = -2m + 1$

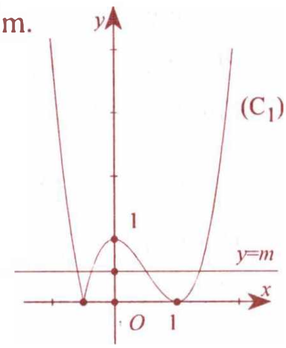



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases}(C'): y = 2|x|^3 - 3x^2 + 1 \\ \Delta; y = -2m + 1\end{cases}$$

Dựa vào đồ thị (C') ta có

$0 < -2m + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.




3) Điều kiện: $x \neq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \left|2x^3 - 3x^2 + 1\right| = m$

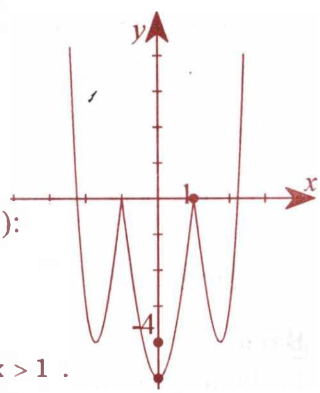
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của

hai đồ thị $\begin{cases}(C_1): y = \left|2x^3 - 3x^2 + 1\right| \\ d: y = m\end{cases}$

Dựa vào đồ thị $(C_1)$ ta có:

- $m < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm
- $m = 0 \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm (loại nghiệm $x = 1$)
- $0 < m < 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng bốn nghiệm
- $m = 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng ba nghiệm
- $m > 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng hai nghiệm.

**Bài 4.**




1) Bạn đọc tự làm

2) Số nghiệm của phương trình đã cho chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị (C'):

$$y = (x^2 - 5)\left|x^2 - 1\right|.$$

Ta có $(C') \equiv (C)$ khi $-1 \leq x \leq 1$

(C') đối xứng với (C) qua Ox khi $x < -1$ hoặc $x > 1$ .

Theo đồ thị ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4 < m < 0$ .

**Bài 5.**

1) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox

$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = -m \quad (1)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ với $x > -3$, ta có $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$.

Bảng biến thiên:

| x | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | | | 5 | | | | $+\infty$ |
| | $-2$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-27$ | $\nearrow$ | |

Đồ thị $(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-2$ khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hớn $-2$ hay đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-2$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$-2 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 2$.

2) Phương trình đường thẳng $d: y = kx$

Phương trình $(C_0): y = x^3 - 3x^2 - 9x$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_0)$ và $d$:

$$x^3 - 3x^2 - 9x = kx \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 9 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x - 9 - k = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đồ thị $(C_0)$ cắt đường thẳng $d$ tại ba điểm phân biệt $O, A, B$ khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$.

Hay $\begin{cases} \Delta = 9 + 4(9 + k) > 0 \\ -9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{45}{4} \\ k \neq -9 \end{cases} \quad (**)$

Khi đó $A(x_1; kx_1)$, $B(x_2; kx_2)$ nên

$AB^2 = (k^2 + 1)(x_1 - x_2)^2 = (k^2 + 1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = (k^2 + 1)(4k + 45)$

Suy ra $AB = 7\sqrt{2} \Leftrightarrow (k^2 + 1)(4k + 45) = 98 \Leftrightarrow 4k^3 + 45k^2 + 4k - 53 = 0$

$\Leftrightarrow (k - 1)(4k^2 + 49k + 53) = 0 \Leftrightarrow k = 1, k = \dfrac{-49 \pm \sqrt{1553}}{8}$ thỏa mãn (**).

Vậy $k = 1, k = \dfrac{-49 \pm \sqrt{1553}}{8}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 6.**

1) Phương trình $(C_1): y = x^3 - 2x^2 + 2x$, phương trình $d: y = kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(C_1)$:

$$x^3 - 2x^2 + 2x = kx \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 2 - k = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

$(C_1)$ và d cắt nhau tại ba điểm phân biệt O, A, B khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 0, hay tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = k - 1 > 0 \\ 2 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \neq 2 \end{cases}.$$

Khi đó $A(x_1; kx_1)$, $B(x_2; kx_2)$ nên

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2(k^2 + 1) = 4(k - 1)(k^2 + 1) = 4(k^3 - k^2 + k - 1)$$

Do đó $AB = 4\sqrt{26} \Leftrightarrow k^3 - k^2 + k - 105 = 0 \Leftrightarrow k = 5$

Vậy $k = 5$ là giá trị cần tìm.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $d_1$

$$x^3 - 2mx^2 + (m + 1)x = (1 - m)x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2mx^2 + 2mx - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left[x^2 - (2m - 1)x + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0 \quad (**) \end{array}\right.$$

$(C_m)$ và $d_1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi (**) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$

hoặc $m > \dfrac{3}{2}$ (1).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 \geq 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} \\ m \leq \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} \end{array}\right..$$

Kết hợp với (1) ta có $m \in \left(-\infty; \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$ là những giá trị cần tìm.

3) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và đường thẳng $y = x$

$$x^3 - 2mx^2 + (m + 1)x = x \Leftrightarrow x(x^2 - 2mx + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y = x$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm O, M, N khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 0. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \quad (1)$$

Phương trình $(C_{-1}): y = x^3 + 2x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 4x$

Tiếp tuyến của $(C_{-1})$ tại M và N vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2(3x_1 + 4)(3x_2 + 4) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(9x_1x_2 + 12(x_1 + x_2) + 16) + 1 = 0 \Leftrightarrow 33m^2 + 16m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{31}}{33}.$$

Kết hợp với (1), ta có $m = \dfrac{-8 \pm \sqrt{31}}{33}$ là giá trị cần tìm.

**Bài 7.** Đường thẳng d có phương trình: $y = kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$x^3 - 3x^2 + 6x = kx \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 6 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 6 - k = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4k - 15 > 0 \\ 6 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \dfrac{15}{4} \\ k \neq 6 \end{cases}$.

Khi đó $A(x_1; kx_1)$, $B(x_2; kx_2)$. Suy ra

$$AB^2 = (1 + k^2)(x_1 - x_2)^2 = (1 + k^2)(4k - 15)$$

Nên $AB = \sqrt{17} \Leftrightarrow (1 + k^2)(4k - 15) = 17 \Leftrightarrow 4k^3 - 15k^2 + 4k - 32 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy $k = 4$ là giá trị cần tìm.

**Bài 8.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ với Ox

$$x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)[x^2 - (3m - 2)x + 3 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - (3m - 2)x + 3 - 3m = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$(C_m)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8 > 0 \\ 5 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right) \\ m \neq \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + 4 = (3m - 2)^2 + 4$

Nên ta có: $(3m - 2)^2 + 4 = 20 \Leftrightarrow 9m^2 - 12m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2$,

$\left( m = -\dfrac{2}{3} \text{ loại do } m < \dfrac{-2\sqrt{2}}{3} \right)$

**Bài 9.** Với $x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4$ Vậy $A(2;4)$

Xem d là đường thẳng đi qua A và có hệ số góc là k.

Có pt d: $y - y_A = k(x - x_A) \Leftrightarrow y = kx - 2k + 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng

$$d: x^3 - 3x + 2 = kx - 2k + 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 1 - k) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 2$ hay $g(x) = x^2 + 2x + 1 - k = 0$ (*)

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C thì pt(*) phải có 2 nghiệm phân biệt $x_B; x_C$ phân biệt và khác 2. Lúc đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = k > 0 \\ g(2) = 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9$ (**)

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ x_B.x_C = 1 - k \end{cases}$

Mà B, C thuộc d nên $y_B = kx_B - 2k + 4; y_C = kx_C - 2k + 4$

Có $BC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow BC^2 = 8 \Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + k^2(x_B - x_C)^2 = 8$

$\Leftrightarrow \left[(x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C\right](1 + k^2) = 8 \Leftrightarrow k^3 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

(thỏa mãn đk (**))

Với $k = 1 \Rightarrow$ ptd : $y = x + 2$

Vậy đường thẳng d cần tìm có pt: $y = x + 2$.

**Bài 10.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ với đường thẳng $y = -1$:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$$

$(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 1 > 0 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 3m + 3$

Nên $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

**Bài 11.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và đường thẳng $y = -1$:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$; phương trình trở thành:

$$t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3m + 1.$$

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 12.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ với Ox:

$x^4 - (3m + 2)x^2 + 4m = 0$

Đặt $t = x^2,\ t \geq 0$ ta có phương trình: $t^2 - (3m + 2)t + 4m = 0$ (1)

$(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$ (giả sử $t_1 < t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = 3m + 2 > 0 \\ P = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó $A(-\sqrt{t_2};0),\ B(-\sqrt{t_1};0),\ C(\sqrt{t_1};0),\ D(\sqrt{t_2};0)$

Nên $BC = 2AB \Leftrightarrow 2\sqrt{t_1} = 2(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}) \Leftrightarrow t_2 = 4t_1$

Mặt khác: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 2 \\ t_1 t_2 = 4m \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} t_1 = \dfrac{3m + 2}{5} \\ t_1^2 = m \end{cases}$

Do đó: $\left(\dfrac{3m + 2}{5}\right)^2 = m \Leftrightarrow 9m^2 - 13m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = \dfrac{4}{9}$.

Vậy $m = 1, m = \dfrac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

**Bài 13.** Phương trình hoành động giao điểm của $(C_m)$ với Ox

$x^4 - 2(2m - 1)x^2 + 2m + 3 = 0$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2(2m - 1)t + 2m + 3 = 0$ (1)

$(C_m)$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$ (giả sử $t_1 < t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m^2 - 3m - 1 > 0 \\ S = 2m - 1 > 0 \\ P = 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \quad (2)$$

Khi đó $A(-\sqrt{t_2};0),\ B(-\sqrt{t_1};0),\ C(\sqrt{t_1};0),\ D(\sqrt{t_2};0)$

Nên $AB = 2OC \Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

Mặt khác $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(2m - 1) \\ t_1 t_2 = 2m + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{2m - 1}{5} \\ t_1^2 = \dfrac{2m + 3}{9} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2m - 1}{5}\right)^2 = \frac{2m + 3}{9} \Leftrightarrow 18m^2 - 43m - 33 = 0 \Leftrightarrow m = 3, m = -\frac{11}{18}.$$

Kết hợp với (2) ta có $m = 3$ là giá trị cần tìm.

**Bài 14.** Phương trình hoành độ giao điểm của $\Delta$ và (C)

$\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow 4x = (x+2m)(x-1)$ (với $x \neq 1$)

$\Leftrightarrow x^2 + (2m-5)x - 2m = 0$ (1)

$\Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-5)^2 + 8m > 0 \\ 1 + (2m-5) - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 12m + 25 > 0 \\ -4 \neq 0 \end{cases}$ đúng $\forall m$.

Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của (1) $\Rightarrow A(x_1; \frac{1}{2}x_1 + m)$, $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2 + m\right)$

$\Rightarrow$ trung điểm I của AB có tọa độ: $\begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5-2m}{2} \\ y_I = \frac{5+2m}{4} \end{cases}$

Do $AB \perp d$ nên A, B đối xứng nhau qua d khi và chỉ khi $I \in d$

Hay $2\frac{5-2m}{2} + \frac{5+2m}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Bài 15.**

1. Để hai điểm M, N đối xứng qua O thì trước hết $\Delta$ phải đi qua O

   Suy ra $2b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow \Delta : y = ax$.

   Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $\Delta$

   $\frac{3x+2}{x+2} = ax \Leftrightarrow ax^2 + (2a-3)x - 2 = 0$ (*)

   $\Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

   $x_1, x_2$ khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4a + 9 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0. \\ 4 \neq 0 \end{cases}$

   M, N đối xứng qua O $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x$

   $\frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$. Suy ra $A(-1;-1), B(2;2)$

   Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x + m$

   $\frac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0$ (1)

   Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt C, D $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác $-2$

   $\Leftrightarrow (m-1)(m-9) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$

Khi đó: $C(x_1;x_1+m), D(x_2;x_2+m)$

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow x_2-x_1=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=3 \Leftrightarrow \Delta=9 \Leftrightarrow m^2-10m+9=9 \Leftrightarrow m=0, m=10$

Do $m=0$ thì C, D trùng với B, A nên ta loại

Vậy $m=10$ là giá trị cần tìm.

**Bài 16.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng d:

$$\frac{2x-m}{mx+1}=2x-2m \Leftrightarrow 2mx^2-2m^2x-m=0\left(x\neq-\frac{1}{m}\right)\ (2)$$

Do $m\neq0$ nên (2) $\Leftrightarrow f(x)=2x^2-2mx-1=0$ (*) với $x\neq-\frac{1}{m}$

Để tồn tại 2 điểm A,B thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt $x_A;x_B$ khác $-\frac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2+2>0\\ f(-\frac{1}{m})=\frac{2}{m^2}+1\neq0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq0$$

Mặt khác có $x_A.x_B=\frac{1}{2}$ nên A, B luôn thuộc một đường (H) cố định.

Kẻ $OH\perp AB \Rightarrow OH=d_{(O,d)}=\frac{|-2m|}{\sqrt5}$

Lại có $A,B\in d \Rightarrow y_A=2x_A-2m; y_B=2x_B-2m$

Theo Viet có: $\begin{cases}x_A+x_B=m\\ x_A.x_B=\frac{1}{2}\end{cases}$

Có: $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5(x_A-x_B)^2}=\sqrt{5(x_A+x_B)^2-20x_Ax_B}$

$\Rightarrow AB=\sqrt{5m^2+10}$

Vì M,N là giao điểm của d với Ox,Oy nên $M(m;0);N(0;2m)$

Theo giả thiết:

$$S_{OAB}=3S_{OMN} \Leftrightarrow OH.AB=3OM.ON \Leftrightarrow \frac{|-2m|}{\sqrt5}.\sqrt{5m^2+10}=3|x_M||y_N|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2m|}{\sqrt5}.\sqrt{5m^2+10}=3|m||2m| \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2}=3|m|$$

$\Leftrightarrow m^2+2=9m^2 \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$. Vậy với $m=\pm\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

## Chuyên đề 6. Điểm thuộc đồ thị

### I. Tóm tắt lí thuyết

Ta thường gặp bài toán sau

**Bài toán:** Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị $(C): y = f(x)$, biết M thỏa mãn tính chất T cho trước.

**Phương pháp:** $M \in (C) \Rightarrow M(m; f(m))$.

Dựa vào tính chất T của M ta tìm được m.

### II. Các ví dụ minh họa

**Ví dụ 1.** Cho đồ thị $(C): y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

1. Tìm những điểm M thuộc (C), sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 2x + y - 2 = 0$

a) Bằng $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ b) Nhỏ nhất

2. Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

3. Tìm $N \in (C)$ sao cho khoảng cách từ N đến Oy gấp đôi khoảng cách từ N đến Ox.

4. Tìm $A \in (C)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

***Lời giải***

1. Gọi $M\left(m; \dfrac{m+2}{m-1}\right) \in (C)$

$$\Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{\left|2m + \dfrac{m+2}{m-1} - 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2m^2 - 3m + 4\right|}{\sqrt{5}\,|m-1|}.$$

a) $d(M, \Delta) = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left|2m^2 - 3m + 4\right| = 6|m-1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2 - 9m + 10 = 0 \\ 2m^2 + 3m - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2; m = \dfrac{5}{2} \\ m = -2; m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy $m = \dfrac{1}{2}, m = \dfrac{5}{2}, m = \pm 2$ là những giá trị cần tìm.

b) Xét hàm số $f(m) = \dfrac{2m^2 - 3m + 4}{m-1}$, ta có $f'(m) = \dfrac{2m^2 - 4m - 1}{(m-1)^2}$;

$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) \ge f(\frac{2+\sqrt{6}}{2}) = 1 + 2\sqrt{6} \\ f(m) \le f(\frac{2-\sqrt{6}}{2}) = 1 - 2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow d(M,\Delta) = |f(m)| \ge 2\sqrt{6} - 1$.

Vậy $d(M,\Delta)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$.

2. Gọi $A(1+a;1+\frac{3}{a})$, $B(1-b;1-\frac{3}{b})$ với $a,b > 0 \Rightarrow A,B$ nằm về hai nhánh của (C).

$\overline{BA} = (a+b;\dfrac{3(a+b)}{ab}) \Rightarrow AB^2 = (a+b)^2\left[1 + \dfrac{9}{a^2b^2}\right]$

Do $(a+b)^2 \ge 4ab \Rightarrow AB^2 \ge 4ab(1 + \dfrac{9}{a^2b^2}) = 4(ab + \dfrac{9}{ab}) \ge 24$.

$\Rightarrow AB \ge 2\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = \dfrac{9}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{3}$

$\Rightarrow A(1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$, $B(1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$ là hai điểm cần tìm.

3. Gọi $N(x_0;y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Theo bài ra: $d(N,Oy) = 2.d(N,Ox) \Leftrightarrow |x_0| = 2|y_0| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2y_0 \\ x_0 = -2y_0 \end{array}\right.$.

* $x_0 = 2y_0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{2x_0+4}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \end{array}\right.$$

* $x_0 = -2y_0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-2x_0-4}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 + 4 = 0$ vô nghiệm.

Vậy $N_1(-1;-\frac{1}{2})$ và $N_2(4;2)$ là hai điểm cần tìm.

4. Gọi $A(a;\dfrac{a+2}{a-1})$

Tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ: $k = |a| + \left|\dfrac{a+2}{a-1}\right|$

Với $a = 0 \Rightarrow k = 2$ nên ta chỉ cần xét $|a| < 2 \Leftrightarrow -2 < a < 2$

- $-2 < a \le 0 \Rightarrow k = -a - \dfrac{a+2}{a-1} = 1 - a + \dfrac{3}{1-a} - 2 \ge 2\sqrt{3} - 2$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow (1-a)^2 = 3 \Leftrightarrow a = 1 - \sqrt{3}$

- $0 < a < 1 \Rightarrow k = a - 3 - \dfrac{3}{a-1} + 2 = \dfrac{a(a-4)}{a-1} + 2 > 2$

- $1 < a < 2 \Rightarrow k = a - 1 + \dfrac{3}{a-1} + 2 \ge 2\sqrt{3} + 2 > 2$.

Vậy $\text{Min}\, k = 2\sqrt{3} - 2$ đạt được khi $A(1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = x^3 - (3m-1)x^2 + 2mx + m + 1 \quad (C_m)$.

1. Tìm trên đồ thị $(C_2)$ những cặp điểm đối xứng qua O

2. Tìm m để trên $(C_m)$ tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy

***Lời giải***

1. Với $m = 2 \Rightarrow (C_2): y = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$

Gọi $A(a; a^3 - 5a^2 + 6a + 3)$, $B(b; b^3 - 5b^2 + 6b + 3)$ là hai điểm thuộc (C) và đối xứng nhau qua O

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^3 - 5a^2 + 6a + 3 = -b^3 + 5b^2 - 6b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^2 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc (C) đối xứng nhau qua O là:

$$A\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; \frac{33}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \text{ và } B\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; -\frac{33}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

2. Gọi $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ là hai điểm thuộc (C)

$$M, N \text{ đối xứng nhau qua Oy} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \ne 0 \\ x_1 = -x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \ne 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_1^2 + 2m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy $m < 0$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = (m+2)x^3 - 3(m-2)x + m + 7 \quad (C_m)$

Chứng minh rằng họ đường cong $(C_m)$ luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm này nằm trên một đường thẳng.

***Lời giải***

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường cong $(C_m)$

$\Rightarrow y_0 = (m+2)x_0^3 - 3(m-2)x_0 + m + 7 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow m(x_0^3 - 3x_0 + 1) + 2x_0^3 + 6x_0 + 7 - y_0 = 0 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 2x_0^3 + 6x_0 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 2(3x_0 - 1) + 6x_0 + 7 = 12x_0 + 5 \end{cases}$

Vì phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt nên ta suy ra họ đường cong $(C_m)$ luôn đi qua ba điểm cố định.

Từ phương trình $y_0 = 12x_0 + 5 \Rightarrow$ ba điểm cố định này nằm trên đường thẳng $y = 12x + 5$.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Trên đồ thị (C) có bao nhiêu bộ bốn điểm $A, B, C, D$ sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $I(1;-1)$.

***Lời giải***

Dời hệ tọa độ $Oxy$ về hệ tọa độ $IXY$ theo công thức dời trục

$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$. Phương trình đường cong (C) đối với hệ toạ độ IXY là

$Y - 1 = -(X+1)^3 + 3(X+1)^2 - 3 \Leftrightarrow Y = -X^3 + 3X$

Trong hệ trục mới hình vuông ABCD biến thành hình vuông A'B'C'D'.

Xét $A'(a;-a^3 + 3a)$, $B'(b;-b^3 + 3b)$ với $a \neq b$ và ta giả sử $a, b > 0$.

$A'B'C'D'$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{IB'} = 0 \\ IA' = IB' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab + ab(a^2 - 3)(b^2 - 3) = 0 \\ a^2 + (a^3 - 3a)^2 = b^2 + (b^3 - 3b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \\ (a+b)\left[1 + (a^2 + ab + b^2 - 3)(a^2 - ab + b^2 - 3)\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \end{cases} \text{(I) hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \\ (a^2 + b^2 - 3)^2 - a^2b^2 + 1 = 0 \end{cases} \text{(II).}$$

- Giải hệ (I): Từ $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ thay vào phương trình thứ nhất ta có: $a^4 - 6a^2 + 10 = 0$ vô nghiệm
- Giải hệ $(II)$: Đặt $v = a^2b^2, u = a^2 + b^2$

Ta có: $\begin{cases} v - 3u + 10 = 0 \\ (u-3)^2 - v + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u - 10 \\ u^2 - 9u + 20 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 5 \\ v = 5 \end{cases}$$

* $\begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{cases}$

$* \begin{cases} u = 5 \\ v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$

Vì vai trò A, B như nhau nên trên (C) có hai bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho ABCD là hình vuông có tâm $I(1;-1)$.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ (C). Tìm những cặp điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : 16x + 17y + 33 = 0$.

***Lời giải***

Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua $\Delta$

Suy ra phương trình AB: $y = \dfrac{17}{16}x + m$

Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình:

$\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{17}{16}x + m \Leftrightarrow 16x^2 + 16x + 16 = (17x + 16m)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 + (16m+1)x + 16m - 16 = 0 \quad (*)$

(*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác $-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 256m^2 - 32m + 65 > 0 \\ -16 \neq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $m$.

Đường thẳng AB cắt $\Delta$ tại I : $\begin{cases} y = \dfrac{17}{16}x + m \\ y = -\dfrac{16}{17}x - \dfrac{33}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{-16(17m+33)}{545} \\ y_I = \dfrac{9}{8}x_I + m \end{cases}$.

Vì A, B đối xứng nhau qua $\Delta$ nên I là trung điểm của AB

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_I \Leftrightarrow -16m - 1 = \dfrac{-32(17m+33)}{545} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{16}$

Thay $m = \dfrac{1}{16}$ vào (1) ta có: $x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5, x = 3$

Vậy $A(-5;-\dfrac{21}{4})$ và $B(3;\dfrac{13}{4})$ là cặp điểm cần tìm.

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng với các điểm $A, B, C$ phân biệt thuộc đồ thị $(C): y = -\dfrac{2}{x}$ thì tam giác $ABC$ cũng có trực tâm $H$ thuộc đồ thị $(C)$.

***Lời giải***

Do $A, B, C$ thuộc (C) nên $A(a;\dfrac{-2}{a}), B(b;\dfrac{-2}{b}), C(c;\dfrac{-2}{c})$

Gọi $H(x_0;y_0)$ là trực tâm của tam giác $ABC$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{AH}=(x_0-a;y_0+\frac{2}{a}),\overrightarrow{BC}=(c-b;\frac{2(b-c)}{bc})$

$\overrightarrow{BH}=(x_0-b;y_0+\frac{2}{b}),\overrightarrow{AC}=(c-a;\frac{2(a-c)}{ac})$

Nên (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-a+\frac{2}{bc}(y_0+\frac{2}{a})=0\\ x_0-b+\frac{2}{ac}(y_0+\frac{2}{b})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-\frac{4}{abc}\\ y_0=\frac{abc}{2}\end{cases}$

Suy ra $y_0=-\frac{2}{x_0}\Rightarrow H\in(C)$.

## III. Bài tập vận dụng

$\boxed{\text{Bài 1.}}$ Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-x$ bằng $\sqrt{2}$ (**ĐH Khối A - 2014**).

$\boxed{\text{Bài 2.}}$ Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+mx+3m-2$ $(C_m)$.

1) Tìm trên $(C_1)$ những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ

2) Tìm m để trên $(C_m)$ tồn tại ít nhất một cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung.

3) Tìm tất cả các điểm cố định họ đường cong $(C_m)$ luôn đi qua.

4)Tìm những điểm cố định mà không có đồ thị nào của họ $(C_m)$ đi qua.

$\boxed{\text{Bài 3.}}$ Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x-2}$ (C).

1) Tìm những điểm nằm trên (C) cách đều hai trục tọa độ.

2) Tìm những điểm M nằm trên (C), sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

3) Tìm hai điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

4) Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta:3x-4y+1=0$ bằng $\frac{12}{5}$.

$\boxed{\text{Bài 4.}}$ Chứng minh $A,B,C$ thuộc $(C):y=\frac{x+1}{x-2}$ thì trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc (C).

*Hướng dẫn giải*

$\boxed{\text{Bài 1.}}$ Gọi $M\left(x;\frac{x+2}{x-1}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với: $\left|\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}+x}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x^2+2| = 2|x-1|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+4=0 \text{ (VN)} \\ x^2+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0, x=-2$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán $M(0;-2)$ và $M(-2;0)$.

**Bài 2.**

1. Với $m=1 \Rightarrow (C_1): y = x^3-3x^2+x+1$

Gọi $M(x_0;y_0), N(-x_0;-y_0)$ (với $x_0>0$) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Ta có: $M,N \in (C_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3-3x_0^2+x_0+1 \\ -y_0 = -x_0^3-3x_0^2-x_0+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3-3x_0^2+x_0+1 \\ x_0^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy $M(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{4\sqrt{3}}{9})$, $N(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{4\sqrt{3}}{9})$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(-x_0;y_0); x_0>0$ đối xứng nhau qua Oy.

$M,N \in (C_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3-(2m+1)x_0^2+mx_0+3m-2 \\ y_0 = -x_0^3-(2m+1)x_0^2-mx_0+3m-2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x_0^3+2mx_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = -m$ (do $x_0 \neq 0$).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.

3. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ đồ thị $(C_m)$ luôn đi qua

Ta có: $y_0 = x_0^3-(2m+1)x_0^2+mx_0+3m-2 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2-x_0-3)+y_0-x_0^3+x_0^2+2=0 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2-x_0-3=0 \\ y_0 = x_0^3-x_0^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{2} \\ y_0 = -\dfrac{7}{8} \end{cases}$

Vậy họ đường cong $(C_m)$ có hai điểm cố định

$A_1(-1;-4)$ và $A_2(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{8})$.

4. Gọi $B(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà không có đường cong nào của họ đồ thị $(C_m)$ đi qua.

Ta có: $y_0 \neq x_0^3 - (2m+1)x_0^2 + mx_0 + 3m - 2 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow m(2x_0^2 - x_0 - 3) + y_0 - x_0^3 + x_0^2 + 2 \neq 0 \quad \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - x_0 - 3 = 0 \\ y_0 \neq x_0^3 - x_0^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 \neq -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{2} \\ y_0 \neq -\dfrac{7}{8} \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm mà không có đường cong nào của họ ($C_m$) đi qua là đường thẳng $x + 1 = 0$ trừ đi điểm $(-1;-4)$ và đường thẳng $2x - 3 = 0$ trừ đi điểm $(\frac{3}{2};-\frac{7}{8})$.

**Bài 3.**

1. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$

M cách đều hai trục tọa độ $\Leftrightarrow |x_0| = |y_0| = \left|\dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 2}\right|$

- $\dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} = x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 5x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
- $\dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} = -x_0 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy có bốn điểm cần tìm: $M_{1,2}\left(\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2};\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right), M_{3,4}\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};\dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$

Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là:

$$d = |x_0| + |y_0| = |x_0| + \left|\dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 2}\right|$$

Với $x_0 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow d = \dfrac{1}{3}$ nên với $|x_0| > \dfrac{1}{3} \Rightarrow d > \dfrac{1}{3}$.

Ta xét $|x_0| < \dfrac{1}{3} \Rightarrow d = \left|x_0 + \dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 2}\right| = \left|\dfrac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2}\right|$

Mà $\dfrac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3x_0^2 + 2x_0 - 1}{3(x_0 - 2)} = \dfrac{(3x_0 - 1)(x_0 + 1)}{3(x_0 - 2)} > 0$ với

$\forall x_0 : |x_0| < \dfrac{1}{3}$. Suy ra $d > \dfrac{1}{3} \quad \forall x_0 : |x_0| > \dfrac{1}{3}$.

Vậy $M(\frac{1}{3};0)$ là giá trị cần tìm.

3. Ta có $A(2+a;3+\frac{5}{a})$, $B(2-b;3-\frac{5}{b})$ (với $a,b>0$) là hai điểm nằm về hai nhánh của (C).

$$AB^2=(a+b)^2+\left(\frac{5}{a}+\frac{5}{b}\right)^2=(a+b)^2(1+\frac{25}{a^2b^2})\geq 4ab.2.\frac{5}{ab}=40$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\1=\dfrac{25}{a^2b^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{5}$.

Vậy $A(2+\sqrt{5};3+\sqrt{5})$, $B(2-\sqrt{5};3-\sqrt{5})$.

4. Ta có $M(m;\frac{3m-1}{m-2})\in(C)$; $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|3m-4\dfrac{3m-1}{m-2}+1\right|}{5}=\dfrac{1}{5}\left|\dfrac{3m^2-17m+2}{m-2}\right|$

Suy ra $d(M,\Delta)=\frac{12}{5}\Leftrightarrow\left|3m^2-17m+2\right|=12\left|m-2\right|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m^2-29m+26=0\\3m^2-5m-22=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1;m=\dfrac{26}{3}\\m=-2;m=\dfrac{11}{3}\end{array}\right.$$

Vậy có bốn điểm thỏa yêu cầu bài toán

$M_1(1;-2),M_2(\frac{26}{3};\frac{15}{4}),M_3(-2;\frac{7}{4}),M_4(\frac{11}{3};6)$.

**Bài 4.** Ta đổi trục toa độ, hàm số trở thành $Y=\frac{3}{X}$ trên hệ trục IXY

Xét hàm số $Y=\frac{3}{X}$.

Gọi $A(a,\frac{3}{a})$, $B(b,\frac{3}{b})$, $C(c;\frac{3}{c})$ là 3 điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số;

Gọi H(m,n) là trực tấm của tam giác ABC

Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 & (1)\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 & (2)\end{cases}$.

Từ (1) ta có $m=\dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}$. Từ (2) suy ra $m=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc}$

Từ đó suy ra $\dfrac{3na+a^2bc-9}{abc}=\dfrac{3nb+ab^2c-9}{abc}\Leftrightarrow n=\dfrac{-abc}{3}$.

Thay vào (1) ta được $m=\dfrac{-9}{abc}$ hay $n=\dfrac{3}{m}$ có nghĩa là H thuộc đồ thị (C).

# CHƯƠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## I. Tóm tắt lí thuyết

***1. Phương trình lượng giác cơ bản***

**a. Phương trình:** $\sin x = m$ (1)

- Nếu: $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm
- Nếu: $|m| \le 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]: \sin\alpha = m$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$.

**Chú ý:**

1) Phương trình $\sin x = \sin\beta^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \beta^0 + k360^0 \end{array}\right.$

2) Nếu $\alpha$ thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$.

3) Các trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

**b. Phương trình:** $\cos x = m$ (2)

- Nếu: $|m| > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm
- Nếu: $|m| \le 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0; \pi]: \cos\alpha = m$

Suy ra (2) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$.

**Chú ý:**

1) Phương trình $\cos x = \cos\beta^0 \Leftrightarrow x = \pm\beta^0 + k2\pi$

2) Nếu $\alpha$ thỏa mãn $\begin{cases} 0 \le -\alpha \le \pi \\ \cos\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos m$.

3) Các trường hợp đặc biệt:

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

**c. Phương trình:** $\tan x = m \quad (3)$

Với $\forall m \Rightarrow \exists\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right): \tan\alpha = m$

Suy ra (3) $\Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ .

**Chú ý:**

1) Phương trình $\tan x = \tan\beta^0 \Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0$

2) Nếu $\alpha$ thỏa mãn $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arctan m$ .

3) Các trường hợp đặc biệt:

- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

**d. Phương trình:** $\cot x = m \ (4)$

Với $\forall m \Rightarrow \exists\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right): \cot\alpha = m$

$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ .

**Chú ý:**

1) Phương trình $\cot x = \cot\beta^0 \Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0$

2) Nếu $\alpha$ thỏa mãn $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} m$ .

3) Các trường hợp đặc biệt:

- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

**2. Phương trình bậc nhất đối với** $\sin x$ **và** $\cos x$

Là phương trình có dạng: $a\sin x + b\cos x = c \ (1)$; với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.

**Cách giải**: Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ và đặt

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2). Đây là phương trình cơ bản.

**Chú ý:**

- (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq c^2$.
- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right)$
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$.

## 3. Phương trình bậc hai chứa một hàm số lượng giác

Là phương trình có dạng: $a\begin{bmatrix}\sin u(x)\\ \cos u(x)\\ \tan u(x)\\ \cot u(x)\end{bmatrix}^2 + b\begin{bmatrix}\sin u(x)\\ \cos u(x)\\ \tan u(x)\\ \cot u(x)\end{bmatrix} + c = 0$

**Cách giải**: Đặt $t = \begin{bmatrix}\sin u(x)\\ \cos u(x)\\ \tan u(x)\\ \cot u(x)\end{bmatrix}$ ta có phương trình: $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình này ta tìm được $t$, từ đó tìm được $x$

**Chú ý**:

1) Khi đặt $t = \sin u(x)$ hoặc $t = \cos u(x)$ thì $t \in [-1;1]$
2) $\cos nx$ luôn biểu diễn được qua $\cos x$
   - $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
   - $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
   - $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

**4. Phương trình đẳng cấp**

Là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó luỹ thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

**Cách giải:** Chia hai vế phương trình cho $\cos^k x \neq 0$ ($k$ là số mũ cao nhất) ta được phương trình ẩn là $\tan x$.

**5. Phương trình đối xứng (phản đối xứng) đối với $\sin x$ và $\cos x$**

Là phương trình có dạng: $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$ (3)

Để giải phương trình trên ta sử dụng phép đặt ẩn phụ

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 - 1}{2} = \sin x\cos x \\ t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \end{cases}$$

Thay và (5) ta được phương trình bậc hai theo $t$.

Ngoài ra chúng ta còn gặp phương trình phản đối xứng có dạng

$a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$ (3')

Để giải phương trình này ta cũng đặt

$$t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \\ \sin x\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2} \end{cases}$$

Thay vào (3') ta có được phương trình bậc hai theo $t$.

## II. Các ví dụ minh họa

### 1. Các ví dụ cơ bản

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

1) $\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$ 2) $\sin^2 3x - \cos^2 2x = 0$

3) $2\sin^2 2x - \cos 7x = 1$.

*Lời giải*

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\sqrt{3}\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

2) Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 6x}{2} - \dfrac{1 + \cos 4x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x.\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

3) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 1 = \cos 7x \Leftrightarrow \cos 7x = -\cos 4x = \cos(\pi - 4x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \pi - 4x + k2\pi \\ 7x = -\pi + 4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{11} + \dfrac{k2\pi}{11} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

**Ví dụ 2.** Tìm tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $\cos^2 4x + \cos^2 7x = 1$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 8x}{2} + \dfrac{1+\cos 14x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 14x + \cos 8x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 11x.\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 11x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{22} + \dfrac{k\pi}{11} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- Xét $x = \dfrac{\pi}{22} + \dfrac{k\pi}{11}$, vì $x \in (0;\pi)$ nên ta có:

  $$0 < \frac{\pi}{22} + \frac{k\pi}{11} < \pi \Leftrightarrow 0 < 1 + 2k < 22 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{21}{2}$$

  Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

  Nên trường hợp này, ta có tổng các nghiệm là: $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\left(\frac{\pi}{22} + \frac{k\pi}{11}\right) = \frac{11\pi}{2}$.

- Xét $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, vì $x \in (0;\pi)$ nên ta có:

  $$0 < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow 0 < 1 + 2k < 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{5}{2}$$

  Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0, 1, 2$.

  Nên trường hợp này, ta có tổng các nghiệm là: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm trên khoảng $(0;\pi)$ của phương trình đã cho là: $7\pi$.

**Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau

1) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$    2) $4\sin 2x\cos 2x = 3\sin 3x + \sqrt{5}\cos 4x$

3) $\sin 7x - \cos x = \sqrt{3}(\sin x - \cos 7x)$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm phương trình đã cho.

2) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 4x - \sqrt{5}\cos 4x = 3\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin 4x - \frac{\sqrt{5}}{3}\cos 4x = \sin 3x$$

Vì $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) : \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos\alpha = \frac{2}{3}$

Ta có: $\sin 4x \cos\alpha - \cos 4x \sin\alpha = \sin 3x \Leftrightarrow \sin(4x - \alpha) = \sin 3x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \alpha = 3x + k2\pi \\ 4x - \alpha = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \frac{\alpha}{7} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.$ là nghiệm phương trình đã cho.

3) Phương trình $\Leftrightarrow \sin 7x + \sqrt{3}\cos 7x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm phương trình đã cho.

**Ví dụ 4**. Giải các phương trình sau

1) $3\sin^2 x - \cos x + 2\cos 2x - 3 = 0$

2) $3\cos 4x - 4\sin^4 2x + 2\cos^2 2x - 5 = 0$

3) $\frac{1}{\sin^2 x} - 4\cot x + 1 + \tan x = 0$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 3(1 - \cos^2 x) - \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ là nghiệm phương trình đã cho.

2) Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos 4x - (1 - \cos 4x)^2 + 1 + \cos 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 4x - 6\cos 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ là nghiệm phương trình đã cho.

3) Phương trình $\Leftrightarrow \cot^2 x - 4\cot x + 2 + \dfrac{1}{\cot x} = 0$

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cot^3 x - 4\cot^2 x + 2\cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cot x - 1)(\cot^2 x - 3\cot x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 1 \\ \cot x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \operatorname{arccot}\dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3} + k\pi \end{array}\right.$ là nghiệm phương trình đã cho.

**Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau

1) $\cos 2x - 2\sin x = \sqrt{3}\sin 2x$ 2) $\sin 3x + \cos 2x = \sqrt{3}(\cos 3x - \sin 2x)$

3) $\sqrt{3}\cos 4x - 2\sin 5x.\cos x - \sin 6x = 0$

4) $2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 1$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = 2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} - 2x = x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{6} - 2x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} - \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} - k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{6} = 2x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{6} = -2x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

3) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 4x - (\sin 6x + \sin 4x) - \sin 6x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 4x - \sin 4x = 2\sin 6x \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 4x\right) = \sin 6x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \dfrac{\pi}{3} - 4x + k2\pi \\ 6x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3} - 4x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

4) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

**Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau

1) $8\sin^4 x + \cos 2x - 2\cos 4x + 1 = 0$ 2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\sin 2x$

3) $2\sin^6 x - \cos^4 x + \cos 2x - \cos 4x = 0$

4) $2\sin 6x + \cos 4x - 6\cos^2 2x + 2\sin 2x + 1 = 0$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 8\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \cos 2x - 2(2\cos^2 2x - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) + \cos 2x - 4\cos^2 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3) Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x - 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 4\cos 2x - 8\cos^2 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^3 2x + 4\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + 1)(\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

4) Phương trình

$\Leftrightarrow 2(3\sin 2x - 4\sin^3 2x) + 1 - 2\sin^2 2x - 6(1 - \sin^2 2x) + 2\sin 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 2x - \sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin^2 2x - 1)(2\sin 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

**Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

2) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

3) $2\cos^2 3x + \sin 11x = 1 + \sin x$

4) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow (\sin 6x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 2x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left[\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{3x}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow 4\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}\left(2\cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{7x}{2} = 0\\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k2\pi}{7}\\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}.$$

2) Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

3) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 3x - 1 + \sin 11x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x + 2\cos 6x.\sin 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x(1 + 2\sin 5x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0\\ \sin 5x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 5x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ 5x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6}\\ x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{k2\pi}{5}\\ x = \dfrac{7\pi}{30} + \dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

4) Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 6x}{2} - \dfrac{1 + \cos 8x}{2} = \dfrac{1 - \cos 10x}{2} - \dfrac{1 + \cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$

$$\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 11x = \cos 7x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k\dfrac{\pi}{2};\ x = k\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right..$$

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 8.** Giải các phương trình sau

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x - 2\cos 2x + 2$

2) $4\sin^4 x - 24\cos^6 x + \cos^2 4x + 22\cos 2x + 1 = 0$.

3) $\tan 3x + 2\sin 2x = \tan x$.

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 2\cos^2 2x - 1 - 2\cos 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x = 2\cos^2 2x - 2\cos 2x \Leftrightarrow 3\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = \dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3} + k\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = k\pi,\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Đặt $t = \cos 2x,\ -1 \le t \le 1$, ta có:

$$4\sin^4 x = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$$

$$24\cos^6 x = 3(1+t)^3 = 3 + 9t + 9t^2 + 3t^3$$

$$\cos^2 4x = (2t^2 - 1)^2 = 4t^4 - 4t^2 + 1$$

Nên phương trình đã cho trở thành:

$$1 - 2t + t^2 - 3 - 9t - 9t^2 - 3t^3 + 4t^4 - 4t^2 + 1 + 22t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 - 3t^3 - 12t^2 + 11t = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(4t^2 + t - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0, t = 1, t = \frac{-1 \pm \sqrt{177}}{8}.$$

Từ đó, ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ x = k\pi,\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{177}}{8} + k\pi.$$

3) Điều kiện: $\cos 3x \ne 0$

Đặt $t = \tan x$, ta có:

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},\ \sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

Nên phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}+\frac{4t}{1+t^2}=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ \dfrac{3-t^2}{1-3t^2}+\dfrac{3-t^2}{1+t^2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t^2=3\\ t^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\pm\sqrt{3}\\ t=\pm1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x=k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

**Ví dụ 9.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\dfrac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1)$

2) $\dfrac{\cos x.\sin 4x}{1+\cos 2x}+\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x+\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{3}(1+\tan^2 x)+\dfrac{4}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2\cot x$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\tan^2 x+\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x\cos x}-\sqrt{3}=2\cot x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\tan^2 x+2\tan x-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-\sqrt{3}\\ \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right..$$

2) Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\cos 2x\neq -1$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{\cos x.\sin 4x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1-\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\tan^2 x+\dfrac{1-\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 4x}{\cos x}+(1+\sin 3x)\tan^2 x+1-\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 4x}{\cos x}+1+\tan^2 x+\sin 3x(\tan^2 x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 4x}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin 3x.\cos 2x}{\cos^2 x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x+1-\sin 3x.\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 5x+\sin 3x)+1-\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x-\sin x+2=0 \Leftrightarrow -4\sin^3 x+2\sin x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(2\sin^2 x+2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta thấy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Ví dụ 10.** Giải các phương trình sau

1) $\cos\frac{4x}{3}-\cos^2 x=0$ 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$

3) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos\frac{4x}{3}-1-\cos 2x=0$

Đặt $t=\frac{2x}{3}$, ta có phương trình: $2\cos 2t-1-\cos 3t=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t-2(2\cos^2 t-1)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-4\cos^2 t-3\cos t+3=0 \Leftrightarrow (\cos t-1)(4\cos^2 t-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ 2(1+\cos 2t)-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k2\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}=k2\pi\\ \frac{2x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k3\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{k3\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

2) Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Rightarrow \frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{10}+3\left(\frac{3\pi}{10}-t\right)=\pi-3t$

Ta có phương trình: $\sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t-\sin t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ 4\sin^2 t-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}=k\pi\\ \dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{5}-k2\pi\\ x=\dfrac{14\pi}{15}+k2\pi, x=\dfrac{4\pi}{15}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

3) Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 3x+\dfrac{\pi}{4}=3\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}=3t-\dfrac{\pi}{2}$

Ta có phương trình $\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos t\Leftrightarrow -\cos 3t=2\cos t$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-\cos t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ 4\cos^2 t-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \cos 2t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ t=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, x=\dfrac{-7}{12}\pi+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

**Ví dụ 11.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{2\sin^2 x+\sin x+3}{1-2\sin x}=\sqrt{3}\cos x$

2) $\left(\dfrac{\cos 7x-\sin 3x}{\cos 5x-\sin 5x}\right)^2=1+2\sin 2x+4\sin^2 x$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\sin x\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x+3=\sqrt{3}\cos x(1-2\sin x)$

$\Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sin x+3=\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\cos x-\sin x-4=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

2) Điều kiện: $\cos 5x - \sin 5x \neq 0 \Leftrightarrow 5x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $\cos 7x - \sin 3x = \cos 7x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{5}\right).\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$1 + 2\sin 2x + 4\sin^2 x = 1 + 2\sin 2x + 2(1 - \cos 2x) = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nên phương trình đã cho tương đương với

$$2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có: $x = k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

**Ví dụ 12.** Giải các phương trình sau

1) $\sin^2 2x.\cos 6x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}\sin\frac{11x}{2}.\sin\frac{9x}{2}$

2) $8\sin^3 x\sin 5x + 2\cos 2x(2\cos^2 3x + 3\cos 4x - 2) + 3 = 0$

3) $\left(\frac{\cos 4x + \sin 2x}{\cos 3x + \sin 3x}\right)^2 = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$.

*Lời giải*

1) Ta có phương trình đã cho tương đương với

$(1 - \cos 4x)\cos 6x + 1 - \cos 6x = \sin\frac{11x}{2}\sin\frac{9x}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\cos 4x.\cos 6x=\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{9x}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 10x)=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 10x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos x-2=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-3=0$

$\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Ta có:

$$8\sin^3 x\sin 5x=2(3\sin x-\sin 3x)\sin 5x$$
$$=6\sin x\sin 5x-2\sin 3x\sin 5x$$
$$=3(\cos 4x-\cos 6x)+\cos 8x-\cos 2x$$

$$4\cos 2x.\cos^2 3x=2\cos 2x(1+\cos 6x)=2\cos 2x+\cos 4x+\cos 8x$$

$$2\cos 2x(3\cos 4x-2)=2\cos 2x(6\cos^2 2x-5)$$
$$=12\cos^3 2x-10\cos 2x=3\cos 6x-\cos 2x$$

Nên phương trình đã cho trở thành:

$$3\cos 4x-3\cos 6x+\cos 8x-\cos 2x+2\cos 2x+\cos 4x+\cos 8x+$$
$$+3\cos 6x-\cos 2x+3=0$$

$\Leftrightarrow 2\cos 8x+4\cos 4x+3=0\Leftrightarrow 4\cos^2 4x+\cos 4x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

3) Điều kiện: $\cos 3x+\sin 3x\neq 0$

Ta có: $\cos 4x+\sin 2x=\cos 4x+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos 3x+\sin 3x=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \pi + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

**Ví dụ 13.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{3}\cos 2x.\left(1 + \tan^2(x - \frac{\pi}{4})\right) = 2\tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x) + 2\sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$

3) $2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

4) $\cos 2x(\sqrt{3} + \tan x) = \sqrt{2} - \tan x$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x = \dfrac{2\tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x = 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

2) Phương trình $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x) = 1 + 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x + 2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\sin x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x + \sin 3x + \sin x - \cos x + \cos 3x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 3x = \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{4} = 2x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -2x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

3) Phương trình

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x = \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x - \sin x)^2 = \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x - \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0\\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \sqrt{3}\\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{3} + k\pi\\ x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{3} + k\pi\\ x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right..$$

4) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \tan x(1 + \cos 2x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \frac{\sin x}{\cos x}.2\cos^2 x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi\\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{5\pi}{24} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $\left[\begin{array}{l}x = \frac{5\pi}{24} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

**Ví dụ 14.** Giải các phương trình sau

1) $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$

2) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$

3) $\cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) $\dfrac{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)^2(1 + 2\sin 2x)}{\sin 3x + \sin 5x} = 1 - \tan x$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 3x-\sin x+\cos 3x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\cos 2x\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\cos 2x\Leftrightarrow \cos 2x\left[2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi,\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có tất cả ba họ nghiệm là:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi \text{ và } x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

3) Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)(1-2\sin 2x)=(\sin x-\cos x)(\sin 2x-\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x-\sin x=0 & (1) \\ (\cos x+\sin x)(1-2\sin 2x)=\cos 2x-\sin 2x & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(2) $\Leftrightarrow \sin x+\cos x-2\sin x\sin 2x-2\sin 2x\cos x=\cos 2x-\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x-\sin 3x=\cos 2x-\sin 2x\Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\frac{\pi}{4}=2x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 3x+\frac{\pi}{4}=-2x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} \sin 3x+\sin 5x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \sin 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{4}$

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^2(1+2\sin 2x)=\sqrt{2}\sin 4x(\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0 \\ (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x) = \sqrt{2}\sin 4x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + m\pi \text{ (loại)} \\ \cos x - \sin x + \sin 3x + \sin x + \cos 3x - \cos x = \sqrt{2}\sin 4x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{3}{28}\pi + \dfrac{2}{7}n\pi\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm phương trình:

$$x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2n\pi}{7}\ (n \neq 7m - 3) \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

**Ví dụ 15.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin(x - \frac{3\pi}{2})} = 4\sin(\dfrac{7\pi}{4} - x)$

2) $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\dfrac{9x}{2}$

3) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$

4) $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin 4x = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

***Lời giải***

1) Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}\sin x \neq 0 \\ \sin(x - \frac{3\pi}{2}) \neq 0\end{array}\right.$

Ta có: $\sin(x - \dfrac{3\pi}{2}) = \sin\left[(x + \dfrac{\pi}{2}) - 2\pi\right] = \sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos x$

$$\sin(\frac{7\pi}{4} - x) = \sin\left[2\pi - (x + \frac{\pi}{4})\right] = -\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$$

Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sqrt{2}\sin 2x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi;\quad x = -\dfrac{5\pi}{8} + k\pi\end{array}\right.$$

2) Phương trình $\Leftrightarrow \cos 3x + \sin 7x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) - \left(1 + \cos 9x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 3x + \sin 7x = \sin 5x - \cos 9x \Leftrightarrow \cos 9x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 5x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 6x.\cos 3x + 2\cos 6x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x(\cos 3x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0\\ \cos 3x = -\sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0\\ \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 3x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi\\ 3x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right..$$

3) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left[1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right..$$

4) Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 4x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi, k\in\mathbb{Z}.\\ x=\pi+\frac{2}{3}k\pi\end{array}\right.$$

**Ví dụ 16.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{\sin^2 x(\sin x-1)}{\sin x+\cos x}=4\cos^2\dfrac{x}{2}$ 2) $\tan^2 x=\dfrac{1+\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\sin x+\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x)(\sin x-1)=2(\sin x+\cos x)(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[2(\sin x+\cos x)-(1-\cos x)(\sin x-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1)=0$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\cos x)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

2) Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{1-\sin x}\left(\frac{1-\cos x}{1+\sin x}-\frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\cos x=0\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\\ (1-\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x)=(1+\sin x)(1-\cos x+\cos^2 x)=0 \quad (*)\end{array}\right.$$

Khai triển và rút gọn (*) ta được:

$(*)\Leftrightarrow \sin^2 x-\sin^2 x\cos x=\cos^2 x+\sin x\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x-\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x-\sin x\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \sin x-\cos x-\sin x\cos x=0 \ (1)\end{array}\right.$$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2(\sin x-\cos x)+1-2\sin x\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^2+2(\sin x-\cos x)-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=-1+\sqrt{2}\\ \sin x-\cos x=-1-\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\text{(VN)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi,$$

$$x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

**Ví dụ 17.** Giải các phương trình sau

1) $\tan x-2\sqrt{2}\cos(4x-\frac{\pi}{4})=\cot x+4\cos^2(2x+\frac{\pi}{4})$

2) $\dfrac{\sqrt{2}(2-\tan x)}{\cos(5x-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{1-\tan x}{\sin x}$

3) $\sin 4x+\sqrt{3}\left(2\sin x\cos 2x+\frac{1}{2}\right)=\sin 2x+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

4) $\sin 4x+\cos 4x=4\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-1.$

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x-\cot x-2(\sin 4x+\cos 4x)-2\left[1+\cos(4x+\frac{\pi}{2})\right]=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}-2\sin 4x-2\cos 4x-2+2\sin 4x=0\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}-2(\cos 4x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}-4\cos^2 2x=0\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 4x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin 4x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2) Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x(2\cos x - \sin x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).(\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - \sin x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x - \sin x) = \cos 6x + \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x - 1 + \cos 2x = \cos 6x + \sin 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x - 1 = -2\sin 4x \sin 2x + \sin 4x$

$\Leftrightarrow (\sin 4x + 1)(2\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, ta có $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

3) Phương trình

$\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3}\left(\sin 3x - \sin x + \frac{1}{2}\right) = \sin 2x + \sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x - 2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} - 2\sin 2x - 2\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sin 4x - \sin 2x) - 2\cos 3x - \sqrt{3}(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 3x \sin x - 2\cos 3x - \sqrt{3}(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos 3x - \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 2\cos^2 2x = 4(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x) = 2(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ (\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x) = 2 \end{array}\right.$

• $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

• $(\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad (1)$

Do $\left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1, \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$ nên $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$ (II).

Ta có

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \end{cases}$ ta thấy hệ này vô nghiệm.

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi \end{cases}$ ta thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Ví dụ 18.** Giải các phương trình sau

1) $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

2) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin 3x + \cos 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

***Lời giải***

1) Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - 2\cos x + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x - 3 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) + 2\sin 3x + 2\cos 2x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\cos x + 2\sin 3x + 3\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x(2\sin x + 1) + 2(3\sin x - 4\sin^3 x) + 3(1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x(2\sin x + 1) - (8\sin^3 x + 6\sin^2 x - 5\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x(2\sin x+1)-(2\sin x+1)(4\sin^2 x+\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sqrt{3}\cos x-4\sin^2 x-\sin x+3)=0$

• $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

• $\sqrt{3}\cos x-4\sin^2 x-\sin x+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-4\sin^2 x-\sin x+3(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x+3\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)(\sqrt{3}\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x-\sin x)(\sqrt{3}\cos x+\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \\ \sqrt{3}\cos x+\sin x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=\sqrt{3} \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

**Ví dụ 19**. Giải các phương trình sau

1) $\sin 3x+2\cos 3x+\cos 2x-2\sin 2x-2\sin x-1=0$.

2) $(2\cos 2x-1)\cos x-\sin x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\sin 3x$.

3) $\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})\cos 2x-2\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})=0$

4) $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 4x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$\sin x(3-4\sin^2 x)+2\cos x(4\cos^2 x-3)-2\sin^2 x-4\sin x\cos x-2\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x-1)+2\cos x(4\cos^2 x-1)-2(2\cos x+\sin x)$
$-2\sin x(2\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+2\cos x)(4\cos^2 x-2\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+2\cos x=0 \\ 4\sin^2 x+2\sin x-1=0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x=-2 \Leftrightarrow x=\arctan(-2)+k\pi$

2) Phương trình $\Leftrightarrow (4\cos^2 x-3)\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin 3x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x-\sin x=\sqrt{2}\sin 3x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\sin 3x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 3x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\sin 3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5}\\ x=\frac{-\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

3) Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-2\left(\sin x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right]=0$$

- $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$
- $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0$ vô nghiệm

(do $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1, \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge -1$)

4) Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 4x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+\frac{2}{3}k\pi\end{array}\right.$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Ví dụ 20.** Giải phương trình $\cos 7x + 2(\cos 5x + \cos 3x + \cos x) = 0$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow 2(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x) = \cos 7x$ (*).

- Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

+) $x = 2n\pi$, khi đó $VT(*) = 8$ và $VP(*) = 1$ nên (*) vô nghiệm

+) $x = (2n+1)\pi$, khi đó $VT(*) = -8$ và $VP(*) = -1$ nên (*) vô nghiệm.

- Xét $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, khi đó

$(*) \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x) = \cos 7x \sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos 3x \sin x + 2\cos 5x \sin x + 2\cos 7x \sin x = \cos 7x \sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x + \sin 8x - \sin 6x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 6x)$

$\Leftrightarrow \sin 8x = -\sin 6x = \sin(-6x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = -6x + m2\pi \\ 8x = \pi + 6x + 2m\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{m\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right., m \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ x = \frac{k\pi}{7}$ với $m, k \in \mathbb{Z}$ và $k \neq 7n$.

**Ví dụ 21.** Giải phương trình $(2\sin 5x - 1)(2\cos 2x - 1) = 2\sin x$.

***Lời giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$(2\sin 5x - 1)(4\cos^2 x - 3) = 2\sin x$

**Trường hợp 1**: $\cos x = 0$ thay vào ta thấy không thỏa phương trình

**Trường hợp 2**: $\cos x \neq 0$

Nhân cả 2 vế của phương trình với $\cos x$ ta được:

$(2\sin 5x - 1)(4\cos^3 x - 3\cos x) = 2\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow (2\sin 5x - 1).\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 5x.\cos 3x - \cos 3x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 8x + \sin 2x - \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 8x = \frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{22} + \frac{k2\pi}{11} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{22} + \frac{k2\pi}{11}, k \neq 5 + 11m \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{n2\pi}{5}, n \neq 2 + 5m \end{array}\right.$$

**Ví dụ 22.** Giải phương trình $\dfrac{2-\cos 2x}{\sin 3x - \sin 5x} = \sqrt{2}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\sin 3x - \sin 5x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 2 - \cos 2x + 2\sqrt{2}\cos 4x \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\cos 4x \sin x = 0$

$\Leftrightarrow (1-\cos^2 4x) + (2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\cos 4x \sin x + \cos^2 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 4x + (\sqrt{2}\sin x + \cos 4x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sqrt{2}\sin x + \cos 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ là nghiệm của phương trình.

**Ví dụ 23.** Giải phương trình

$$8\cos^3 x = \sin x.\sin^3 2x + 8\sqrt{2}(1-\sin x)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 x - \sin^4 x \cos^3 x = (1-\sin x)(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos^3 x(1-\sin^4 x) = (1-\sin x)(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = 0 \quad (1) \\ \cos^3 x(1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x) = \sin x + \cos x \quad (2) \end{array}\right.$$

+) (1) $\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

+) Giải (2): Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$ (3).

Vì hàm số $f(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f(\tan x) \Leftrightarrow \sin x = \tan x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

1) $2+\cos 2x=-5\sin x$

2) $\cos 2x+\sin^2 x-2\cos x+1=0$

3) $2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cos x$

4) $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x$

5) $2\tan^2 x+\frac{3}{\cos x}=-3$

6) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}$

7) $3\cos x\cos 2x+2=5\cos^2 x$

8) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x+1=0$

9) $\sin 2x+3\cos x=\sqrt{5}$

10) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\sin 3x$.

**Bài 2.** Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng chỉ ra

1) $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x+\sqrt{2}=0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$

2) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$

3) $\frac{4\sin^2 2x+6\sin^4 x-9-3\cos 2x}{\sin x-1}=0$ trên $(-\pi;\pi)$

4) $\sin^2 x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$ trên $\left(\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right)$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau

1) $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$

2) $\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x$

3) $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

4) $\sin 5x+2\cos^2 x=1$

5) $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$

6) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

7) $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$

8) $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$

9) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$

10) $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$.

**Bài 4.** Giải các phương trình sau

1) $\sin 4x+2\sin^3 x=\sin x+\sqrt{3}\cos x\cos 2x$

2) $2-\tan x=\frac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.

3) $\dfrac{\cot x+1}{\cot x-1}=\dfrac{\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 x}$ 4) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\cot^2 x-1$

5) $\sin 2x-\cos 2x-2\sin x+1=0$

6) $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$

7) $(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2)=4\cos^2 x-1$

8) $8\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin 4x=\dfrac{2(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}$

9) $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x+\tan x$

10) $\sqrt{3}(2\sin^2 x+\sin x-2)=(2\sin x-3)\cos x$

11) $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}(\tan x+\cot x)$

12) $(\tan x-1)\sin^2 x+3\cos^2 x-\dfrac{3}{2}\sin 2x=0$

13) $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x-\sin 2x=0$

14) $1+\sin x-\cos 2x=(\sqrt{3}\cos x+2)(2\sin x+1)$

15) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+4=3(\cos x+\sqrt{3}\sin x)$

16) $\dfrac{(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x)+4\cos^2 x+1}{1+\sin x}=8$

17) $5\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2$

18) $\sin 3x+2\cos 2x=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$.

19) $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\sin x=1$

20) $\dfrac{(\sin 2x-\sin x+4)\cos x-2}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$

21) $\cos 2x+2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{2009\pi}{4}\right)=4\cos^2 x\sin x+4\sin^2 x\cos x$

22) $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$

23) $3-4\sin^2 2x=2\cos 2x(1+2\sin x)$

24) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-2\cos x-4\sin x-\cos 2x+2=0$

25) $2\cos 3x.\cos x+\sqrt{3}(1+\sin 2x)=2\sqrt{3}\cos^2(2x+\dfrac{\pi}{4})$

26) $\dfrac{\sin 6x - 2\cos^2 2x + \cos 2x}{2\cos 2x - 1} = 1$

27) $5\cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2}\sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$

28) $\dfrac{\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\sin x - 1} = \cos x$.

**Bài 5.** Giải các phương trình sau

1) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right)$

3) $4(\cos 3x\cos^3 x + \sin 3x\sin^3 x) + \sqrt{3}\sin 6x = 1 + 3(\cos^4 x - \sin^4 x)$

4) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin 4x(\sqrt{3} - 1 - \tan 2x\tan x) = 3$

5) $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$

6) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

7) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$

8) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

9) $\dfrac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

10) $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$

11) $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

12) $2(\sin x + 1)(\sin^2 2x - 3\sin x + 1) = \sin 4x.\cos x$

13) $\dfrac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} - \tan x = \tan x.\tan^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

14) $2\sin 2x + (2\sqrt{3} - 3)\sin x + (2 - 3\sqrt{3})\cos x = 6 - \sqrt{3}$.

**Bài 6.** Cho phương trình $m\sin x + (m - 2)\cos x = m + \sqrt{3}$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa: $|x_1 - x_2| = \dfrac{\pi}{3}$.

**Bài 7.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{4\cos 3x\cos x - 2\cos 4x - 4\cos x + \tan\dfrac{x}{2}\tan x + 2}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0$

2) $\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x} = \dfrac{2}{1 + 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

3) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{\sin 3x+2\cos x}{1+\cos^2 x}-\dfrac{2}{\cos x}=0$

4) $\dfrac{(\cos x+3)(1-\cos x)}{\cos x}=2\sin x.\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+3\tan x$

5) $\dfrac{1+\cot^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}+\dfrac{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}{\cos x}=4(\tan x+\cot x)$

6) $\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin x}+\dfrac{3}{\cos^2 x+\cos x}=\dfrac{4}{\sin 2x}$

7) $\dfrac{(\cos x+\sin x)(2\sin 2x+1)+4\cos 2x}{(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)+2}=\sqrt{3}$

## Hướng dẫn giải

**Bài 1.**

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x-3=0\Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x-2\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

3) Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos 2x+1+\cos x-20\sin x+7=\cos x$

$\Leftrightarrow 4-8\sin^2 x-20\sin x+8=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4) Phương trình tương đương với

$(\cos^2 x-\sin^2 x)(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x\right)=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 8-2\sin^2 2x=13\cos 2x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ 2\cos^2 2x-13\cos 2x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$

là nghiệm của phương trình đã cho.

5) Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\dfrac{3}{\cos x}+3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\cos x}+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+3\cos x+2=0 \Leftrightarrow \cos x=-1$$

$\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

6) Phương trình $\Leftrightarrow 1+\cot^2 x=\sqrt{3}\cot x+1 \Leftrightarrow \cot x(\cot x-\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=0\\ \cot x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

7) Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos x(2\cos^2 x-1)+2=5\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 6\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x+2=0 \Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x-1)(3\cos x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

8) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 3x+\dfrac{\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

9) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x-\sqrt{\frac{3}{10}}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Do $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2=1$ nên tồn tại $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{10}},\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\cos 2x\cos\alpha-\sin 2x\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(2x+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

là nghiệm của phương trình đã cho.

10) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=2\sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{6}-2x+k2\pi \\ 3x=\pi-\frac{\pi}{6}+2x+k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{5} \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 2.**

1) Phương trình

$\Leftrightarrow \cos\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ 7x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.$

- Với $x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \Rightarrow -\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{19}{24}<k<\frac{37}{24}$

Do $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0, k=1 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{84}, x=\frac{29\pi}{84}$

- Với $x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \Rightarrow -\frac{\pi}{6}<-\frac{13\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{24}<k<\frac{55}{24}$

Do $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0, k=1, k=2 \Rightarrow x=-\frac{13\pi}{84}, x=\frac{11\pi}{84}, x=\frac{5\pi}{12}$.

Vậy các nghiệm cần tìm là: $x=\frac{5\pi}{84}, x=\frac{29\pi}{84}, x=-\frac{13\pi}{84}, x=\frac{11\pi}{84}, x=\frac{5\pi}{12}$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. Do $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$.

Vậy $x=\frac{\pi}{3}$ là nghiệm cần tìm.

3) Điều kiện: $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin^2 2x+\frac{3}{2}(1-\cos 2x)^2-9-3\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x+12\cos 2x+7=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$

Mà $x\in(-\pi;\pi) \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ là nghiệm cần tìm .

4) Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right.$

Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{3}$ là nghiệm cần tìm.

**Bài 3.**

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 2 - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + 2(1 - 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = 2 \text{ (VN)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

2) Phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x - 2 + 2\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2\cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \sqrt{2} \text{ (loại)}\\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ là nghiệm của phương trình đã cho.

3) Điều kiện $\cos x \neq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\cos x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 2\cos x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4) Phương trình $\Leftrightarrow \sin 5x = 1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ 5x = \pi - 2x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}\\ x = \dfrac{3\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

5) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$ , $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

6) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x\left[2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$ là nghiệm của phương trình

đã cho.

7) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$ , $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

8) Phương trình đã cho tương đương với:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\cos x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) + 2(\sin x - \cos x)$$
$$- \sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[2 + 4\sin x\cos x - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

- $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $1 + \sin 2x - \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi,\ x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

9) Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x(1+\sin 2x+\cos 2x)=2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x=2\sqrt{2}\cos x$

(do $\sin x\neq 0$) $\Leftrightarrow \cos x(\sin x+\cos x-\sqrt{2})=0$

Từ đó ta có: $\cos x=0$ hoặc $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

giải các phương trình này ta tìm được: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là:

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

10) Điều kiện: $\begin{cases}\tan x\neq -\sqrt{3}\\ \cos x\neq 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow$ sin2x + 2cosx – sinx – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ 2sinxcosx + 2cosx – (sinx + 1) = 0

$\Leftrightarrow$ 2cosx (sinx + 1) – (sinx + 1)= 0 $\Leftrightarrow$ (2cosx – 1)(sinx + 1) = 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ so điều kiện ta có nghiệm của pt:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

**Bài 4.**

1) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 4x+3\sin x-\sin 3x=2\sin x+\sqrt{3}\left(\cos 3x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x=\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 4x=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x = 2\cos 2x.\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

2) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ .

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos x - \sin x = 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sin x\cos x - 1 - \sin x = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos x(1 + \sin x) - (1 + \sin x) = 0$
$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(2\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện, ta có $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

3) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} \sin x \neq 0 \\ \cot x \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{2\sin^2 x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x = (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ 1 - \cos 2x = \cos 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

4) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow (2\sin^2 x + \cos 2x)\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x + \cos 2x)\sin x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

5) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin x + 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ ($k \in \mathbb{Z}$ ) là nghiệm của phương trình đã cho.

6) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 - 2\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) - \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

7) Phương trình $\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\cos x + 1 = 0 & (1) \\ \sin 2x + 2\sin x - 2 = 2\cos x - 1 & (2) \end{array}\right.$$

+) (1) $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$.

+) (2) $\Leftrightarrow \sin 2x + 2(\sin x - \cos x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(2 - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$ (do $2 - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 2 - \sqrt{2} > 0$ )

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

8) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left[1 + \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2 + \sin 4x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin 2x)^2 + \sin 4x = 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x)^2 + \cos 2x(\sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x)(1 - \sin 2x - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

9) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin^2 x + \tan x$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x = \tan x(\sin 2x + 1)$

$\Leftrightarrow (\sin 2x + 1)(\tan x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi & (\text{tm}) \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi & (\text{tm}) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.

10) Điều kiện: $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 2x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin 2x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ ; $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

11) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1\Leftrightarrow \sin 2x=0$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

12) Điều kiện $\cos x \neq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}.\sin^2 x+3\cos x(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(\sin^2 x-3\cos^2 x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ \sin^2 x-3\cos^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

13) Phương trình đã cho tương đương:

$3\sin x-2\sin x\cos x-\cos x+2-(1-2\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1-\cos x(1+2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\sin x+1)-\cos x(1+2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x-\cos x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=-\dfrac{1}{2} & (1)\\ \sin x-\cos x+1=0 & (2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Các họ nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; x = k2\pi;\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

14) Phương trình

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sin x = (\sqrt{3}\cos x + 2)(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = (\sqrt{3}\cos x + 2)(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) - (\sqrt{3}\cos x + 2)(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2) = 0$

+) $\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

+) $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\quad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi,\quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

15) Đặt $t = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

$\Rightarrow t^2 = \cos^2 x + 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3\frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3}\sin 2x$

$= 2 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = t^2 - 2$

Khi đó, (1) trở thành: $t^2 - 2 + 4 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

+) $t = 1$ thì: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.$

+) $t = 2$ thì: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

16) Điều kiện: $\sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Phương trình

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x) + 4(1 - \sin^2 x) + 1 = 8(1 + \sin x)$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x) - (4\sin^2 x + 8\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x) - (2\sin x + 1)(2\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:

$$x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\ x=k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ với } k\in\mathbb{Z}.$$

17) Điều kiện: $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow 5\cos x-3(1-\cos x)\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=2$

$$\Leftrightarrow 5\cos x-\frac{3\cos^2 x}{1+\cos x}=2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-2\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

- $\cos x=-2$ vô nghiệm
- $\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l2\pi, l\in\mathbb{Z}$, thỏa mãn điều kiện.

18) Phương trình

$$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+2(1-2\sin^2 x)=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\sin x)+4\sin^3 x+4\sin^2 x+\sin x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\sin x)+(\sin x+1)(4\sin^2 x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\cos x+4\sin^2 x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ 4\cos^2 x-\cos x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=1\\ \cos x=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\\ x=\pm\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

19) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+4\sin x-1=0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+4\sin x=0$$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3}\cos x - \sin x + 2)\sin x = 0$

Khi: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Khi: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

KL: nghiệm PT là $x = k\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

20) Ta có

$$\frac{(\sin 2x - \sin x + 4)\cos x - 2}{2\sin x + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\sin 2x - \sin x + 4)\cos x - 2 = 0\\ 2\sin x + \sqrt{3} \neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2\cos x - 1)(\sin x\cos x + 2) = 0\\ 2\sin x + \sqrt{3} \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x = 1\\ 2\sin x \neq -\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

21) Ta có

$$\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{2009\pi}{4}\right) = 4\cos^2 x\sin x + 4\sin^2 x\cos x$$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2(\sin x + \cos x) = 4\sin x.\cos x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 4\cos x.\sin x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x + \sin x = 0 & (1)\\ \cos x - \sin x - 4\sin x.\cos x + 2 = 0 & (2)\end{array}\right.$$

+ Giải (1): $(1) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

+ Giải (2): Đặt $\cos x - \sin x = t, |t| \leq \sqrt{2}$ ta có phương trình:

$$2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 0\\ t = -1/2\end{array}\right.$$

Với $t = 0$ ta có: $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Với $t = -1/2$ ta có: $\cos(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \arccos(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}) - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = -\arccos(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}) - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right.$

KL: Vậy phương trình có 4 họ nghiệm: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$,

$x = \arccos(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}) - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = -\arccos(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}) - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.

22) Điều kiện: $\cos x \neq 0\,(*)$

Ta có

$$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x \Leftrightarrow 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2 x-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sin 2x.\cos x-2\sin^2 x.\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x-\sin 2x(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\cos x \Rightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+l2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+l\pi\end{array}\right. \rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

23) Biến đổi phương trình về dạng $2\sin 3x(2\sin x+1)-(2\sin x+1)=0$

Do đó nghiệm của phương trình là

$$x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}; x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$$

24) Ta có

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-4\sin x-2\cos x-\cos 2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos x+\sin x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1 \\ \sin x+\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi\end{array}\right.$$

25) Phương trình

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin 2x)=\sqrt{3}\left(1+\cos(4x+\frac{\pi}{2})\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x+\frac{\pi}{6})+\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(3x+\frac{\pi}{6}).\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}$.

26) Điều kiện $\cos 2x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x\neq-\frac{\pi}{6}+l\pi\end{array}\right.$ $(k,l\in\mathbb{Z})$

PT $\Leftrightarrow \cos 3x(\sin 3x-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \frac{k_1\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2}\\ x = \frac{\pi}{4} + k_3\pi\end{array}\right. (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$$

Đối chiếu với điều kiện ta nhận nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4} + k_3\pi \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}).$$

27) Ta có

$$5\cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x + \sin x - 3 = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 5\cos x + 2) + 2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \sin x + \cos x = 2 (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) .$$

28) Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x - 1\right) = \sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x + 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x + 1) - \sqrt{3}(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \ x = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi, x = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi .$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 5.**

1) Phương trình tương đương với

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Phương trình $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right)$

Ta có: $\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{10} - \dfrac{3x}{2}\right) = \sin 3\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right)$

Đặt $t = \dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}$, ta có $\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right) = \sin 3t$

Phương trình đã cho trở thành:

$2\sin t = \sin 3t \Leftrightarrow \sin t - 4\sin^3 t = 0$

$\Leftrightarrow \sin t(2\cos 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t = 0 \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{3\pi}{5} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{15} - k2\pi, x = \dfrac{14\pi}{15} - k2\pi\end{array}\right.$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3) Ta có: $4(\cos 3x\cos^3 x + \sin 3x\sin^3 x) = 3\cos 2x + \cos 6x$

và $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ nên

Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos 2x + \cos 6x + \sqrt{3}\sin 6x = 1 + 3\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 6x = 1 - \cos 6x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x = 2\sin^2 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x(\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x) = 0$.

Suy ra nghiệm cần tìm là $x = k\dfrac{\pi}{3}; x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3}$.

4) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right.$.

Ta có: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) = 4 - 2\sin^2 2x = 3 + \cos 4x$

$$1 + \tan 2x\tan x = 1 + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}$$

$$= \frac{\cos(2x - x)}{\cos 2x\cos x} = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3 + \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x - \dfrac{\sin 4x}{\cos 2x} = 3$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = 2\sin 2x \Leftrightarrow \sin(4x + \frac{\pi}{6}) = \sin 2x$.

Từ đó ta tìm được nghiệm thỏa mãn phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}.$$

5) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình tương đương với $\quad 1 + 3\tan x = \dfrac{4\tan x}{1 + \tan^2 x}$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. (thỏa mãn điều kiện)

6) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin 2x.\sin x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$ (do $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$) $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

7) Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\left|\sin(4x - \frac{\pi}{2}) + \sin 2x\right|$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos 4x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(2\sin^2 2x + \sin 2x - 1)$$

Nên pt $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(2\sin^2 2x + \sin 2x - 1) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

8) Phương trình $\Leftrightarrow (1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

9) Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1) = 2(\sin x+\cos x)(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)^2(1+\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right..$$

10) Điều kiện: $x \neq k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x$.

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 3\sqrt{2}\sin^2 x.\cos x + 2\sqrt{2}\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0\\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right..$$

11) Phương trình

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ 2\cos x + \sin x - 3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right..$$

(Do $2\cos x + \sin x \le \sqrt{5} < 3$).

12) Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sin x + 1)\left(\frac{1-\cos 4x}{2} - 3\sin x + 1\right) = \sin 4x.\cos x$$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(3 - 6\sin x - \cos 4x) = \sin 4x.\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(3 - 6\sin x) - \sin x.\cos 4x - \cos 4x = \sin 4x.\cos x$

$\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x = \sin 5x + \cos 4x$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 3.2.\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2.\cos\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[3\cos(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{9x}{2}+\frac{3\pi}{4})\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}).\cos^3(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=0\\ \cos(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4})=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right..$$

13) Điều kiện: $\begin{cases}\sin 2x+2\cos x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq -1\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{4\cos 2x}{\sin 2x+2\cos x}=\tan x\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos 2x}{\sin 2x+2\cos x}=\frac{\tan x}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\tan x}{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)} \Leftrightarrow \cos 2x=\sin x \quad (*)$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=-1$ (loại), $\sin x=\frac{1}{2}$ (nhận)

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

14) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x+(2\sqrt{3}-3)\sin x+(2-3\sqrt{3})\cos x=6-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x+2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)-3(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=6-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=6-\sqrt{3}$

Đặt $x=t+\frac{7\pi}{6}$

Ta có: $2\sin\left(2t+\frac{7}{3}\pi\right)+4\sin\left(t+\frac{8}{6}\pi\right)-6\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=6-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t-2\sin t-2\sqrt{3}\cos t+6\cos t-6+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow \sin 2t-2\sin t+6(\cos t-1)+\sqrt{3}(\cos 2t-2\cos t+1)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin t(\cos t-1)+6(\cos t-1)+\sqrt{3}(2\cos^2 t-2\cos t)=0$

$\Leftrightarrow (\cos t-1)(2\sin t+2\sqrt{3}\cos t+6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ \sin t+\sqrt{3}\cos t=-3\ \text{(VN)}\end{array}\right. \Leftrightarrow t=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Suy ra nghiệm của phương trình: $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

**Bài 6.**

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + (m-2)^2 \geq (m+\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow m^2 - 2(2+\sqrt{3})m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; 2+\sqrt{3}-\sqrt{6+4\sqrt{3}}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}+\sqrt{6+4\sqrt{3}}; +\infty\right) \ (*).$$

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{m^2+(m-2)^2} = \sqrt{2m^2-4m+4}$ ta được:

$$\frac{m}{\sqrt{2m^2-4m+4}}\sin x + \frac{m-2}{\sqrt{2m^2-4m+4}}\cos x = \frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{2m^2-4m+4}}$$

Do $\left(\frac{m}{\sqrt{2m^2-4m+4}}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{\sqrt{2m^2-4m+4}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại $\alpha$ sao cho

$$\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{2m^2-4m+4}}, \cos\alpha = \frac{m-2}{\sqrt{2m^2-4m+4}}$$

Khi đó, ta có:

$$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{2m^2-4m+4}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{2m^2-4m+4}} = \cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha+\beta+k2\pi \\ x = \alpha-\beta+k2\pi \end{array}\right. \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử hai nghiệm $x_1, x_2$ cùng thuộc một họ nghiệm chẳng hạn cùng thuộc họ $x = \alpha+\beta+k2\pi$, khi đó:

$$x_1 = \alpha+\beta+k_1 2\pi, x_2 = \alpha+\beta+k_2 2\pi \Rightarrow |x_1-x_2| = |k_1-k_2|2\pi$$

Vì $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ nên $|k_1-k_2| \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x_1-x_2| \neq \frac{\pi}{3}$

Do đó nếu $|x_1-x_2| = \frac{\pi}{3}$ thì $x_1, x_2$ cùng thuộc một họ nghiệm.

Do đó: $x_1 = \alpha+\beta+k_1 2\pi,\ x_2 = \alpha-\beta+k_2 2\pi \Rightarrow x_1 - x_2 = 2\beta + (k_1-k_2)2\pi$

Suy ra $\frac{1}{2} = \cos|x_1-x_2| = \cos(x_1-x_2) = \cos[2\beta+(k_1-k_2)2\pi] = \cos 2\beta$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{(m+\sqrt{3})^2}{2m^2-4m+4} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(m^2+2\sqrt{3}m+3) = 6m^2-12m+12 \Leftrightarrow m^2 - (6+4\sqrt{3})m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0, m = 6+4\sqrt{3}.$$

Kết hợp với (*) ta có $m = 0, m = 6+4\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.

**Bài 7.**

1) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Giải ra và kết hợp với điều kiện ta có $x = k2\pi$ là nghiệm của phương trình.

2) Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ 1 + 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{\sin 2x.\cos 3x}{\cos 2x \sin 3x} = \frac{2}{1 + 2\cos 2x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos 2x \sin 3x} = \frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x}$$

Ta có phân tích: $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(1 + 2\cos 2x)$

Thay vào phương trình ta suy ra: $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. So với điều kiện ta thấy phương trình vô nghiệm.

3) Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$

Ta có: $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1) + 2\cos x}{1 + \cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{1 + \cos^2 x}\right) + \left(\frac{2\cos x}{1 + \cos^2 x} - \frac{2}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x + 4\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin x(1 + \cos^2 x)} - \frac{2}{\cos x(1 + \cos^2 x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^4 x - \sin x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin x.\cos x) + \sin^2 x.\cos^2 x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x) + \sin^2 x\cos^2 x(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x)\left[1 + \sin^2 x.\cos x(\cos x + \sin x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 1 + \sin^2 x.\cos x(\cos x + \sin x) = 0 \quad (1)\end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x + \sin x\cos x(\sin^2 x + \sin x\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x = \sin x\cos x(2 - \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow (\sin x\cos x + 1)^2 = \sin x\cos x(1 + \cos^2 x)$

Vì $(\sin x\cos x + 1)^2 \geq 0$ và $(1 + \cos^2 x) > 0 \Rightarrow \sin x\cos x \geq 0$

Suy ra $(\sin x\cos x + 1)^2 \geq 4\sin x\cos x$

Mặt khác $\sin x\cos x(1 + \cos^2 x) \leq 2\sin x\cos x$ (do $\cos^2 x \leq 1$)

Nên (1) vô nghiệm.

4) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình được viết lại như sau:

$$\frac{(\cos x + 3)(1 - \cos x)}{\cos x} = \sin x(1 - \sin x) + \frac{3\sin x}{\cos x}$$

$$(\cos x + 3).2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x(1 - \sin x) + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}(\cos x + 3) - \cos\frac{x}{2}\cos x(1 - \sin x) - 3\cos\frac{x}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}(\cos x + 3) - \cos\frac{x}{2}(\cos x + 3) + \cos x\sin x\cos\frac{x}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})(\cos x + 3 - (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})\sin x\cos\frac{x}{2})$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})[\cos x + 3 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x(1 - \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})\left[\cos x + 3 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

(Vì $\cos x + 3 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x > 0$).

5) ĐK: $\left\{\begin{array}{l}\sin 2x \neq 0 \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0\end{array}\right.$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \dfrac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2.$$

$\Leftrightarrow 1+\cos x+\sin x=2(1+\sin x\cos x+\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x+(\sin x+\cos x)^2=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0$ hoặc $\sin x+\cos x=-1$.

- $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$
- $\sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện ta được kết quả là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

6) ĐK: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \sin x\neq -1\\ \cos x\neq -1\end{cases}$.

Với điều kiện này phương trình đã cho được biến đổi thành:

$$\frac{1}{\sin x(\sin x+1)}+\frac{3}{\cos x(\cos x+1)}=\frac{2}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(\cos x+1)+3\sin x(\sin x+1)}{\sin x\cos x(\sin x+1)(\cos x+1)}=\frac{2}{\sin x\cos x}$$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)+3\sin x(\sin x+1)=2(\sin x+1)(\cos x+1)$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+3\sin^2 x+\sin x-\cos x=\sin 2x+2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin^2 x+\sin x-\cos x=\sin 2x+2$

$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=\sin 2x+1-2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x-\cos x=\sin 2x+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\pi-x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.$$

7) Điều kiện: $(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)+2\neq 0$.

Ta có, phương trình ban đầu tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2\cos x\sin 2x + 2\sin x\sin 2x + \sin x + \cos x + 4\cos 2x$$
$$= 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x - 2\sqrt{3}\sin 2x\sin x + \sqrt{3}(\cos x - \sin x) + 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (2\sin 2x + 1)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) + (2\sin 2x + 1)(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 4\cos 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin 2x + 1)(2\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2\sin(x + \frac{\pi}{6})) + 4(\cos 2x - \cos\frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2\sin 2x + 1)2\sin(x - \frac{\pi}{12})\cos\frac{\pi}{4} - 4.2\sin(x + \frac{\pi}{12})\sin(x - \frac{\pi}{12}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{12})\left[(2\sin 2x + 1)\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin(x + \frac{\pi}{12})\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - \frac{\pi}{12}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ (2\sin 2x + 1)\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 0 \end{array}\right.$$

Ta có: $(2\sin 2x + 1)\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}2(\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6}) - 2\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{12})\cos(x - \frac{\pi}{12}) - 2\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{12})(2\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{12}) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

# CHƯƠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## Chuyên đề 1. Phương trình - Bất phương trình vô tỉ

### I. Tóm tắt lí thuyết

**1. Phương trình, bất phương trình cơ bản**

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$

Khi thực hiện các phép biến đổi đối với căn bậc $2n$ ta cần chú ý đến điều kiện để các căn thức tồn tại.

**2. Các phương pháp giải phương trình, bất phương trình vô tỉ**

**a. Phương pháp sử dụng lượng liên hợp**

- Giả sử ta cần giải phương trình $f(x) = 0$ và đã biết trước được một nghiệm $x = x_0$.

Khi đó ta tìm cách phân tích đưa phương trình $f(x) = 0$ về dạng $(x - x_0)g(x) = 0$

- Để phân tích được về thừa số $x - x_0$ ta chuyển các biểu thức vô tỉ về các đa thức. Chẳng hạn trong phương trình có hạng tử $\sqrt[n]{P(x)}$ thì ta ghép với $\sqrt[n]{P(x_0)}$ ta được $\sqrt[n]{P(x)} - \sqrt[n]{P(x_0)} = \dfrac{P(x) - P(x_0)}{(\sqrt[n]{P(x)})^{n-1} + \ldots + (\sqrt[n]{P(x_0)})^{n-1}}$.

- Để thuận lợi trong việc phân tích ta cần nắm vững các hằng đẳng thức

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

.....................................

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

**b) Phương pháp đặt ẩn phụ**

**Dạng 1:** $F(\sqrt[n]{f(x)}, f(x)) = 0$. Dạng thường gặp: $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$

Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}$, ta có phương trình $G(t)=0$.

**Dạng 2:** $F(a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)};\sqrt{f(x)g(x)})=0$

Với dạng này ta thường đặt $t=a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}$

**Dạng 3:** $F(\sqrt[n]{f(x)},\ \sqrt[n]{g(x)})=0$, trong đó $F(a,b)$ là một biểu thức đẳng cấp bậc k. Với dạng này ta xét hai trường hợp:

**TH1**: $g(x)=0$ thay vào phương trình ta kiểm tra,

**TH2:** $g(x)\neq 0$ chia hai vế phương trình cho $\sqrt[n]{g^k(x)}$ và đặt $t=\sqrt[n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ ta được phương trình $G(t)=0$ là phương trình đa thức bậc k.

Ta thường gặp dạng: $a.f(x)+b.g(x)+c.\sqrt{f(x)g(x)}=0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$, ta có phương trình: $at^2+ct+b=0$.

**Dạng 4**: $a.f(x)+g(x)\sqrt{f(x)}+h(x)=0$. Với phương trình dạng này ta có thể đặt $t=\sqrt{f(x)}$, khi đó ta được phương trình theo ẩn t: $at^2+g(x)t+h(x)=0$, ta giải phương trình này theo t, xem x là tham số

**c) Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình**

**Dạng 1.** Phương trình $F(\sqrt[n]{\alpha-cf(x)},\sqrt[m]{\beta+df(x)})=0$

Đặt $u=\sqrt[n]{\alpha-f(x)},\ v=\sqrt[m]{\beta+f(x)}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}F(u,v)=0\\ du^n+cv^m=d\alpha+c\beta\end{cases}$$

**Dạng 2.** Phương trình $(f(x))^n+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$ (1).

Đặt $t=f(x);y=\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta có hệ: $\begin{cases}t^n+b=ay\\ y^n+b=at\end{cases}$.

**d) Phương pháp hàm số**

Trong phần này ta vận dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, bất phương trình. Với phương pháp này thường cho ta lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ. Dĩ nhiên việc nhận diện bài toán và sử dụng thành thạo phương pháp này thì không phải là vấn đề đơn giản. Kịch bản mà chúng ta thường gặp khi sử dụng phương pháp hàm số như sau:

**1.1.** Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có không quá k nghiệm và chỉ ra k nghiệm của phương trình: Với kịch bản này, ta thường đi khảo sát hàm số $y=f(x)$, dựa vào bảng biến thiên ta có được số nghiệm của phương trình. Ở đây ta có trường hợp đặc biệt sau:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn *đơn điệu và liên tục* trên D thì phương trình: $f(x) = k$ nếu có nghiệm thì có nghiệm duy nhất trên D và

+) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in D$.

+) $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$ nếu hàm f đồng biến (hoặc $x < y$ nếu hàm f nghịch biến)

**1.2.** Biến đổi phương trình về dạng $f(u(x)) = f(v(x))$. Trong đó f là hàm luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên D.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow u(x) = v(x)$

Với phương pháp này quan trọng nhất là chúng ta tìm ra được hàm đặc trưng f.

**e. Phương pháp đánh giá.**

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ xác định trên D.

* Nếu phương trình $\Leftrightarrow u^2(x) + v^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 0 \\ v(x) = 0 \end{cases}$

* Nếu $\begin{cases} f(x) \ge m(x) \\ g(x) \le m(x) \end{cases} \forall x \in D$ thì PT: $f(x) = g(x)$ với $x \in D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m(x) \\ g(x) = m(x) \end{cases}$.

Trong cách đánh giá này ta thường dùng các hằng đẳng thức và các bất đẳng thức quen thuộc (như BĐT Cauchy, BĐT Bunhiacovski, BĐT chứa trị tuyệt đối…) để đánh giá hai vế. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

## II. Các ví dụ minh họa

### 1. Các ví dụ cơ bản

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 2x - 1$ 2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = \sqrt{8-x}$

3) $x^2 + \sqrt{2x^2 - x + 1} + 2 = x(3 + \sqrt{2x^2 - x + 1})$

4) $x^2 - \sqrt{x+2} = 2$.

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ x^2 + 3x + 1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Vậy $T = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

2) Điều kiện: $3 \le x \le 8$.

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}\Leftrightarrow x+2=x-3+2\sqrt{(x-3)(8-x)}+8-x$$

$$\Leftrightarrow x-3=2\sqrt{-x^2+11x-24}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le x\le 8\\(x-3)^2=4(-x^2+11x-24)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\le x\le 8\\x^2-10x+21=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3,x=7.$$

Vậy $T=\{3,7\}$.

3) Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-3x+2=(x-1)\sqrt{2x^2-x+1}\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=(x-1)\sqrt{2x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x-2=\sqrt{2x^2-x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\ge 2\\x^2+3x-3=0\end{cases}(vn)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy $T=\{1\}$.

4) Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-(x+2)+x-\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow(x+\sqrt{x+2})(x-\sqrt{x+2})+x-\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{x+2}\\-x-1=\sqrt{x+2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\x^2-x-2=0\end{cases}\\\begin{cases}x\le -1\\x^2+x-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy $T=\left\{2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**Chú ý:** Để giải phương trình $x^2-\sqrt{x+2}=2$ ta có các cách sau:

**Cách 2:** Phương trình tương đương với

$$x^2-2=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 2\\x^4-4x^2+4=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 2\\x^4-4x^2-x+2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2\ge 2\\(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2,x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

**Cách 3:** Phương trình tương đương với

$$x^2+x+\frac{1}{4}=x+2+\sqrt{x+2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=\sqrt{x+2}+\frac{1}{2} \\ x+\frac{1}{2}=-\sqrt{x+2}-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x+2} \\ x+1=-\sqrt{x+2} \end{array}\right..$$

Giải các phương trình này ta được các nghiệm như trên.

Cách giải trên ta có thể áp dụng cho một số bài toán có dạng

$$ax^2+bx+c=\alpha\sqrt{mx+n}.$$

**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

1) $2x^2-10x+2+3\sqrt{5x-x^2}=0$ 2) $x^2-3x-3=\dfrac{3(\sqrt[3]{x^3-4x^2+4}-1)}{1-x}$

3) $\sqrt{x^2-3x+1}+\dfrac{10}{x^2-3x+5}=3$ 4) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2-5x)+2+3\sqrt{5x-x^2}=0$$

Đặt $t=\sqrt{5x-x^2}, t\geq 0$ ta có phương trình:

$$-2t^2+2+3t=0\Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{1}{2}\ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Với $t=2$, ta có phương trình

$$\sqrt{5x-x^2}=2\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1, x=4.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=4$.

2) Điều kiện: $x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2-3x-3)(x-1)+3\sqrt[3]{x^3-4x^2+4}-3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3\sqrt[3]{x^3-4x^2+4}=0$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x^3-4x^2+4}$, ta có được phương trình

$$t^3-4+3t=0\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+4)=0\Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1$, ta có:

$$\sqrt[3]{x^3-4x^2+4}=1\Leftrightarrow x^3-4x^2+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

3) Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+1},\ t\geq 0$ ta có phương trình

$$t+\frac{10}{t^2+4}=3\Leftrightarrow t^3-3t^2+4t-2=0$$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$, ta có:

$$\sqrt{x^2-3x+1}=1\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x=0, x=3.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=0, x=3$.

4) Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\ge 0$, suy ra $x=t^2-1$. Thay vào phương trình ta được

$$(t^2-1)^2+t^2-1+12t=36\Leftrightarrow t^4-t^2+12t-36=0$$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+3t+18)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t^3+2t^2+3t+18=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do $t\ge 0$ nên (*) vô nghiệm.

Với $t=2$, ta có $x=t^2-1=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Ví dụ 3.** Giải các bất phương trình sau

1) $\sqrt{x^2-5x+2}-2x\le 8$ 2) $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

3) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}\le 2\sqrt{x^2}$ 4) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1\le 0$.

***Lời giải***

1) Bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2-5x+2}\le 2x+8\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+2\ge 0 \\ 2x+8\ge 0 \\ x^2-5x+2\le (2x+8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4\le x\le \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \\ x\ge \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \\ 3x^2+37x+62\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4\le x\le \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \\ x\ge \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \\ x\le -\dfrac{31}{3} \vee x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x\le \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \\ x\ge \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy $T=\left[-2;\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

2) Điều kiện: $x\ge 4$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)}+x-3>7-x\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)}>10-2x$

**TH1:** $\begin{cases} x \ge 4 \text{ (đk)} \\ 10 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$

**TH2:** $\begin{cases} 10 - 2x \ge 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x \le 5.$

Lấy hợp hai trường hợp ta có nghiệm bất phương trình là: $x > 10 - \sqrt{34}$.

3) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$ (*).

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x^2 + x + 2\sqrt{x^2(x-1)(x+2)} \le 4x^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x^2 + x - 2)} \le x(2x - 1) \Leftrightarrow 4x^2(x^2 + x - 2) \le x^2(2x - 1)^2$ (do đk (*)).

$\Leftrightarrow x^2(8x - 9) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \le \frac{9}{8} \end{array}\right.$.

Kết hợp với (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \le -2 \\ 1 \le x \le \frac{9}{8} \end{array}\right.$.

**Chú ý:**

1) Ta có thể giải bất phương trình trên bằng cách xét ba trường hợp $x = 0$, $x \le -2, x \ge 1$ như sau:

- $x = 0$ bất phương trình thỏa mãn
- $x \le -2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-2} \le 2\sqrt{-x} \Leftrightarrow -2x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+2)} \le -4x$

$\Leftrightarrow -2x + 1 \ge 2\sqrt{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ 4x^2 - 4x + 1 \ge 4x^2 + 4x - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x \le \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \le -2.$

- $x \ge 1$, bất phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \le 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+2)} \le 4x$

$\Leftrightarrow 2x - 1 \ge 2\sqrt{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 4x^2 - 4x + 1 \ge 4x^2 + 4x - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le \frac{9}{8}.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \le -2 \\ 1 \le x \le \dfrac{9}{8} \end{array}\right.$.

2) Dạng tổng quát bất phương trình trên như sau

$$\alpha\sqrt{(x-a)(x-b)} + \beta\sqrt{(x-a)(x-c)} = \gamma\sqrt{(x-a)(x-d)}.$$

4) Điều kiện $x \ge \dfrac{1}{2}$

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} \le -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \ge 0 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 \le (x^2 - 3x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4x + 2 \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \le 2 - \sqrt{2} \ \vee \ x \ge 2 + \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{1}{2} \le x \le 2 - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy $T = \left[\dfrac{1}{2}; 2 - \sqrt{2}\right] \cup \{1\}$.

**Chú ý:** Ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 - (2x-1) + \sqrt{2x-1} - x \le 0$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x-1})(x + \sqrt{2x-1}) + \sqrt{2x-1} - x \le 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x-1})(x + \sqrt{2x-1} - 1) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x - 1 + \sqrt{2x-1})}{x + \sqrt{2x-1}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x - 1 + \sqrt{2x-1} \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{2x-1} \le 1 - x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x \le 1 \\ x^2 - 4x + 2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \le 2 - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có: $T = \left[1; 2 - \sqrt{2}\right]$.

**Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau

1) $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

2) $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x \ge 2$.

Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của phương trình nên ta biến đổi:

$$\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2} = \frac{(\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2})(\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2} = \frac{-8(x-3)}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}}.$$

Suy ra phương trình $\Leftrightarrow (x-3)\left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}}\right) = 0$ đến đây ta chỉ cần giải phương trình:

$$2 - \frac{8}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$.

2) Điều kiện: $x \ge \frac{5}{3}$.

Phương trình cho $\Leftrightarrow \sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{x-3}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện).

Biểu thức trong ngoặc luôn dương với $x > \frac{5}{3}$.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Ví dụ 5.** Giải các bất phương trình sau

1) $x^2 - 2x - 22 - \sqrt{-x^2 + 2x + 24} \geq 0$. 2) $\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} \leq \sqrt{-x^2 + 9x + 6}$.

***Lời giải***

1) Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 24}$, $(t \geq 0)$

$\Rightarrow -x^2 + 2x + 24 = t^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 22 = 2 - t^2$

Bất phương trình trở thành: $2 - t^2 - t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 24} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 24 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 23 \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leq x \leq 1 - 2\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{6} \leq x \leq 6 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

2) Điều kiện: $0 \leq x \leq 9$

Bất phương trình

$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{9x - x^2} \leq -x^2 + 9x + 6 \Leftrightarrow 9x - x^2 - 2\sqrt{9x - x^2} - 3 \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{9x - x^2}$, $t \geq 0$, ta có bất phương trình:

$$t^2 - 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{9x - x^2} \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là:

$$\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

**Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} = 3 + \sqrt{(3 + x)(6 - x)}$

2) $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$ 3) $\sqrt[3]{24 + x} + \sqrt{12 - x} = 6$.

***Lời giải***

1. $3 + x \geq 0;\ 6 - x \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 6$

Đặt $a = \sqrt{x + 3}$, $b = \sqrt{6 - x}$ ta có được hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 3 + ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$.

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ này ta được $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$.

* Với $a = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

* Với $a = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 0$; $x = -3$.

2) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $\sqrt{4 - x^2} = y$, với $0 \leq y \leq 2$.

Khi đó ta được hệ $\begin{cases} x+y=2+3xy \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2+3P \\ S^2-2P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2+3P \\ 9P^2+10P=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S=2 \end{cases} \vee \begin{cases} P=-\dfrac{10}{9} \\ S=-\dfrac{4}{3} \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} P=0 \\ S=2 \end{cases}$, suy ra $x, y$ là nghiệm của phương trình

  $t^2-2t=0 \Leftrightarrow t=0, t=2$.

- Với $\begin{cases} P=-\dfrac{10}{9} \\ S=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$, suy ra $x, y$ là nghiệm của phương trình

  $t^2+\dfrac{4}{3}t-\dfrac{10}{9}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{14}}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:

$x=0$; $x=2$ và $x=\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}$.

3. Điều kiện: $x \le 12$.

Đặt $u=\sqrt[3]{24+x}$; $v=\sqrt{12-x} \Rightarrow u \le \sqrt[3]{36}$, $v \ge 0$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u(u^2+u-12)=0 \ (*) \end{cases}$

Phương trình (*) có ba nghiệm: $u=0; u=-4; u=3$ thỏa mãn $u \le \sqrt[3]{36}$.

Từ đây ta tìm được: $x=-24; x=-88; x=3$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-24; x=-88; x=3$.

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau

1) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

2) $x(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+17})^2=16$

3) $2x-5+5\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2}=4\sqrt{x^2+x-2}$

4) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x}+9=8x$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $1 \le x \le 7$

Phương trình tương đương với

$x-1-\sqrt{(x-1)(7-x)}+2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})+2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=\sqrt{7-x}\\ \sqrt{x-1}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=5\end{array}\right..$$

Vậy $T=\{4;5\}$.

2) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Nhân hai vế của phương trình cho $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+17})^2$ ta được:

$$16x=(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+17})^2 \Leftrightarrow 16x=4x+18+2\sqrt{(2x+1)(2x+17)}$$

$$6x-9=\sqrt{4x^2+36x+17} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq \frac{3}{2}\\ (6x-9)^2=4x^2+36x+17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq \frac{3}{2}\\ 32x^2-144x+64=0\end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy $T=\{4\}$.

3) Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x-1)+5\sqrt{x-1}-3+2\sqrt{x+2}(1-2\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+3)-2\sqrt{x+2}(2\sqrt{x-1}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2-2\sqrt{x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}\\ \sqrt{x-1}+3=2\sqrt{x+2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{4}\\ x=2\sqrt{x-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{4}\\ x=2\end{array}\right..$$

Vậy $T=\left\{2;\frac{5}{4}\right\}$.

4) Điều kiện: $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{5}$.

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x}=8x-9 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x}=(3x-2)-(7-5x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x}=(\sqrt{3x-2}+\sqrt{7-5x})(\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-5x}=0\\ \sqrt{3x-2}+\sqrt{7-5x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{9}{8}\\ \sqrt{(3x-2)(7-5x)}=x-2 \ (*)\end{array}\right..$$

Do $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{5}$ nên $x-2<0$ dẫn tới (*) vô nghiệm.

Vậy $T=\left\{\frac{9}{8}\right\}$.

**Ví dụ 8.** Giải các bất phương trình sau

1) $(x-2)\sqrt{x^2+1} \geq x^2-4$

2) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$

3) $\dfrac{\sqrt{x^2-5x-2}-1}{x-1} \leq \dfrac{1}{5}$

4) $14\sqrt{x+5} \geq 3x+23+7\sqrt{x-3}$.

***Lời giải***

1) Ta xét các trường hợp sau

• $x=2$ thỏa bất phương trình

• $x>2$, bất phương trình tương đương với

$\sqrt{x^2+1} \geq x+2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow 4x+3 \leq 0$ vô nghiệm do $x>2$

• $x<2$, bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2+1} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 2 \\ x^2+1 \leq x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x < 2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $T=\left[-\frac{3}{4};2\right]$.

2) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-2x+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Ta có: $1-\sqrt{2(x^2-x+1)}=1-\sqrt{2\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} \leq 1-\sqrt{\frac{3}{2}}<0$

Nên bất phương trình tương đương với

$$x-\sqrt{x} \leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1-x \geq \sqrt{2(x^2-x+1)}$$

$\Leftrightarrow 1-x \geq \sqrt{2(x^2-x+1)}-\sqrt{x}$ (*)

Do $\sqrt{2(x^2-x+1)}-\sqrt{x}=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{2(x^2-x+1)}+\sqrt{x}}>0$

Nên (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2-2x+1 \geq 2x^2-x+2-2\sqrt{2x(x^2-x+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 2\sqrt{2x(x^2-x+1)} \geq x^2+x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 8x(x^2-x+1) \geq (x^2+x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^4-6x^3+11x^2-6x+1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ (x^2-3x+1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \\ x \ge \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$

Ta xét các trương hợp sau:

• $x \le \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$, bất phương trình tuong đương với

$$5\sqrt{x^2-5x-2} - 5 \ge x - 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2-5x-2} \ge x+4 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ \left\{\begin{array}{l} -4 < x \le \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \\ 24x^2 - 133x - 66 \ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ \left\{\begin{array}{l} -4 < x \le \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \\ 24x^2 - 133x - 66 \ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ -4 < x \le -\dfrac{11}{24} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le -\dfrac{11}{24}$$

• $x \ge \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$, bất phương trình tương đương với

$$5\sqrt{x^2-5x-2} - 5 \le x - 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2-5x-2} \le x+4$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ 24x^2 - 133x - 66 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ -\dfrac{11}{24} \le x \le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \le x \le 6.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$T = \left(-\infty; -\dfrac{11}{24}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}; 6\right].$$

4) Điều kiện: $x \ge 3$

Bất phương trình $x - 3 - 7\sqrt{x-3} - 4(x+5) + 14\sqrt{x+5} \ge 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x+5})(\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5} - 7) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3-4(x+5)}{\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5}}\left[\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{2(x-4)}{\sqrt{x+5}-3}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)(-3x-23)}{\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5}}\left[\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+5}-3}\right] \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-4)(3x+23) \le 0 \Leftrightarrow 3 \le x \le 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = [3;4]$.

**Ví dụ 10.** Giải các phương trình , bất phương trình sau

1) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1}=x\sqrt[3]{16}$ 2) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}>\sqrt[3]{2x-1}$.

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1})^3=16x^3 \Leftrightarrow 4x+3\sqrt[3]{4x^2-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1})=16x^3$$

$$\Rightarrow 4x+3x\sqrt[3]{16(4x^2-1)}=16x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3\sqrt[3]{2(4x^2-1)}=8x^2-2 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 54(4x^2-1)=8(4x^2-1)^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-1=0 \\ 4x^2-1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}} \end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy các nghiệm thỏa phương trình .

Vậy $T=\left\{0;\pm\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}}\right\}$.

2) Bất phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1})^3>2x-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)}(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1})+3(2x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\left[\sqrt[3]{(6x+1)^2}+\sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right]>0 \quad (*)$$

Vì $a^2+ab+3b^2=(a+\dfrac{b}{2})^2+\dfrac{11}{4}b^2>0$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(6x+1)^2}+\sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)}+3\sqrt[3]{(2x+1)^2}>0$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $T=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

**Ví dụ 11.** Giải các phương trình sau

1) $3x^2-10x+12+4(x+1)\sqrt{x-3}=0$

2) $5x^2+6x-4+4\sqrt{x^2-3x+1}=0$

3) $x^4-2x^3+3x^2+6x-19=4\sqrt{5-2x}$

4) $x^2-\dfrac{3}{2}x-1+x\sqrt{x^2-x-1}=2\sqrt{2x-3}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x\geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2-4x+1=(x^2+2x+1)-4(x+1)\sqrt{x-3}+4(x-3)$$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+1-2\sqrt{x-3})^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = x+1-2\sqrt{x-3} \\ 2x-1 = -x-1+2\sqrt{x-3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-3} = 2-x \text{ (VN)} \\ 3x = 2\sqrt{x-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 9x^2-4x+12=0 \text{ (VN)} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Điều kiện: $x^2-3x+1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^2-6x+1 = 4(x^2-3x+1)-4\sqrt{x^2-3x+1}+1$$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2 = \left(2\sqrt{x^2-3x+1}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1 = 2\sqrt{x^2-3x+1}-1 \\ -3x+1 = 2\sqrt{x^2-3x+1}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x = 2\sqrt{x^2-3x+1} & (1) \\ 2-3x = 2\sqrt{x^2-3x+1} & (2) \end{array}\right.$.

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4x^2-12x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 5x^2+12x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-6+2\sqrt{14}}{5}$.

$(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq \dfrac{2}{3} \\ 4-12x+9x^2 = 4x^2-12x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq \dfrac{2}{3} \\ 5x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $T = \left\{0, \dfrac{-6+2\sqrt{14}}{5}\right\}$.

3) Điều kiện: $x \leq \dfrac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-2x^2+3x^2-2x+1 = 4(5-2x)+4\sqrt{5-2x}+1$$

$\Leftrightarrow (x^2-x+1)^2 = (2\sqrt{5-2x}+1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-x+1 = 2\sqrt{5-2x}+1 & (3) \\ x^2-x+1 = -2\sqrt{5-2x}-1 & (4) \end{array}\right.$

Ta có:

$(3) \Leftrightarrow x^2-x = 2\sqrt{5-2x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-x \geq 0 \\ x^4-2x^3+x^2 = 20-8x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-x \geq 0 \\ x^4-2x^3+x^2+8x-20=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-x \geq 0 \\ (x^2-4)(x^2-2x+5)=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

(4) $\Leftrightarrow x^2 - x + 2 + 2\sqrt{5 - 2x} = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy $T = \{\pm 2\}$.

4) Điều kiện: $x \ge \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 3x - 2 + 2x\sqrt{x^2 - x - 1} = 4\sqrt{2x - 3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + 2x\sqrt{x^2 - x - 1} + x^2 = 2x - 3 + 4\sqrt{2x - 3} + 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x - 1} + x)^2 = (\sqrt{2x - 3} + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2 - x - 1} + x = \sqrt{2x - 3} + 2 & (5) \\ \sqrt{x^2 - x - 1} + x = -\sqrt{2x - 3} - 2 & (6) \end{array}\right.$$

Ta có:

(5) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{2x - 3} + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{2x - 3}} + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 1)}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{2x - 3}} + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x - 1}} + 1 = 0 \ (VN) \end{array}\right.$$

(6) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} + x + 2 + \sqrt{2x - 3} = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy $T = \{2\}$.

**Ví dụ 12.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4 - 3\sqrt{7 - 3x}} = x - 1$ . 2) $\sqrt{4x - y^2} - \sqrt{y + 2} = \sqrt{4x^2 + y}$ .

***Lời giải***

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ 4 - 3\sqrt{7 - 3x} = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 3 + 2x - x^2 = 3\sqrt{7 - 3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ (3 + 2x - x^2)^2 = 9(7 - 3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 39x - 54 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ (x-2)(x+3)(x^2-5x+9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy $T = \{2\}$.

2) Điều kiện: $\begin{cases} y \ge -2 \\ 4x - y^2 \ge 0 \\ 4x^2 + y \ge 0 \end{cases}$ (*).

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x - y^2} = \sqrt{4x^2 + y} + \sqrt{y+2}$$

$$\Leftrightarrow 4x - y^2 = 4x^2 + 2y + 2 + 2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 + 2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Thử lại ta thấy cặp (x;y) này thảo mãn (*).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$.

**Ví dụ 13.** Giải các bất phương trình sau

1) $(x-2)\sqrt{2x^2 - x - 3} \le x^2 - 4$ 2) $\dfrac{1 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 1} \le 2$

3) $(x^2 - 3x)\sqrt{x^2 - 2x - 3} \le 0$ 4) $\dfrac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x})^2} > x - 4$.

**Lời giải**

1) Điều kiện: $2x^2 - x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)(\sqrt{2x^2 - x - 3} - x - 2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ \sqrt{2x^2 - x - 3} - x - 2 \le 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x - 2 \le 0 \\ \sqrt{2x^2 - x - 3} - x - 2 \ge 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right..$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \sqrt{2x^2 - x - 3} \le x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2x^2 - x - 3 \le x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x - 7 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le \frac{5+\sqrt{53}}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ \sqrt{2x^2 - x - 3} \ge x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ \begin{cases} -2 < x \le 2 \\ x^2 - 5x - 7 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ -2 \le x \le \frac{5-\sqrt{53}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le \frac{5-\sqrt{53}}{2}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là

$$T = \left[2; \frac{5+\sqrt{53}}{2}\right] \cup \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{53}}{2}\right].$$

2) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$.

Ta xét các trường hợp sau

- $x \le -1$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$1 - \sqrt{x^2 - x - 2} \ge 2(x-1) \Leftrightarrow 3 - 2x \ge \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 3x^2 - 11x + 11 \le 0 \ (vn_0) \end{cases}$$ hệ vô nghiệm.

- $x \ge 2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$1 - \sqrt{x^2 - x - 2} \le 2(x-1) \Leftrightarrow 3 - 2x \le \sqrt{x^2 - x - 2}$$

Bất phương trình trên đúng với mọi $x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = [2; +\infty)$.

3) Điều kiện: $x^2 - 2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 3 \end{array}\right.$.

Ta xét các trường hợp sau

- $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$, khi đó bất phương trình đã cho luôn đúng.

- $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 3x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3.$$

Từ đó, ta có nghiệm của bất phương trình là: $T = \{3\}$.

4) Điều kiện: $x \ge -1$

Ta thấy $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình

Xét $x \ne 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2(\sqrt{x+1}-1)^2}{(x+1-1)^2} > x-4 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 \geq x-4$$

$$\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{x+1} \geq x-4 \Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \leq 8.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T = [-1;8]$.

**Ví dụ 14.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{5x-4} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x+5}$
2. $\sqrt{2x^2+6x+1} + \sqrt{x^2-x+4} = \sqrt{x^2+15x+9}$
3. $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$.

***Lời giải***

1. Điều kiện: $x \geq \frac{5}{4}$

Phương trình tương đương với: $2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{x+5}$ (1)

Bình phương hai vế ta được phương trình

$$6x+1-4\sqrt{x(2x+1)} = 6x+1-2\sqrt{(5x-4)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x} = \sqrt{5x^2+21x-20} \Leftrightarrow 4(2x^2+x) = 5x^2+21x-20$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+20 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = \frac{5}{3}.$$

Thử lại ta có $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

2. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ x \leq \dfrac{-15-3\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{2x^2+6x+1} = \sqrt{x^2+15x+9} - \sqrt{x^2-x+4}$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x+1 = 2x^2+14x+13-2\sqrt{(x^2+15x+9)(x^2-x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 4x+6 = \sqrt{(x^4+14x^3-2x^2+51x+36)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ 16x^2+48x+36 = x^4+14x^3-2x^2+51x+36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x^4+14x^3-18x^2+3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x(x-1)(x^2+15x-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{-15+\sqrt{237}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$$T=\left\{0;1;\frac{-15+\sqrt{237}}{2}\right\}.$$

3. Điều kiện: $x\ge -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}$$

Bình phương 2 vế ta được:

$$\frac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Thử lại: $x=1-\sqrt{3}, x=1+\sqrt{3}$ là nghiệm.

**Chú ý:**

1) Với phương trình: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có: $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương ,giải phương trình hệ quả.

2) Với phương trình: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có: $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì ta biến đổi

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

**Ví dụ 15.** Giải phương trình $3x+4\sqrt{x+2}=8\sqrt{x-1}+6$.

***Lời giải***

Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình nên ta biến đổi phương trình thành

$$3(x-2)+4(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)-\frac{12(x-2)}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[1-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \sqrt{x+2}+2\sqrt{x-1}-4=0\quad(*)\end{array}\right..$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-2+2(\sqrt{x-1}-1)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}\right]=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$.

**Ví dụ 16.** Giải bất phương trình:

1) $\sqrt{3x+5}+\sqrt[3]{3x-2}\ge 1+\sqrt{2x+6}$

2) $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}\ge x^2+7x+12$ (Đề thi ĐH Khối D - 2014).

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x\ge -\frac{5}{3}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3x+5}-\sqrt{2x+6}+\sqrt[3]{3x-2}-1\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+6}}+\frac{3(x-1)}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+6}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1}\right]\ge 0$$

$\Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$ .

Do $\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+6}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1}>0 \quad \forall x\ge -\dfrac{5}{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 1$.

2) Điều kiện $x\ge -2$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2)+(x+6)(\sqrt{x+7}-3)\ge x^2+2x-8$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}\ge (x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4\right]\ge 0 \quad (*)$$

Vì $x\ge -2$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}<\frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}<\frac{x+2}{2}+\frac{x+6}{2}=x+4$$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$.

Vậy $-2\le x\le 2$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Ví dụ 17.** Giải bất phương trình $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}\ge 2$.

***Lời giải***

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-8-3(\sqrt[3]{3x+2}-2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)-\frac{9(x-2)}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-2).A\ge 0 \quad (*)$

Với $A=(x^2+2x+4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)$

$$=\left|(x+1)^2+3\right|\left|(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2+3\right|\ge 9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$.

Nên $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

Vậy $T=\{-1\}\cup[2;+\infty)$.

**Ví dụ 18.** Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-3x+1}+1=\sqrt[3]{6x^3+2}$.

***Lời giải***

Nhận thấy phương trình có nghiệm $x=1$ nên ta biến đổi như sau

$$\sqrt{3x^2-3x+1}-1=\sqrt[3]{6x^3+2}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x-1)}{\sqrt{3x^2-3x+1}+1}=\frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt[3]{(6x^3+2)^2}+2.\sqrt[3]{6x^3+2}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{x}{\sqrt{3x^2-3x+1}+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)}{\sqrt[3]{(6x^3+2)^2}+2.\sqrt[3]{6x^3+2}+4}\end{array}\right. \quad (*)$$

Từ (*) và phương trình đề bài ta suy ra

$$\frac{x}{\sqrt[3]{6x^3+2}}=\frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt[3]{(6x^3+2)^2}+2.\sqrt[3]{6x^3+2}+4}$$

Đặt $a=\sqrt[3]{6x^3+2}$, ta có:

$$\frac{a^2+2a+4}{a}=\frac{2(x^2-x+1)}{x}\Leftrightarrow a+\frac{4}{a}=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{2}\\ x=\dfrac{2}{a}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy $x=-\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$ không thoả phương trình. Vậy $T=\{1\}$.

**Ví dụ 19.** Giải phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x\ge 2+\sqrt{3}\\ 0\le x\le 2-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$ có hai nghiệm $x=4, x=\dfrac{1}{4}$. Mà hai nghiệm này là nghiệm của tam thức $x^2-\dfrac{17}{4}x+1$

nên ta tìm cách tạo ra thừa số $x^2-\frac{17}{4}x+1$. Ta biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-\frac{17}{4}x+1}{x+1+\frac{5}{2}\sqrt{x}}+\frac{x^2-\frac{17}{4}x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{17}{4}x+1\right)\left(\frac{1}{x+1+\frac{5}{2}\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{17}{4}x+1\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{4}\\ x\ge 4\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là:

$$T=\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty).$$

**Ví dụ 20.** Giải phương trình $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

***Lời giải***

Vì $x=-2$ không là nghiệm phương trình nên.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2}=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2}-3=\frac{x^2+x-1}{x+2}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=\frac{x^2-2x-7}{x+2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x-7=0\\ \sqrt{x^2-2x+2}=x-1\quad(*)\end{array}\right.$$

Vì (*) vô nghiệm, nên phương trình có hai nghiệm: $x=1\pm 2\sqrt{2}$.

**Chú ý:** Điểm mấu chốt trong lời giải trên là chúng ta biết được thừa số $x^2-2x-7$. Để tìm thừa số này, ta có thể làm như sau:

**Cách 1:** Sử dụng chức năng SOLVE ta tìm được hai nghiệm của phương trình đã cho. Lưu hai nghiệm đó vào A và B rồi ta đi tính $A+B, A.B$ ta được $\begin{cases}A+B=2\\ AB=-7\end{cases}$ nên suy ra A,B là nghiệm của tam thức $x^2-2x-7$.

**Cách 2:** Trước hết ta thêm một lượng $mx+n$ vào hai vế:

$$\sqrt{x^2-2x+2}-(mx+n)=\frac{x^2+x-1}{x+2}-(mx+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-m^2)x^2-2(1+mn)x+2-n^2}{\sqrt{x^2-2x+2}+mx+n}=\frac{(1-m)x^2+(1-2m-n)x-1-2n}{x+2}.$$

Ta chọn m,n sao cho: $\frac{1-m^2}{1-m}=\frac{2(1+mn)}{2m+n-1}=\frac{n^2-2}{2n+1}$, từ đây ta có:

$m=0; n=3$.

**Ví dụ 21.** Giải phương trình $5x^2-16x+7+(x+1)\sqrt{x^2+3x-1}=0$.

***Lời giải***

Điều kiện: $x^2+3x-1\ge 0$ (*)

Ta thấy $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+3x-1}+\frac{5x^2-16x+7}{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-1}+(2x-3)+\frac{5x^2-16x+7}{x+1}-(2x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-1}+(2x-3)+\frac{3x^2-15x+10}{x+1}=0 \quad (1)$$

- $\sqrt{x^2+3x-1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{2} \\ 3x^2-15x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15+\sqrt{105}}{6}$,

khi đó (1) được thỏa mãn.

- $\sqrt{x^2+3x-1}\ne 2x-3 \Leftrightarrow x\ne \frac{15+\sqrt{105}}{6}$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-1-(2x-3)^2}{\sqrt{x^2+3x-1}-(2x-3)}+\frac{3x^2-15x+10}{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-15x+10\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-1}-(2x-3)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-15x+10=0 \\ \sqrt{x^2+3x-1}-(2x-3)=x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{15-\sqrt{105}}{6} \\ \sqrt{x^2+3x-1}=3x-2 \quad (3) \end{array}\right.$$

Ta có: $(3)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{2}{3} \\ 8x^2-15x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15+\sqrt{65}}{16}$.

Kết hợp với (*) ta có nghiệm của phương trình đã cho là:

$$T=\left\{\frac{15\pm\sqrt{105}}{6};\frac{15+\sqrt{65}}{16}\right\}.$$

**Ví dụ 22.** Giải phương trình $x^3 + 6x^2 - 2x + 3 = (5x-1)\sqrt{x^3+3}$.

*Lời giải*

Điều kiện: $x \geq -\sqrt[3]{3}$.

Ta thấy $x = \dfrac{1}{5}$ không là nghiệm của phương trình nên ta có:

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1} = \sqrt{x^3+3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1} - 2x = \sqrt{x^3+3} - 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+3}{5x-1} = \sqrt{x^3+3} - 2x \qquad (1).$$

• Nếu $\sqrt{x^3+3} + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x-1)(x^2-3x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}.$$

Khi đó (1) đúng $\Rightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ là một nghiệm của phương trình.

• Nếu $x \neq \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \dfrac{x^3-4x^2+3}{5x-1} = \dfrac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-4x^2+3=0 & \text{(a)} \\ \sqrt{x^3+3}+2x = 5x-1 & \text{(b)} \end{array}\right.$$

Ta có:

(a) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

(b) $\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ (x-1)(x^2-8x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 + 3\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x = 1$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $x = 4 + 3\sqrt{2}$.

**Ví dụ 23.** Giải bất phương trình $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \leq \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$.

*Lời giải*

Điều kiện: $x > -4$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+x^2-3 \le \dfrac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\Leftrightarrow 2\frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+1}+x^2-3 \le \frac{4-(x^2+1)}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+x^2-3+\frac{x^2-3}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\left[\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+1+\frac{1}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\right] \le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-3 \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ nghiệm bất phương trình: $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

**Ví dụ 24.** Tìm nghiệm dương của bất phương trình

$$4\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^4+2x^3+x^2-96x} \le x^2-3x-4.$$

*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+1 \ge 0 \\ x^4+2x^3+x^2-96x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge a$, trong đó $a$ là nghiệm duy nhất của phương trình $x^3+2x^2+x-96=0$ và $2+\sqrt{3} < a < 4$.

Phương trình tương đương với

$$\frac{16(x^2-4x+1)-(x^4+2x^3+x^2-96x)}{4\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^4+2x^3+x^2-96x}} \le x^2-3x-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x+4)(x-4)(x+1)^2}{4\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^4+2x^3+x^2-96x}} \le (x+1)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-4)\left[\frac{(x+1)(x+4)}{4\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^4+2x^3+x^2-96x}}+1\right] \ge 0 \ (1)$$

Với điều kiện $x \ge a$ ở trên thì ta dễ dàng nhận thấy

$$\frac{(x+1)(x+4)}{4\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^4+2x^3+x^2-96x}}+1 > 0$$

Suy ra: $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ do $x \ge a$. Vậy $T = [4;+\infty)$.

**Ví dụ 25.** Giải phương trình: $\dfrac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+x+2}$.

***Lời giải***

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

Ta có: $x^3+5x^2+4x+2=(x+3)(x^2+2x+3)-5x-7$

Nên $\dfrac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+x+2}$

$\Leftrightarrow\ x+3-\sqrt{x^2+2x+3}-\dfrac{5x+7}{x^2+2x+3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x+7}{(x+3)+\sqrt{x^2+2x+3}}-\dfrac{5x+7}{x^2+2x+3}=0$

$\Leftrightarrow (5x+7)\left(\dfrac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\dfrac{1}{x^2+2x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+7=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{5} \\ \dfrac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\dfrac{1}{x^2+2x+3}=0\quad (1)\end{array}\right.$

Ta có (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\dfrac{1}{x^2+2x+3}=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+2-\sqrt{x^2+x+2}-2=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}=2$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1, x=-2$.

Vậy $T=\left\{-\dfrac{7}{5};-2;1\right\}$.

**Ví dụ 26.** Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{2x^2-1}=3x+1$.

***Lời giải***

Điều kiện: $|x|\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+6}=3x+1-\sqrt{2x^2-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1-\sqrt{2x^2-1}\geq 0 & (1)\\ x^2+3x+6=11x^2+6x-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} & (2)\end{cases}$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$

$\Leftrightarrow 7x^2-4x-8+(3x+1)(x+2)-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=0$

$\Leftrightarrow 7x^2-4x-8+(3x+1)\left(x+2-2\sqrt{2x^2-1}\right)=0$ (3)

Vì: $x+2+2\sqrt{2x^2-1}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-1}=-x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2 \\ 7x^2-4x-8=0 \end{cases}$

vô nghiệm, nên $x+2+2\sqrt{2x^2-1}\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (3) tương đương với

$$7x^2-4x-8+(3x+1)\frac{(x+2)^2-4(2x^2-1)}{x+2+2\sqrt{2x^2-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (7x^2-4x-8)\left(1-\frac{3x+1}{x+2+2\sqrt{2x^2-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 7x^2-4x-8=0 & \text{(a)} \\ 2\sqrt{2x^2-1}=2x-1 & \text{(b)} \end{array}\right.$$

(a) có nghiệm $x=\dfrac{2\pm 2\sqrt{15}}{7}$

(b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 4(2x^2-1)=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2+4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$.

Đối chiếu với (1) và điều kiện bài toán ta có nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}$; $x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$.

**Ví dụ 27.** Giải các phương trình sau

1. $3(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3})-2\sqrt{2x^2+5x-3}=3x+4$
2. $13x-17+4\sqrt{x+1}=6\sqrt{x-2}(1+2\sqrt{x+1})$
3. $x^2+8x+2(x+1)\sqrt{x+6}=6\sqrt{x+1}(\sqrt{x+6}+1)+9$.

***Lời giải***

1. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}$, suy ra $t\ge 0$ và $t^2=3x+2\sqrt{2x^2+5x-3}+2$

Thay vào phương trình ta được:

$$3t=t^2+2 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0$$

Giải phương trình ta tìm được $t=1, t=2$

- Với $t=1$, ta có: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x-3}+3x+2=0$

Phương trình này vô nghiệm với $x\ge\dfrac{1}{2}$.

• Với $t = 2$, ta có: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x-3} = 2-3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{2}{3} \\ x^2+7x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-7+\sqrt{65}}{2}.$$

Vậy $x = 16 - 4\sqrt{15}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Điều kiện: $x \ge 2$.

Phương trình $13x - 17 + 2(2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-2}) - 12\sqrt{x^2-x-2} = 0$

Đặt $t = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-2}$, suy ra $t^2 = 13x - 14 - 12\sqrt{x^2-x-2}$

Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$t^2 - 3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -3.$$

• $t = 1$, ta có phương trình $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1 + 3\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 4x + 4 = 9x - 17 + 6\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 21 - 5x = 6\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le \dfrac{21}{5} \\ 25x^2 - 246x + 513 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

• $t = -3$, ta có phương trình

$2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-2} = -3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} + 3 = 3\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{x+1} = 5x - 31 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{31}{5} \\ 25x^2 - 454x + 817 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{227 + 72\sqrt{6}}{25}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 3, x = \dfrac{227+72\sqrt{6}}{25}$.

3. Điều kiện: $x \ge -1$

Phương trình

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 2(x+1)\sqrt{x+6} - 6(\sqrt{x^2+7x+6} + \sqrt{x+1}) - 9 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2+7x+6} + \sqrt{x+1}, t \ge 0$.

Suy ra $t^2 = x^2 + 8x + 2(x+1)\sqrt{x+6} + 7$. Thay vào phương trình ta được:

$$t^2 - 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 8 \text{ (do } t \ge 0\text{)}.$$

Với $t = 8$, ta có: $\sqrt{x^2+7x+6} + \sqrt{x+1} = 8$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x+6} - 6 + \sqrt{x+1} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+7x-30}{\sqrt{x^2+7x+6}+6} + \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+10}{\sqrt{x^2+7x+6}+6}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ (do } x\ge -1 \text{ nên } \frac{x+10}{\sqrt{x^2+7x+6}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0\text{)}.$$

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Ví dụ 28.** Giải các bất phương trình sau

1) $x^2+9x+2+4(x+1)\sqrt{x+4}\ge \frac{5}{2}\sqrt{x+1}(2+\sqrt{x+4})$

2) $18x^2-15x+\frac{2}{x}\ge \frac{5}{\sqrt{x}}+12(1-\sqrt{x})$ .

***Lời giải***

1) Điều kiện $x\ge -1$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow 2x^2+18x+4+8(x+1)\sqrt{x+4}\ge 5(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+5x+4}).$$

Đặt $t=2\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+5x+4},\ t\ge 0$

Suy ra $t^2=x^2+9x+8+4(x+1)\sqrt{x+4}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$2t^2-12\ge 5t \Leftrightarrow 2t^2-5t-12\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 4 \quad (\text{do } t\ge 0)$$

Với $t\ge 4$ ta có $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+5x+4}\ge 4$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1}-1)+\sqrt{x^2+5x+4}-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x(x+5)}{\sqrt{x^2+5x+4}+2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x+5}{\sqrt{x^2+5x+4}+2}\right)\ge 0 \quad (*)$$

Với $x\ge -1$ ta có $\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x+5}{\sqrt{x^2+5x+4}+2}>0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow x\ge 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0$.

2) Điều kiện $x>0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2\left(9x^2+6\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-5\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-12\ge 0$.

$$\Leftrightarrow 2\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-5\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-12\ge 0$$

Đặt $t=\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $t>0$ ta có $2t^2-5t-12\ge 0\Leftrightarrow t\ge 4$ .

Với $t \ge 4$ ta có $3x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ge 4 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x})^3 - 4\sqrt{x} + 1 \ge 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(3x + 3\sqrt{x} - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \ge 1 \\ \sqrt{x} \le \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ 0 < x < \left(\dfrac{-3 + \sqrt{21}}{6}\right) \end{array}\right.$$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Ví dụ 29.** Giải các bất phương trình sau

1) $8x^2 - 26x - 2 + 5\sqrt{2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7} \le 0$.

2) $2x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 4x + 32 \ge 5(x^2 + x + 2)\sqrt{x - 2}$.

***Lời giải***

1) Ta có $2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 7x + 7)$

Và $8x^2 - 26x - 2 = a(x^2 - x + 1) + b(2x^2 + 7x + 7)$

Suy ra $\left\{\begin{array}{l} a + 2b = 8 \\ -a + 7b = -26 \\ a + 7b = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 1, b = -2$.

Nên bất phương trình

$$\Leftrightarrow 12(x^2 - x + 1) + 5\sqrt{(x^2 - x + 1)(2x^2 + 7x + 7)} - 2(2x^2 + 7x + 7) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 12\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 7x + 7} + 5\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 7x + 7}} - 2 \le 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 7x + 7}}, t > 0$ ta có: $12t^2 + 5t - 2 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \le t \le \dfrac{1}{4}$.

Với $t \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 7x + 7}} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 16(x^2 - x + 1) \le 2x^2 + 7x + 7$

$$\Leftrightarrow 14x^2 - 23x + 9 \le 0 \Leftrightarrow \frac{9}{14} \le x \le 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{9}{14} \le x \le 1$.

2) Điều kiện: $x \ge 2$.

Ta có $2x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x - 16 = 2(x^2 + x + 2)^2 - 12(x - 2)$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$12(x - 2) + 5(x^2 + x + 2)\sqrt{x - 2} - 2(x^2 + x + 2)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 12\frac{x - 2}{(x^2 + x + 2)^2} + 5\frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 + x + 2} - 2 \le 0.$$

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+x+2}$, $t \ge 0$ ta có $12t^2 + 5t - 2 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \le t \le \dfrac{1}{4}$.

Với $t \le \dfrac{1}{4}$ ta có $4\sqrt{x-2} \le x^2 + x + 2$ (*).

Với $x \ge 2$ ta có

$x^2 + x + 2 = (x-2) + x^2 + 4 > (x-2) + 4 \ge 2\sqrt{4(x-2)} = 4\sqrt{x-2}$.

Do đó (*) luôn đúng với mọi $x \ge 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 2$.

**Ví dụ 30.** Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{3x^2+3x-1}{3x+1} = \sqrt{x^2+2x-1}$ 2) $\dfrac{2x^3+3x^2+11x-8}{3x^2+4x+1} = \sqrt{\dfrac{10x-8}{x+1}}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện $\begin{cases} x^2+2x-1 \ge 0 \\ 3x+1 \ne 0 \end{cases}$ (*).

Phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 1 = (3x+1)\sqrt{x^2+2x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - (3x+1)\sqrt{x^2+2x-1} + 2x^2 + x = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x-1}$, $t \ge 0$ ta có phương trình

$t^2 - (3x+1)t + 2x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow (t-x)(t-2x-1) = 0 \Leftrightarrow t = x, t = 2x+1$.

+) $t = x$, ta có $\sqrt{x^2+2x-1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+2x-1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

+) $t = 2x+1$, ta có $\sqrt{x^2+2x-1} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x^2+2x-1 = (2x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+2x+2 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

2) Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{10x-8}{x+1} \ge 0 \\ 3x^2+4x+1 \ne 0 \end{cases}$ (*).

Phương trình $\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 11x - 8 = (3x^2+4x+1)\sqrt{\dfrac{10x-8}{x+1}}$

$\Leftrightarrow (2x^2+x)(x+1) + 10x - 8 - (3x+1)(x+1)\sqrt{\dfrac{10x-8}{x+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{10x-8}{x+1}-(3x+1)\sqrt{\frac{10x-8}{x+1}}+2x^2+x=0.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{10x-8}{x+1}}, t\geq 0$ ta có phương trình

$t^2-(3x+1)t+2x^2+x=0$

$\Leftrightarrow (t-x)(t-2x-1)=0 \Leftrightarrow t=x, t=2x+1$.

+) Với $t=x$ ta có $\sqrt{\frac{10x-8}{x+1}}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2(x+1)=10x-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^3+x^2-10x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, x=2$.

+) Với $t=2x+1$ ta có $\sqrt{\frac{10x-8}{x+1}}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ (2x+1)^2(x+1)=10x-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ 4x^3+8x^2-5x+9=0 \end{cases}$ (1).

+) Với $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{9}{5}$ ta có $4x^3+8x^2-5x+9=4x^2(x+2)+9-5x>0$

+) Với $x>\frac{9}{5}$ ta có $4x^3+8x^2-5x+9=4x^3+x(8x-5)+9>0$.

Suy ra (1) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1, x=2$.

**Ví dụ 31.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}=4$

3) $2\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-3x}+\sqrt{1-2x-3x^2}=6$

4) $21x-25+2\sqrt{x-2}=19\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x+1}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $0\leq x\leq 2$.

Đặt $a=\sqrt[4]{x}$; $b=\sqrt[4]{17-x}$; $a,b\geq 0$. Ta có hệ: $\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ [(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2b^2-18ab+32=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \vee ab=16 \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=16 \end{array}\right.$.

* Với $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai ngiệm $x=1; x=16$.

2) Điều kiện: $0 \le x \le 2$.

Đặt $a=\sqrt[4]{x},\ b=\sqrt[4]{2-x}; a,b \in \left[0;\sqrt[4]{2}\right]$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2+a+b=4 \\ a^4+b^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+S-2P=4 & (1) \\ (S^2-2P)^2-2P^2=2 & (2) \end{cases} \text{ với}$$

$S=a+b \ge 0, P=ab \ge 0$

Thay (1) vào (2) ta có phương trình:

$$(4-S)^2-\frac{1}{2}(S^2+S-4)^2=2$$

$\Leftrightarrow S^4+2S^3-9S^2+8S-12=0 \Leftrightarrow (S-2)(S^3+4S^2-S+6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=2 \\ S^3+4S^2-S+6=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Vì $S \ge 0$ nên $(*) \Leftrightarrow S^3+3S^2+\left(S-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0$ vô nghiệm.

Với $S=2$ ta có $P=1$ nên suy ra $a=b=1$.

Từ đó ta tìm được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3) Đặt $a=\sqrt{1-3x}, b=\sqrt{x+1}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a+2b+ab=6 & (1) \\ a^2+3b^2=4 & (2) \end{cases}$

Từ (1), suy ra $a=\dfrac{6-2b}{b+3}$ thay vào (2) ta được: $\left(\dfrac{6-2b}{3+b}\right)^2+3b^2=4$

$\Leftrightarrow 3b^2(b^2+6b+9)+(4b^2-24b+36)=4(b^2+6b+9)$

$\Leftrightarrow 3b^4+18b^3+27b^2-48b=0$

$\Leftrightarrow b(b-1)(b^2+7b+16)=0 \Leftrightarrow b=0, b=1$

Với $b=0$ ta có $x=-1$

Với $b=1$ ta có $x=0$.

Vậy $T=\{-1;0\}$.

4) Điều kiện $x \ge 2$.

Đặt $a=\sqrt{x+1},\ b=\sqrt{x-2}; a,b \ge 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 & (3) \\ 21b^2+17+2b=19ab+a & (4) \end{cases}$$

Lấy $6\times(3)+(4)$ ta có phương trình:

$6a^2+15b^2-1+2b=19ab+a \Leftrightarrow 6a^2-(19b+1)a+15b^2+2b-1=0$ (5)

(5) là phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta=(19b+1)^2-24(15b^2+2b-1)=b^2-10b+25=(b-5)^2$$

Nên (1) có hai nghiệm: $a=\dfrac{3b+1}{2}$ và $a=\dfrac{5b-1}{3}$

• $a=\dfrac{3b+1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x-2}+1 \Leftrightarrow 4x+4=9x-17+6\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 21-5x=6\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{21}{5} \\ 25x^2-246x+513=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

• $a=\dfrac{5b-1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}+1=5\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 9x+10+6\sqrt{x+1}=25x-50$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}=8x-30 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{15}{4} \\ 64x^2-489x+891=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{297}{64}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=3; x=\dfrac{297}{64}$.

**Ví dụ 32.** Giải các phương trình sau:

1) $x^2-x-\sqrt{1+8x}=1$

2) $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$

3) $7x^2-13x+8=2x^2.\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

4) $4x^2-11x+10=(x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{8}$

Phương trình $\Leftrightarrow 4x^2-4x-4=4\sqrt{4(2x-1)+5}$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2-5=4\sqrt{4(2x-1)+5}$

Đặt $u=2x-1$; $v=\sqrt{1+8x}$; $v\ge 0, u\ge -\dfrac{5}{4}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2-5=4v \\ v^2-5=4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-5=4v \\ u^2-v^2=4(v-u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-5=4v & (1) \\ (u-v)(u+v+4)=0 & (2) \end{cases}$$

Do $u+v+4>0$ nên từ (2) ta có: $u=v$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{cases} u^2 - 4u - 5 = 0 \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 5 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 3$.

2) Phương trình tương đương với

$3x^3 - 6x^2 + 4x - 6 = 3\sqrt[3]{81x - 8} \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54 = 27\sqrt[3]{81x - 8}$

$\Leftrightarrow (3x - 2)^3 - 46 = 27.\sqrt[3]{27(3x - 2) + 46}$

Đặt $u = 3x - 2,\ v = \sqrt[3]{81x - 8}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 - 46 = 27v \\ v^3 - 46 = 27u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 46 = 27v \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 27) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^3 - 27u - 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ u = 1 \pm 2\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 0; x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

**Chú ý:**

1) Ngoài cách biến đổi trên, chúng ta có thể làm như sau

Đặt $\sqrt[3]{81x - 8} = ay + b \Rightarrow 81x - 8 = a^3y^3 + 3a^2by^2 + 3ab^2y + b^3$

$$\Rightarrow ax + b = \frac{a^4}{81}y^3 + \frac{a^3b}{27}y^2 + \frac{a^2b^2}{27}y + \frac{a(b^3 + 8)}{81} + b.$$

Do đó, ta chọn $a, b$ sao cho: $\begin{cases} \dfrac{a^4}{81} = 1\ ;\ \dfrac{a^3b}{27} = -2 \\ \dfrac{a^2b^2}{27} = \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{b^3 + 8}{81} + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}.$

Từ đó ta có cách đặt như sau.

Đặt $\sqrt[3]{81x - 8} + 2 = 3y \Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \dfrac{4}{3}y$.

Khi đó ta được hệ $\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \dfrac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x \end{cases}.$

Trừ hai phương trình của hệ ta có: $x^3 - y^3 + 2(x^2 - y^2) + \dfrac{13}{3}(x - y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 2(x + y) + \dfrac{13}{3} = 0\ (*) \end{array}\right.$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x + y)^2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 + \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 + \dfrac{1}{3} = 0$ vô nghiệm.

Thay vào hệ và giải phương trình ta được $x = 0; x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

2) Khi gặp phương trình chứa hai hàm ngược nhau, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại 2.

3) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế phương trình cho $x^3$ ta được:

$$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, ta có: $8t^3 - 13t^2 + 7t = 2\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^3 - (t^2 - t - 1) = 2\sqrt[3]{2(2t-1) + t^2 - t - 1}$.

Đặt $u = 2t - 1$, $v = \sqrt[3]{2(2t-1) + t^2 - t - 1}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 - t^2 + t + 1 = 2v \\ v^3 - t^2 + t + 1 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2t - 1 = \sqrt[3]{t^2 + 3t - 3} \Leftrightarrow 8t^3 - 13t^2 + 3t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(8t^2 - 5t - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 8t^2 - 5t - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy ba nghiệm này thỏa phương trình

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 1$; $x = \dfrac{16}{5 \pm \sqrt{89}}$.

4) Phương trình $\Leftrightarrow (2x-3)^2 + x + 1 = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3) - x - 1}$

Đặt $u = 2x - 3$; $v = \sqrt{(x-1)(2x-3) - x - 1}$,

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + x + 1 = (x-1)v \\ v^2 + x + 1 = (x-1)u \end{cases}$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = (x-1)(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u + v + x - 1) = 0$

* $u = v \Rightarrow u^2 + x + 1 = (x-1)u \Leftrightarrow (2x-3)^2 + x + 1 = (x-1)(2x-3)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 7 = 0$ phương trình vô nghiệm.

* $u + v + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 + \sqrt{2x^2 - 6x + 2} + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 2} = 4 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{4}{3} \\ 7x^2 - 18x + 14 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Ví dụ 33.** Giải các phương trình:

1) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1$

2) $(x^2-1)\sqrt[3]{2x-1}+x=x\sqrt[3]{(2x-1)^2}$

3) $x=\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}\sqrt{6-x}+\sqrt{6-x}\sqrt{2-x}$

4) $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2}+x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x\le 1$.

Ta thấy tổng của các biểu thức trong căn bằng 1 nên ta đặt $a=\sqrt{1-x^2}$, $b=\sqrt[4]{x^2+x-1}$, $c=\sqrt[6]{1-x}; a,b,c\ge 0$, khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a,b,c\ge 0 \end{cases}.$$

Vì $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}\Rightarrow 0\le a,b,c\le 1\Rightarrow \begin{cases} a^2\le a \\ b^4\le b \\ c^6\le c \end{cases}\Rightarrow a^2+b^4+c^6\le 1$.

Nên ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=a^2 \\ b=b^4 \\ c=c^6 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y^3+1=2x & (1) \\ (x^2-1)y+x=xy^2 & (2) \end{cases}$

Ta có $(2)\Leftrightarrow x^2y-y+x-xy^2=0\Leftrightarrow xy(x-y)+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-1 \end{array}\right.$.

- $x=y$ thay vào (1) ta có:

$x^3+1=2x\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=1, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

- $xy=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{y}$ thay vào (1) ta có:

$y^3+1=-\frac{2}{y}\Leftrightarrow y^4+y+2=0\Leftrightarrow \left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$ vô nghiệm.

Vậy $T = \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

3) Điều kiện: $0 \le x \le 3$.

Đặt $a = \sqrt{2-x}; b = \sqrt{3-x}; c = \sqrt{6-x};$ $a,b,c \ge 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab + bc + ca = 2 - a^2 \\ ab + bc + ca = 3 - b^2 \\ ab + bc + ca = 6 - c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)(a+b) = 2 \\ (b+c)(b+a) = 3 \\ (c+a)(c+b) = 6 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 6$$

Suy ra $\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=3 \\ c+a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 2 \\ x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93 \ge 0 \end{cases}$

Đặt $t = \sqrt{x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93} \Rightarrow t^2 + 91 = (x^2 + \sqrt{x-2})^2$

Nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+91} = \sqrt{t-2} + t^2 \\ \sqrt{t^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được:

$$\sqrt{x^2+91} - \sqrt{t^2+91} = \sqrt{t-2} - \sqrt{x-2} + t^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - t^2}{\sqrt{x^2+91} + \sqrt{t^2+91}} + \frac{x-t}{\sqrt{x-2} + \sqrt{t-2}} + (x^2 - t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\left(\frac{x+t}{\sqrt{x^2+91} + \sqrt{t^2+91}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{t-2}} + x + t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ \dfrac{x+t}{\sqrt{x^2+91} + \sqrt{t^2+91}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{t-2}} + x + t = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right.$$

Thay $x = t$ vào hệ ta có: $\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 91 - \sqrt{x^2+91} - 90 + \sqrt{x-2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91} - 10)(\sqrt{x^2+91} + 9) + \sqrt{x-2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2+91} + 9)}{\sqrt{x^2+91} + 10} + \frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2+91}+9\right)}{\sqrt{x^2+91}+10}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]=0 \Leftrightarrow x=3.$$

**Ví dụ 34.** Giải phương trình $x^3+\sqrt{x-1}=9$.

***Lời giải***

Điều kiện $x \geq 1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+\sqrt{x-1},\ x \geq 1$.

Ta có $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0\ \forall x>1$

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(2)=9$.

Suy ra phương trình $\Leftrightarrow f(x)=f(2) \Leftrightarrow x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Ví dụ 35.** Giải bất phương trình $6x-1+5\sqrt{2x^2+5x-3} \leq 3(\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3})$.

***Lời giải***

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Bất phương trình

$\Leftrightarrow 2(2x-1)+2(x+3)+5\sqrt{2x^2+5x-3}-3(\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3})-5 \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3})(2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-3) \leq 5$ (1).

Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}$ và $g(x)=2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-3$.

Ta có $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục và luôn đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, đồng thời $f(x)>0\ \forall x \geq \dfrac{1}{2}$.

Do đó, nếu $g(x) \leq 0$ thì (1) đúng.

Xét $g(x)>0$, khi đó hàm số $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, $h(1)=5$.

Suy ra (1) $\Leftrightarrow h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow x \leq 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$.

**Ví dụ 36.** Giải phương trình $\dfrac{8x^3+2x}{3x+2}=\sqrt{3x+1}$.

**Lời giải**

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 8x^3+2x=(3x+2)\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow (2x)^3+(2x)=(\sqrt{3x+1})^3+\sqrt{3x+1}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\ t\in\mathbb{R}$ ta có $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{3x+1})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$.

**Ví dụ 37.** Giải bất phương trình $x^3+8x^2+8x+2+\sqrt[3]{2x^2-5x-8}\ge 0$.

**Lời giải**

Bất phương trình $\Leftrightarrow (x+2)^3+(x+2)\ge -2x^2+5x+8+\sqrt[3]{-2x^2+5x+8}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\ t\in\mathbb{R}$ ta có $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x+2)\ge f(\sqrt[3]{-2x^2+5x+8})\Leftrightarrow x+2\ge\sqrt[3]{-2x^2+5x+8}$

$\Leftrightarrow (x+2)^3\ge -2x^2+5x+8$

$$\Leftrightarrow x(x^2+8x+7)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\-7\le x\le -1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=[-7;-1]\cup[0;+\infty)$.

**Ví dụ 38.** Giải bất phương trình

$$2x-2+2x\sqrt{4x^2+3}-(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}>0$$

***Lời giải***

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4x+2x\sqrt{4x^2+3}\ge 2(x+1)+(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}$

$\Leftrightarrow (2x)(2+\sqrt{(2x)^2+3})\ge (x+1)[2+\sqrt{(x+1)^2+3}]$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3}),\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2+\dfrac{2t^2}{\sqrt{t^2+3}}+\sqrt{t^2+3}>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow f(2x)\ge f(x+1)\Leftrightarrow 2x\ge x+1\Leftrightarrow x\ge 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 1$.

**Ví dụ 39.** Giải bất phương trình

1) $\sqrt{2x+1}(1+\sqrt{2x+4}-2\sqrt{8x+1})\le\sqrt{8x+1}$.

2) $\sqrt{\dfrac{x^3}{3}-2}+\dfrac{1}{2}\ge\sqrt[3]{3x^2-3x+\dfrac{27}{4}}$.

## *Lời giải*

1) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{8}$.

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(1+\sqrt{2x+4}) \geq \sqrt{8x+1}(1+2\sqrt{2x+1})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(1+\sqrt{2x+4}) \geq \sqrt{8x+1}(1+\sqrt{8x+4}) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t(1+\sqrt{t^2+3}),\ t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2t^2}{\sqrt{t^2+3}} + \sqrt{t^2+3} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{2x+1}) \geq f(\sqrt{8x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} \geq \sqrt{8x+1} \Leftrightarrow x \leq 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{8} \leq x \leq 0$.

2) Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{6}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3}{3}-2} \geq \sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}} - \frac{1}{2} \quad (*)$

Ta có $3x^2-3x+\frac{27}{4} = 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow VP(*) > 0$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2 \geq \left(\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}}\right)^2 - \sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6 \geq 3\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}}\right)^2 - 3\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}} + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-3x \geq \left(3x^2-3x+\frac{27}{4}\right) + 3\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}}\right)^2 - 3\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3+3t^2-3t,\ t \geq \sqrt[3]{6}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2+6t-3 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt[3]{6}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ là hàm liên tục và đồng biến trên $(\sqrt[3]{6};+\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x) \geq f\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}}\right) \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{3x^2-3x+\frac{27}{4}}$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1 \geq \frac{23}{4} \Leftrightarrow (x-1)^3 \geq \frac{23}{4} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{\frac{23}{4}} + 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \sqrt[3]{\frac{23}{4}} + 1$.

**Ví dụ 40.** Giải phương trình

$$2\sqrt{4x^2 - x + 1} + 2x = 3\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt{9x^2 - 4x + 4}.$$

***Lời giải***

Phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ta thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình

- Xét $x > 0$, chia hai vế phương trình cho $x$ và đặt $t = \frac{1}{x}$ ta được phương trình

$2\sqrt{t^2 - t + 4} + 2 = 3\sqrt[3]{2t - 1} + \sqrt{4t^2 - 4t + 9}$. Đặt $a = \sqrt[3]{2t - 1}$

Ta được: $\sqrt{a^6 + 15} + 2 = 3a + \sqrt{a^6 + 8} \Leftrightarrow 3a + \sqrt{a^6 + 8} - \sqrt{a^6 + 15} - 2 = 0$ (*)

Xét hàm số $f(a) = 3a + \sqrt{a^6 + 8} - \sqrt{a^6 + 15} - 2$

Ta thấy nếu $a < 0 \Rightarrow f(a) < 0$ nên ta chỉ xét $a > 0$.

Khi đó: $f'(a) = 3 + 3a^5\left(\frac{1}{\sqrt{a^6 + 8}} - \frac{1}{\sqrt{a^6 + 15}}\right) > 0$ nên $f(a)$ là hàm đồng biến

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow a = 1$ là nghiệm duy nhất của (*)

Từ đó ta tìm được $x = 1$.

- Xét $x < 0$, làm tương tự như trên ta có phương trình

$f(a) = \sqrt{a^6 + 8} - 3a - \sqrt{a^6 + 15} + 2 = 0$ với $a < -1$

Ta có $f'(a) = 3a^5\left(\frac{1}{\sqrt{a^6 + 8}} - \frac{1}{\sqrt{a^6 + 15}}\right) - 3 < 0$

Nên $f(a) > f(-1) = 2$.

Vậy $x = 0, x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Ví dụ 41.** Cho các số thực $a, b, c$ thỏa $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{x - a} - \sqrt{x - b} + \frac{a - b}{\sqrt{x - c}} = 0.$$

***Lời giải***

Điều kiện: $x \geq a$.

Phương trình

$\Leftrightarrow \frac{b - a}{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}} + \frac{a - b}{\sqrt{x - c}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - a} + \sqrt{x - b} - \sqrt{x - c} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x - a}{x - c}} + \sqrt{\frac{x - b}{x - c}} - 1 = 0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-a}{x-c}}+\sqrt{\dfrac{x-b}{x-c}}-1, x\geq a$

Ta có $f$ là hàm đồng biến và $f(a)=\sqrt{\dfrac{a-b}{a-c}}-1<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1>0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm. Từ đó ta có đpcm.

**Ví dụ 42.** Chứng minh rằng phương trình: $x^5+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}-2014=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

***Lời giải***

Điều kiện: $x>\sqrt{2}$ (do $x>0$).

Xét hàm số: $f(x)=x^5+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}-2014$ với $x>\sqrt{2}$.

Ta có $f'(x)=5x^4-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-2)^3}}\Rightarrow f''(x)=20x^3+\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2-2)^5}}>0\quad \forall x>\sqrt{2}$

Vì $f''(x)=0$ vô nghiệm $\Rightarrow f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=+\infty$; $f(\sqrt{3})<0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm $x_1\in(\sqrt{2};\sqrt{3})$ và $x_2>\sqrt{3}$.

**Ví dụ 43.** Giải bất phương trình $\sqrt{14x^2+22x}-\sqrt{3x^2+7x-1}>2x+1$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases}14x^2+22x\geq 0\\3x^2+7x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{-7-\sqrt{61}}{6}\\x\geq\dfrac{-7+\sqrt{61}}{6}\end{array}\right.$ (*).

Bất phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{14x^2+22x}>2x+1+\sqrt{3x^2+7x-1}$ (1).

Với $a,b\in\mathbb{R}$ ta có bất đẳng thức $a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$2x+1+\sqrt{3x^2+7x-1}\leq\sqrt{2\left[(2x+1)^2+3x^2+7x-1\right]}=\sqrt{14x^2+22x}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$2x+1=\sqrt{3x^2+7x-1}\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=3x^2+7x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1, x=2.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là

$$T=\left(-\infty;\frac{-7-\sqrt{61}}{6}\right]\cup\left[\frac{-7+\sqrt{61}}{6};+\infty\right)\setminus\{1,2\}.$$

**Ví dụ 44.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

2) $6\sqrt{x^3+2x^2+x+2}=x^2+9x+19$

3) $2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x$

4) $\sqrt[4]{(4-x)(x-2)}+\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[4]{x-2}+6x\sqrt{3x}\le x^3+30$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}.\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}\le\sqrt{(x+1)(x+2+2x-1)}$$
$$=\sqrt{3x^2+4x+1}$$

Đẳng thức có

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\Leftrightarrow(x+2)(2x-1)=x\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt5}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

2) Điều kiện: $x\ge-2$

Ta có:

$$6\sqrt{x^3+2x^2+x+2}=6\sqrt{(x+2)(x^2+1)}=2\sqrt{(x^2+1)}\sqrt{9x+18}\le x^2+9x+19$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\sqrt{9x+18}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-2\\ x^2-9x-17=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{149}}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{9\pm\sqrt{149}}{2}$.

3) Điều kiện: $-2\le x\le4$

Phương trình $\Leftrightarrow2\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{9-(x-1)^2}$

$\Rightarrow2\sqrt{x^2+3}\le x+3$

$\Leftrightarrow4x^2+12\le x^2+6x+9\Rightarrow3(x-1)^2\le0\Leftrightarrow x=1$

Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình .

4) Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $(4-x)(x-2)\le\left(\frac{4-x+x-2}{2}\right)^2=1$

Suy ra $\sqrt[4]{(4-x)(x-2)}\le1$ (1)

Và $6x\sqrt{3x}=2\sqrt{27x^3}\le x^3+27$ (2)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:

$(\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[4]{x-2})^4 \le (2\sqrt{4-x}+2\sqrt{x-2})^2 \le 16 \Rightarrow \sqrt[4]{4-x}+\sqrt[4]{x-2} \le 2$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có nghiệm của phương trình là $x=3$.

**Ví dụ 45.** Giải các bất phương trình sau

1) $x^2-4x+6 \le \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{-3x^2+9x-5}$

2) $x^4-3x^3+4x^2+16 > 12\sqrt[3]{3x^2-4}$

3) $\sqrt[3]{14-x^3}+x \ge 2(1+\sqrt{x^2-2x-1})$

4) $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}} \le 1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-5x+3\ge 0\\ -3x^2+9x-5\ge 0\end{cases}$ $x\in\left[\dfrac{9-\sqrt{21}}{6};1\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}\right]$

Ta có: $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\ge 2$ (1)

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{-3x^2+9x-5} \le \sqrt{2(-x^2+4x-2)} = \sqrt{2\left|2-(x-2)^2\right|} \le 2$ (2)

Suy ra $x^2-4x+6 \ge \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{-3x^2+9x-5}$.

Do đó, từ (1) và (2) $x=2$ là nghiệm của bất phương trình

2) Điều kiện: $|x| \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Ta có:

$x^4-3x^3+4x^2+16=(x^2+x+1)(x-2)^2+3x^2+12 \ge 2x^2+(x^2+4)+8$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số ta có:

$x^4-3x^3+4x^2+16 \ge 3\sqrt[3]{16x^2(x^2+4)}$

$= 6\sqrt[3]{2\left|(x^2-4)^2+12x^2-16\right|} \ge 12\sqrt[3]{3x^2-4}$.

Đẳng thức có $\Leftrightarrow x=2$. Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x=2$.

3) Điều kiện: $x^2-2x-1\ge 0$ (1)

Ta có: $\sqrt[3]{14-x^3}+x \ge 2(1+\sqrt{x^2-2x-1}) \ge 2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{14-x^3} \ge 2-x \Leftrightarrow 14-x^3 \ge 8-12x+6x^2-x^3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1 \le 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

4) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{4}{9}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3}+4} \le 1+\sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}.$$

Đặt $(9x+4)=y$, suy ra $y \ge 0$.

Khi đó ta được $2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}+4} \le 1+\sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4.\sqrt{\frac{y^2}{3}+4} \le 1+\frac{3y}{2}+\sqrt{6y}$ (bình phương hai vế).

Theo BĐT Cô-si ta được $\sqrt{6y} \le \frac{y+6}{2}$, do đó:

$$4.\sqrt{\frac{y^2}{3}+4} \le 2y+4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3}+4\right) \le (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+48 \le 3y^2+12y+12 \Leftrightarrow y^2-12y+36 \le 0 \Leftrightarrow (y-6)^2 \le 0.$$

Từ đó ta được $y=6$, suy ra $x=\frac{2}{9}$ thay vào bất phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x=\frac{2}{9}$.

**Ví dụ 46.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{-x^2+4x+5}=x^2-2\left(1-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)x+\frac{36-9\sqrt{5}}{5}$

2) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{x^2+5x+6}=\sqrt{5x^2+20x+15}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $-1 \le x \le 5$

Phương trình tương đương với

$$4-2x+\sqrt{-x^2+4x+5}=x^2-4\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)x+\frac{56-9\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

Ta có: $x^2-4\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)x+\frac{56-9\sqrt{5}}{5}=\left[x-2\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right]^2+3\sqrt{5} \ge 3\sqrt{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=2\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

Mặt khác: $4-2x+\sqrt{-x^2+4x+5}=2(2-x)+\sqrt{-x^2+4x+5}$

$$\le \sqrt{(1+4)\left[(2-x)^2-x^2+4x+5\right]}=3\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x \le 2 \\ 2(-x^2+4x+5)=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2\left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

2) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+3}$ ta có được

$$\frac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{5(x+1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$VT = \sqrt{4x+2}\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+3}.\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} \leq \sqrt{(4x+2+x+3)\left(\frac{1}{x+3} + \frac{x+2}{x+3}\right)}$$

$$= \sqrt{5(x+1)} = VP$$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{4x+2} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{8}$.

Kết hợp điều kiện ta có $x = \frac{-9+\sqrt{65}}{8}$ là nghiệm của phương trình .

**Ví dụ 47.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{2 - x + \frac{3}{2-x}} + \sqrt{x + \frac{3}{x}} = 4$ (1)

2) $(26-x)\sqrt{5x-1} - (13x+14)\sqrt{5-2x} + 12\sqrt{(5x-1)(5-2x)} = 18x + 32$ (2).

***Lời giải***

1) Điều kiện: $\begin{cases} 2 - x + \dfrac{3}{2-x} \geq 0 \\ x + \dfrac{3}{x} \geq 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$2 - x + \frac{3}{2-x} = 2 - x + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2-x} \geq \frac{4}{\sqrt{2-x}}$$

$$x + \frac{3}{x} = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

Suy ra $VT(1) \geq 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) \geq \frac{4}{\sqrt[4]{x(2-x)}} \geq \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{x+2-x}{2}\right)}} = 4$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Thử lại thấy thỏa mãn điều kiện.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

2) Điều kiện: $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{5x-1}=\frac{\sqrt{9(5x-1)}}{3}\le\frac{9+5x-1}{6}=\frac{5x+8}{6}$$

$$\Rightarrow(26-x)\sqrt{5x-1}\le\frac{(26-x)(5x+8)}{6}$$

$$12\sqrt{(5x-1)(5-2x)}=4\sqrt{(5x-1)(45-18x)}$$

$$\le 2(5x-1+45-18x)=-26x+88$$

Ta chứng minh

$$(13x+14)\sqrt{5-2x}\le 94-27x\ \forall x\in\left[\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right]\quad(*)$$

$$\Leftrightarrow(13x+14)^2(5-2x)\le(94-27x)^2\ \forall x\in\left[\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 338x^3+612x^2-6504x+7856\ge 0\ \forall x\in\left[\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)^2(169x+982)\ge 0\ \forall x\in\left[\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right]$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên (*) được chứng minh.

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta suy ra

$$VT(1)\le\frac{(26-x)(5x+8)}{6}-26x+88+27x-94=\frac{-5x^2+128x+172}{6}$$

Nghĩa là

$$VP(1)=18x+32\le\frac{-5x^2+128x+172}{6}\Leftrightarrow\frac{5}{6}(x-2)^2\le 0\Leftrightarrow x=2$$

Do $x=2$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình (2) có nghiệm $x=2$.

**Ví dụ 48.** Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{2}{x+3}}+\sqrt{5x+3}=\frac{x^2+17x+22}{2\sqrt{2}(x+3)}.$$

***Lời giải***

Điều kiện: $x\ge-\frac{3}{5}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có

$$\sqrt{\frac{2}{x+3}}+\sqrt{5x+3}=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1}{x+3}}+\sqrt{5x+3}.1\le\sqrt{(2+5x+3)\left(\frac{1}{x+3}+1\right)}$$

$$=\sqrt{5(x+1).\frac{x+4}{x+3}}=5\sqrt{2}.\sqrt{\frac{x+4}{10}.\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\le\frac{5\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{x+4}{10}+\frac{x+1}{x+3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{x^2+17x+22}{x+3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{2(x+3)} = \sqrt{5x+3} \\ \dfrac{x+4}{10} = \dfrac{x+1}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

**Ví dụ 49.** Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$.

***Lời giải***

Điều kiện $x \ge 0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (1+\sqrt{x})\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\right) = 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{x+1}.\frac{x+1}{3x+1}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{3x+1}\right)$$

$$\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2x}{3x+1}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3x+1}\right)$$

Suy ra $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2} + 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{2}\right) \qquad (1)$

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{x+3}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x+3}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\frac{x}{x+1}.\frac{x+1}{x+3}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+3}\right)$$

Suy ra $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3}{2}\right) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} + 3\right) = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Ví dụ 50.** Giải bất phương trình: $(5x+9)\sqrt{3x+1} + 5\sqrt{1-x} \ge (6x+7)\sqrt{x+4}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \le x \le 1$

Đặt $a = \sqrt{3x+1}, b = \sqrt{1-x}, c = \sqrt{x+4}; a, b, c \ge 0$, ta có:

$$5x+9 = a^2 + 2c^2; 5 = b^2 + c^2; 6x+7 = 2a^2 + b^2 + c^2$$

Bất phương trình đã cho trở thành:

$$a(a^2 + 2c^2) + b(b^2 + c^2) \ge c(2a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - c^3 + 2ac^2 - 2ca^2 + bc^2 - cb^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - c^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 2ac^2 - 2ca^2 + bc^2 - cb^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[(a+b)^2 + c(a+b) + c^2] - 3ab(a+b-c) + 2ac(c-a-b) + bc(c-a-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac) \geq 0 \quad (*)$$

Do $a^2+b^2+c^2-ab-ac = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-c)^2 + \frac{1}{2}(b^2+c^2) > 0$

Nên (*) $\Leftrightarrow a+b \geq c \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-3x^2+2x+1} \geq 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 13x^2 - 12x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{12}{13}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{2x^2-3x-1} = 3x+5$ 2) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{5-2x}$

3) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+x-2} = 2\sqrt{x^2-3x+2}$

4) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4}$ 5) $x^2 + \sqrt{x+2} = 2$

6) $\sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

8) $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} + 3x$

9) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$

10) $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$

11) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{5x-4} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x+5}$

12) $\sqrt{2x^2+6x+1} + \sqrt{x^2-x+4} = \sqrt{x^2+15x+9}$

13) $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$

14) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = x\sqrt[3]{16}$.

**Bài 2.** Giải các bất phương trình sau

1) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$ 2) $\frac{2\sqrt{2(x^2-4)}}{\sqrt{2x-3}} + \sqrt{2x-3} > \frac{7-2x}{\sqrt{2x-3}}$

3) $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+3)}\le 2\sqrt{(x+1)^2}$

4) $\sqrt{2x+1}+x^2-x-1\le 0$

5) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$ 6) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-2x}{2\sqrt{2x^2-x+1}-1}<1$

7) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

8) $\sqrt{2x^2+12x+6}-\sqrt{2x-1}>x+2$

9) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$ 10) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{2x+1}-1$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau

1) $3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$

2) $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

4) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

5) $\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$

6) $2\sqrt{x+2}=x^3-4$

7) $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$

8) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

9) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$ 10) $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$

11) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

12) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

13) $2x^3-2x^2+x-6=(x-1)\sqrt{2x(x^2-x+2)}$

14) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{2x}=\sqrt{x^3+1}+x$

15) $\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-\sqrt[3]{x^3-5x+1}=2(x+1)$

16) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$.

**Bài 4.** Giải các bất phương trình sau

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\ge 2x^2-5x-1$

2) $\sqrt{4x+6}-\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}\ge x^2-2$

3) $8\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+1}}+3\ge 6\sqrt{2x-3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

4) $(4x+3)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})^2\le 16$.

**Bài 5.** Giải các phương trình sau

1) $3\sqrt{x^2+3x}-3x=x^2+2$

2) $3(x-2)^2(x+1)+2\sqrt{x^3-3x^2+3}-8=0$

3) $(x-2)^2(\sqrt{x^2-4x}+1)=10$ 4) $2\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{x-4}=5$

5) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$ 6) $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

7) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

8) $x^4+x^3+2x.\sqrt[3]{x(x^2-2)^2}+4=6x^2+2x+(x^2+x-2)\sqrt[3]{x^4-2x^2}$

9) $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}+12=4\sqrt{(x+2)(6-x)}$

10) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16$

11) $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$

12) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^2}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2=0$

13) $x.\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$ 14) $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

15) $5\sqrt{x^3+1}=2(x^2+2)$ 16) $x^2-3x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

17) $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

18) $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

19) $18x^2-13x+2=\sqrt{3(81x^4-108x^3+56x^2-12x+1)}$

20) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

**Bài 6.** Giải các phương trình sau

1) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

2) $\dfrac{3x+2}{2}\sqrt{4x^2-x-1}=3x^2+2x-2$

3) $\sqrt{2-\sqrt{2}(x+1)}+\sqrt[4]{2x}=1$ 4) $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$

5) $\sqrt[3]{x+1}-2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$

6) $4x^3-7x+\sqrt[3]{4x^3-3x+1}=\sqrt[3]{4x-2}-3$

7) $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$

8) $2\sqrt{x-2}-4\sqrt{x-3}=5x-4\sqrt{x^2-5x+6}-13$

9) $7x^2+5\sqrt{2}x+7=\sqrt{x^4+1}$

10) $15x^3+x^2-7x+7=4\sqrt{(x+1)(3x-1)^3}$ .

**Bài 7.** Giải các bất phương trình sau

1) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4$

2) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\geq 1$

3) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}\leq 181-14x$

4) $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-x}\leq 2$

5) $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $\sqrt{|2x+1|}\geq x^2+x$

7) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2\geq 2$

8) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^2}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2>0$

9) $\sqrt{2x^2+12x+6}-\sqrt{2x-1}>x+2$

10) $\sqrt{x-1}+x-3\geq\sqrt{(x-3)^2+2x-2}$

11) $\dfrac{5}{2}\sqrt{x^3+x+2}\leq x^2+3$

12) $x^3-4x^2-5x+6\leq\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$ .

**Bài 8.** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

2) $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$

3) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}$

4) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

5) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$

6) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

7) $\sqrt{2x+15}=32x^2+32x-20$

8) $3x^2-3x+2=2\sqrt{x^2+3x-3}$

9) $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$

10) $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

11) $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$

12) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

**Bài 9.** Giải các phương trình, bất phương trình sau

1) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$

2) $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$

3) $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{x-3}=6$

4) $\sqrt{3-2x}-2\sqrt[3]{x+2}-5=0$

5) $3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$

6) $\sqrt{2x^3-15x^2+42x-29}\le 2\sqrt{3}+\sqrt{7-x}$

7) $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$

8) $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

9) $x^3-6x^2+12x-7\ge\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

10) $\sqrt{x^2(2x+3)+3(x+1)^2}=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{6x+11}-x-1$

11) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

12) $2x^4+4x^3+3x^2+17x-24=2\sqrt{3-2x}$.

**Bài 10.** Giải các phương trình và bất phương trình sau

1) $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$

2) $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$

3) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

4) $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

5) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

6) $\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=2$

7) $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$

8) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

9) $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$

10) $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

11) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$

12)

$$\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}=\frac{1}{2}(36x-8x^2-21)$$

13) $\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\dfrac{(x+1)^2}{8}}$

14) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\ge 1$

15) $x^2+4x+5-\dfrac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$.

## Hướng dẫn giải

**Bài 1.**

1) Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5 \geq 0 \\ 2x^2-3x-1=(3x+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{3} \\ 7x^2+33x+26=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy $T=\{-1\}$.

2) Điều kiện: $1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$.

Phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=\sqrt{5-2x}+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3x-2=(\sqrt{5-2x}+\sqrt{x-1})^2$

$\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{(5-2x)(x-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ (2x-3)^2=(5-2x)(x-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 6x^2-19x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Vậy $T=\{2\}$.

3) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ |x| \geq 2 \end{array}\right.$

- $x=1$ là một nghiệm của phương trình
- $x \neq 1$, phương trình đã cho tương đương với

$x^2-1+2\sqrt{(x^2-1)(x^2+x-2)}+x^2+x-2=4(x^2-3x+2)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)}=2x^2-13x+11=(x-1)(2x-11)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-11) \geq 0 \\ 4(x-1)^2(x^2+3x+2)=(x-1)^2(2x-11)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-11) \geq 0 \\ 56x=113 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

4) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2=\left(2-\dfrac{x^2}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4-x^2+\dfrac{x^4}{16} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=2-x^2+\dfrac{x^4}{16}$

Đặt $t=x^2, t \geq 0$. Ta có: $2\sqrt{1-t}=2-t+\dfrac{t^2}{16}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ 4(1-t) = \left(2 - t + \dfrac{t^2}{16}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^4}{256} - \dfrac{t^3}{8} + \dfrac{5}{4}t^2 + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $T = \{0\}$.

5) Điều kiện: $x \ge -2$

*Cách 1:* Phương trình

$\Leftrightarrow x^2 - (x + 2) + x + \sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2}) + x + \sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+2})(x + 1 - \sqrt{x+2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = -x \\ x + 1 = \sqrt{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy $T = \left\{-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

*Cách 2:* Phương trình tương đương với

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = x + 2 - \sqrt{x+2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x+2} - \dfrac{1}{2} \\ -x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{x+2} - \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{x+2} \\ -x = \sqrt{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Vậy $T = \left\{-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

*Cách 3:* Phương trình tương đương với

$$2 - x^2 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 2 \\ x^4 - 4x^2 + 4 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le \sqrt{2} \\ x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le \sqrt{2} \\ (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $T = \left\{-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6) Điều kiện $x \ge -3$.

Khi đó phương trình đã cho viết lại:

$$\sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(\sqrt{x+7} - 3) - 2(\sqrt{x+7} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+3} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+7} = 3\\ \sqrt{x+3} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+7 = 9\\ x+3 = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = 1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình cho có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$ .

7) Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với: $x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2}$

Tức $x^2 - 3x + 2 + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$ hay $(x-1)(x-2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$,

phương trình này tương đương với $(x-1)(x-2+\sqrt{3x-2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x - 1 = 0\\ x - 2 + \sqrt{3x-2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ \sqrt{3x-2} = 2 - x \ (*)\end{array}\right.$$

Phương trình $(*)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2 - x \geq 0\\ 3x - 2 = (2-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 2\\ x^2 - 7x + 6 = 0\end{cases} \Rightarrow x = 1$

Vậy $x = 1$ là nghiệm phương trình đã cho.

8) Phương trình đã cho viết lại $2.\sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = x^2 + 6x - 1$, đặt điều kiện vế phải rồi bình phương 2 vế, rút gọn ta được phương trình: $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = 0$ (*).

* $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (*).

* $x \neq 0$ chia cả hai vế của phương trình (*) cho $x^2$, khi đó phương trình (*) viết lại

$$x^2 - 8x + 22 - \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \ (**).$$

Đặt $y = x + \frac{3}{x}$ phương trình $(**)$ trở thành $y^2 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 4$ Với

$y = 4$ tức $x + \frac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm $x = 1$

hoặc $x = 3$. (Thỏa mãn điều kiện ban đầu)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$ hoặc $x = 3$.

9) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x^2+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1) + \sqrt[3]{x+1}(1 - \sqrt[3]{x}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $T = \{1\}$.

10) Điều kiện: $x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} - 2x - \sqrt{(x+1)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(1 - \sqrt{x+1}) + 2x(\sqrt{x+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(2x - \sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 1 \\ 2x = \sqrt{x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.. \text{ Vậy } T = \{0;1\}.$$

11) Điều kiện: $x \geq \frac{5}{4}$

Phương trình tương đương với: $2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{x+5}$ (1)

Bình phương hai vế ta được phương trình

$$6x + 1 - 4\sqrt{x(2x+1)} = 6x + 1 - 2\sqrt{(5x-4)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = \sqrt{5x^2 + 21x - 20} \Leftrightarrow 4(2x^2 + x) = 5x^2 + 21x - 20$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 17x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = \frac{5}{3}.$$

Thử lại ta có $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

12) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ x \leq \dfrac{-15-3\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 15x + 9} - \sqrt{x^2 - x + 4}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 2x^2 + 14x + 13 - 2\sqrt{(x^2 + 15x + 9)(x^2 - x + 4)}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6 = \sqrt{(x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 51x + 36)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ 16x^2 + 48x + 36 = x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 51x + 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x^4 + 14x^3 - 18x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x(x-1)(x^2 + 15x - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{-15 + \sqrt{237}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$$T = \left\{0; 1; \frac{-15 + \sqrt{237}}{2}\right\}.$$

13) Điều kiện: $x \ge -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x+1}$$

Bình phương 2 vế ta được:

$$\frac{x^3+1}{x+3} = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{3} \\ x = 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy phương trình đã cho vô nghiệm .

14) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1})^3 = 16x^3 \Leftrightarrow 4x + 3\sqrt[3]{4x^2-1}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1}) = 16x^3$$

$$\Rightarrow 4x + 3x\sqrt[3]{16(4x^2-1)} = 16x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3\sqrt[3]{2(4x^2-1)} = 8x^2 - 2 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 54(4x^2-1) = 8(4x^2-1)^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 1 = 0 \\ 4x^2 - 1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}} \end{array}\right. .$$

Thử lại ta thấy các nghiệm thỏa phương trình .

Vậy $T = \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+2}{2}}\right\}$.

**Bài 2.**

1) Điều kiện: $x \ge -1$

* Với $x = 0$ ta thấy bất phương trình luôn đúng

* Với $x \ne 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x+1} \ne 0$. Ta có bất phương trình tương đương với:

$$\frac{x^2(1-\sqrt{x+1})^2}{(1+\sqrt{x+1})^2(1-\sqrt{x+1})^2} > x - 4 \Leftrightarrow (1-\sqrt{x+1})^2 > x - 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 3 \Leftrightarrow x < 8.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T = [-1;8)$.

2) Điều kiện: $x \ge 2$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{2(x^2-4)} + 2x - 3 > 7 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-4)} > 5 - 2x$

**TH1:** $\begin{cases} x \ge 2 \text{ (đk)} \\ 5 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$.

**TH2:** $\begin{cases} 5 - 2x \ge 0 \\ 2(x^2 - 4) > (5 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ 2x^2 - 20x + 33 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{10 - \sqrt{34}}{2} < x \le \dfrac{5}{2}$.

Lấy hợp hai trường hợp ta có nghiệm bất phương trình là: $x > \dfrac{10 - \sqrt{34}}{2}$.

3) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$ (*).

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 + 2\sqrt{(x+1)^2 x(x+3)} \le 4(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2(x^2+3x)} \le (x+1)(2x+1)$

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2(x^2+3x) \le (x+1)^2(2x+1)^2$ (do đk (*)).

$\Leftrightarrow (x+1)^2(8x-1) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \le \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$.

Kết hợp với (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \le -3 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$.

4) Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{2}$

*Cách 1:* Bất phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} \le -x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 1 \ge 0 \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x + 1 \le (x^2 - x - 1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x^4 - 2x^3 - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x^2(x^2 - 2x - 1) \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - 1 \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \le 1 - \sqrt{2} \vee x \ge 1 + \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy $T = \left[-\dfrac{1}{2}; 1 - \sqrt{2}\right] \cup \{0\}$.

*Cách 2:* Bất phương trình $\Leftrightarrow (x+1)^2 - (2x+1) + \sqrt{2x+1} - (x+1) \le 0$

$$\Leftrightarrow (x+1-\sqrt{2x+1})(x+1+\sqrt{2x+1})+\sqrt{2x+1}-(x+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1-\sqrt{2x+1})(x+\sqrt{2x+1})\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+\sqrt{2x-1})}{x+1+\sqrt{2x+1}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+\sqrt{2x+1}\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{2x+1}\le -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-2x-1\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\le 1-\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có: $T=\left[-\frac{1}{2};1-\sqrt{2}\right]\cup\{0\}$.

5) Điều kiện: $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-\frac{1}{x^4}}>\frac{4}{x^2}$

$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{x^6-1}>2 \Leftrightarrow \sqrt{x^6-1}>2-x^3$ (*) .

* Nếu $x>\sqrt[3]{2}\Rightarrow$ (*) đúng

* Nếu $1\le x\le\sqrt[3]{2}\Rightarrow (*)\Leftrightarrow x^6-1>4-4x^3+x^6\Leftrightarrow 4x^3>5\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{5}{4}}<x\le\sqrt[3]{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x>\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

6) Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2-x+1\ne \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $2\sqrt{2x^2-x+1}-1=\frac{8x^2-4x+3}{2\sqrt{2x^2-x+1}+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên bất phương trình tương đương với

$\sqrt{2x+1}-2x<2\sqrt{2x^2-x+1}-1$

$\Leftrightarrow 1-2x<2\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2x+1}$ (*)

Do $2\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2x+1}=\frac{8x^2-6x+3}{2\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2x+1}}>0$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1<8x^2-2x+5-4\sqrt{(2x+1)(2x^2-x+1)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2\sqrt{(2x+1)(2x^2-x+1)} < 2x^2+x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4(2x+1)(2x^2-x+1) \ge (2x^2+x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x^2(2x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \in \left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$.

7) Điều kiện: $x \ge 4$ hoặc $x \le 1$.

* *Trường hợp 1*: $x \ge 4$. Ta viết bất phương trình dưới dạng:

$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ hay

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) \ge 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) \ge 2\sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - \sqrt{x-4} \ge \sqrt{x-4} - \sqrt{x-3}$

Vì $x \ge 4$ nên vế trái dương còn vế phải âm, bất phương trình được nghiệm đúng. Vậy $x \ge 4$ .

* *Trường hợp 2*: $x \le 1$. Ta viết bất phương trình dưới dạng:

$\sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} \ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}) \ge 2\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}$ (*)

*Khả năng 1*: $x = 1$ thỏa bất phương trình (*), suy ra $x = 1$ là nghiệm.

*Khả năng 2*: $x < 1$ bất phương trình (*) tương đương với

$\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x} \ge \sqrt{4-x} - \sqrt{3-x}$.

Vế trái âm, vế phải dương, bất phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \ge 4$ hoặc $x = 1$.

8) Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Bất phương trình viết lại: $\sqrt{2(x+2)^2 + 2(2x-1)} > x + 2 + \sqrt{2x-1}$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x-1} \ge 0 \\ v = x+2 \end{cases}$ khi đó bất phương trình (*) trở thành

$$\sqrt{2u^2 + 2v^2} > u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ 2u^2 + 2v^2 > (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow u \ne v$$

Giả sử $u = v$ tức $\sqrt{2x-1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 5$.

Vậy để $u \neq v \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ và $x \neq 1, x \neq 5$.

9) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Bằng cách nhân lượng liên hợp ta được bất phương trình tương đương

$$\frac{6x-4}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} > \frac{2(6x-4)}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$\Leftrightarrow (3x-2)[\sqrt{9x^2+16} - 2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})] > 0$ (*)

Lại thực hiện phép nhân liên hợp bất phương trình (*) tương đương với:

$(3x-2)[9x^2+16-4(12-2x+4\sqrt{8-2x^2})] > 0$ tức

$(3x-2)(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2}) > 0$ hay

$(3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})(8+x+2\sqrt{8-2x^2}) > 0$

Vì $x \geq -2 \Rightarrow 8+x+2\sqrt{8-2x^2} > 0$ nên bất phương trình cuối cùng tương đương với

$$(3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2}) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2>0\\ x-2\sqrt{8-2x^2}>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2<0\\ x-2\sqrt{8-2x^2}<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Giải hệ bất phương trình trên ta được tập nghiệm bất phương trình là:

$S = \left[-2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; 2\right]$.

10) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}$ (1).

* Nếu $x = 0 \Rightarrow$ (1) đúng.

* Nếu $x > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+1 < \sqrt{2x+9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} < 7 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{45}{8}$

* Nếu $-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+1 > \sqrt{2x+9}$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: $T = \left[0; \frac{45}{8}\right)$.

**Bài 3.**

1) Điều kiện: $x \geq 2$.

Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của phương trình nên ta biến đổi:

$$\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}=\frac{(\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2})(\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}=\frac{-8(x-3)}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}.$$

Suy ra phương trình $\Leftrightarrow (x-3)(2-\frac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}})=0$ đến đây ta chỉ cần giải phương trình:

$$2-\frac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=3$ và $x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

2) Điều kiện: $x\ge\frac{5}{3}$.

Phương trình cho $\Leftrightarrow \sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=3$ (thỏa điều kiện).

Biểu thức trong ngoặc luôn dương với $x>\frac{5}{3}$.

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3) Điều kiện: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-4+1-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$$

Vì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0\ \forall x\in\left(-\frac{1}{3};6\right)$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

4) Điều kiện: $0<x\le 1$.

Ta thấy phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ nên ta phân tích ra thừa số $(2x - 1)$.

Phương trình $\Leftrightarrow (1 + x^2)\sqrt{1-x} = (2x + x^2)\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x^2(\sqrt{1-x} - \sqrt{x}) + (\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} + \frac{1 - x - 4x^3}{\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} + \frac{(1-2x)(2x^2 + x + 1)}{\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} + \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

(Do $\frac{x^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} + \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{x}} > 0$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

5) Ta thấy nếu $2x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 2x + 2$ (*) thì hai vế của phương trình bằng nhau nên ta phân tích ra thừa số $2x^2 - 2x - 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{2x + 2}) + (\sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{2x + 1}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(2x^2+1)(2x+2)} + \sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{2x^2(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x - 1)A = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

(do $x \geq -1$ nên $A = \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(2x^2+1)(2x+2)} + \sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{2x^2(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} > 0$).

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

6) Điều kiện: $x \geq -2$. Phương trình tương đương với

$$2(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 8 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2}\right) = 0$$

Do $x^2 + 2x + 4 - \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} \ge x^2 + 2x + 4 - \dfrac{2}{2} = x^2 + 2x + 3 > 0$

Nên ta có $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

7) Đặt $a = \sqrt{x^2 - 9x + 24}$; $b = \sqrt{6x^2 - 59x + 149} \Rightarrow a - b = 5 - x$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{5x^2 - 50x + 125}{a+b} = x - 5 \Leftrightarrow (x-5)(a + b - 5x + 25) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ a + b = 5x - 25 \quad (**) \end{array}\right.$$

Từ (*) và (**) $\Leftrightarrow a = 2x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ 3x^2 - 11x + 76 = 0 \end{cases}$ VN

Vậy $x = 5$ là nghiệm của phương trình đã cho.

8) Điều kiện: $x \ge -1$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} - 1 + \sqrt{x+1} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1} + \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3.$$

9) Phương trình tương đương với $(x+1)^3 - 8 = 3(\sqrt[3]{3x+5} - 2)$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)^2 + 2(x+1) + 4\right] = \frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(3x+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ [(x+2)^2 + 3][(\sqrt[3]{3x+5} + 1)^2 + 3] = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

10) Điều kiện: $17 - x^8 \ge 0$. Đặt $t = x^8$; $t \ge 0$. Ta có phương trình

$$\sqrt[4]{17-t} + \sqrt[3]{1-2t} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{17-t} - 2 + 1 - \sqrt[3]{2t-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{\sqrt[4]{(17-t)^3} + 2\sqrt[4]{(17-t)^2} + 4\sqrt[4]{17-t} + 8} + \frac{2(1-t)}{1 + \sqrt[3]{2t-1} + \sqrt[3]{(2t-1)^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Thỏa mãn điều kiện

11) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x - 1} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{1-x}$ (do $x = 1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2) = \frac{x^2 - 2x - 1}{1-x} - 4 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + 2x - 5)}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2} = \frac{x^2 + 2x - 5}{1-x}$$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x) = 0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1 \pm \sqrt{6}$

12) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{x^2 + 1}{x+1}$ (do $x = -1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2 = \frac{x^2 + 1}{x+1} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}+2} = \frac{x^2-2x-1}{x+1} \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ \sqrt{x^2-2x+3} = x-1 \text{ (VN)} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

13) Điều kiện: $x \geq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1} = \sqrt{2x^3-2x^2+4x}$

(Do $x = 1$ không là nghiệm PT)

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1} - (x+2) = \sqrt{2x^3-2x^2+4x} - (x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-3x^2-4}{x-1} = \frac{2x^3-3x^2-4}{\sqrt{2x^3-2x^2+4x}+x+2}$$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x=2$

14) Điều kiện: $x \geq 0$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt[3]{2x-1} - x = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{2x} \Leftrightarrow \frac{-x^3+2x-1}{x^2+x\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2}} = \frac{x^3-2x+1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{2x}}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

15) Phương trình tương đương với

$$\sqrt[3]{12x^2+46x-15} - (2x+1) - (\sqrt[3]{x^3-5x+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x^3+40x-16}{A} - \frac{x^3-5x+2}{B} = 0 \qquad (*)$$

Trong đó:

$$A = \sqrt[3]{(12x^2+46x-15)^2} + (2x+1)\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + (2x+1)^2$$

$$= \left(\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + \frac{2x+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 > 0$$

$$B = \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-5x+1} + 1 = \left(\sqrt[3]{x^2-5x+1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Nên $(*) \Leftrightarrow x^3-5x+2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

16) Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2-1} - 2) + (x-3) + \sqrt{x^3-2} - 5$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} + (x-3) = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 1 + \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = \dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \geq \dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-1}+5} \geq \dfrac{x^2+3x+9}{\dfrac{x-1+x^2+x+1}{2}+5} = \dfrac{2(x^2+3x+9)}{x^2+2x+10} > 2$

$$1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} < 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2} + 4} < 1 + \frac{x+3}{x+4} < 2$$

Suy ra (*) vô nghiệm.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Bài 4.**

1) Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 \geq 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1} \geq (x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x - 1\right] \geq 0 \quad (*)$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq 1$; $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$; $2x + 1 \geq 5$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x - 1 < 0$

Nên $(*) \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $2 \leq x \leq 3$.

2) Điều kiện: $x \geq -\dfrac{3}{2}$

Bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{(x+2)^2 - (x^2-2)} - (x+2) - [\sqrt[3]{(x+2)^3 - (x^2-2)} - (x+2)] \geq x^2 - 2$$

Đặt $A = \sqrt{4x+6} + x + 2$

$B = \sqrt[3]{(x^3+7x^2+12x+6)^2} + (x+2)\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6} + (x+2)^2$

Ta có $A, B > 0$.

Khi đó bất phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2 - (x^2-2) - (x+2)^2}{A} + \frac{(x+2)^3 - (x^2-2) - (x+2)^3}{B} \geq x^2 - 2$$

$\Leftrightarrow (2-x^2)\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow 2-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2}$.

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$-\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2}$.

3) Điều kiện: $x\geq \dfrac{3}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 8\sqrt{2x-3}+3\sqrt{x+1}=6\sqrt{(2x-3)(x+1)}+4$

$\Leftrightarrow 4(2\sqrt{2x-3}-1)+3\sqrt{x+1}(1-2\sqrt{2x-3})\geq 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2x-3}-1)(4-3\sqrt{x+1})\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(8x-13)(7-9x)}{(2\sqrt{2x-3}+1)(4+3\sqrt{x+1})}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{9}\leq x\leq \dfrac{13}{8}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là: $\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{13}{8}$.

4) Điều kiện: $x\geq 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow (4x+3)16\leq 16(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})^2$

$\Leftrightarrow 4x+3\leq 2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3} \Leftrightarrow 2x+1\leq 2\sqrt{x^2+2x-3}$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2\leq 4(x^2+2x-3) \Leftrightarrow x\geq \dfrac{13}{4}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho: $x\geq \dfrac{13}{4}$.

**Bài 5.**

1) Phương trình $\Leftrightarrow x^2+3x-3\sqrt{x^2+3x}+2=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x},\ t\geq 0$.

Phương trình trở thành: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1, t=2$

- $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=1 \Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.
- $t=2 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1, x=-4$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow 3(x^3-3x^2+3)+2\sqrt{x^3-3x^2+3}-5=0$

Đặt $t=\sqrt{x^3-3x^2+3},\ t\geq 0$, ta có phương trình:

$3t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow t=1, t=-\dfrac{5}{3}$ (loại)

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-3x^2+3}=1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 2$.

3) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x}, t \geq 0$. Suy ra $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 = t^2 + 4$

Ta có phương trình $(t^2 + 4)(t + 1) = 10 \Leftrightarrow t^3 + t^2 + 4t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$.

4) Đặt $t = \sqrt[3]{x - 4} \Rightarrow x = t^3 + 4$. Thay vào phương trình ta có:

$2\sqrt{2t^3 + 7} - t = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2t^3 + 7} = t + 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -5 \\ 8t^3 + 28 = t^2 + 10t + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -5 \\ 8t^3 - t^2 - 10t + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -5 \\ (t-1)(8t^2 + 7t - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-7 \pm \sqrt{145}}{16} \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow x = 5$

Với $t = \dfrac{-7 \pm \sqrt{145}}{16} \Rightarrow x = \left(\dfrac{-7 \pm \sqrt{145}}{16}\right)^3 + 4$.

5) Điều kiện: $x \geq 0$

- $x = 0$ không là nghiệm của phương trình
- $x > 0$, chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} = 3$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}, t \geq 2$.

Suy ra $t^2 = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \dfrac{1}{x} + 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = t^2 - 2$

Thay vào phương trình ta có được:

$$t + \sqrt{t^2 - 6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 6 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{25}{4} - 2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = \frac{1}{4}.$$

6) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $x$ ta được:

$$x-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-2=0$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$, ta có được phương trình:

$$t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Vậy $T=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

7) Ta thấy $x<0$ không thỏa mãn.
Khi đó phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x>0 \\ 4-\left(x+\frac{1}{x}\right)>0 \\ \left(\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)^2=\left(4-\left(x+\frac{1}{1}\right)\right)^2 \end{cases}.$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=y$, ta được $\begin{cases} 2\le y<4(1) \\ 4-(y^2-2)+2\sqrt{5-2(y^2-2)}=(4-y)^2(2) \end{cases}$.

Xét (2) $\Leftrightarrow \sqrt{9-2y^2}=y^2-4y+5 \Leftrightarrow y^4-8y^3+28y^2-40y+16=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^3-6y^2+16y-8)=0$

$\Leftrightarrow (y-2)((y-2)(y^2-4y+8)+8)=0$

Dẫn đến $y=2$ (do $((y-2)(y^2-4y+8)+8)>0$ với mọi $y$ thỏa mãn (1)).
Từ đó phương trình có nghiệm là $x=1$.

8) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình
Với $x\ne 0$, chia hai vế phương trình cho $x^2$ ta có được

$$x^2+x+2\sqrt[3]{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}+\frac{4}{x^2}=6+\frac{2}{x}+\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\sqrt[3]{x-\frac{2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2-\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\sqrt[3]{x-\frac{2}{x}}+\left(x-\frac{2}{x}\right)+2\sqrt[3]{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}-2=0$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$, ta có phương trình

$$t^6-(t^3+1)t+t^3+2t^2-4=0 \Leftrightarrow t^6-t^4+t^3+2t^2-t-2=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2-1)(t^4+t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t^4+t+2=0 \end{array}\right.$$

• $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x - \frac{2}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$

• $t = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x - \frac{2}{x}} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2$

• $t^4 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy $T = \{\pm 1; \pm 2\}$.

9) Điều kiện: $-2 \le x \le 6$

Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{6-x}, t > 0$, suy ra $t^2 = 8 + 2\sqrt{(x+2)(6-x)}$ (*)

Ta có phương trình: $t + 12 = 2(t^2 - 8) \Leftrightarrow 2t^2 - t - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\frac{7}{2} \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $t = 4$, thay vào (*) ta có:

$16 = 8 + 2\sqrt{-x^2 + 4x + 12} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 4x + 12} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $T = \{2\}$.

10) Điều kiện: $x \ge -1$.

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1},\ t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 3x + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + 4$ (*)

Phương trình trở thành: $t = t^2 - 20 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5$

Thay $t = 5$ vào (*) ta được:

$21 - 3x = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ 441 - 126x + 9x^2 = 8x^2 + 20x + 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

11) Điều kiện: $x \in [-2; 2]$

Đặt $t = 3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} \Rightarrow 9(10 - 3x - 4\sqrt{4 - x^2})$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = 9$.

Với $t = 0$: $3\sqrt{2+x} = 6\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 2 + x = 4(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$.

Với $t = 9$: $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} = 9$ (điều kiện: $-2 \le x \le 2$)

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} = 3 + 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2 + x = 9 + 12\sqrt{2-x} + 4(2-x)$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{2-x} = 5x - 15$ (vô nghiệm).

Vậy $T = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

12) Điều kiện: $-1 < x < 1$.

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^2} + 1$.

Phương trình đã cho trở thành: $2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2; t = -\dfrac{1}{2}$.

* $t = -2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

* $t = -2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

13) Đặt $t = x + \sqrt[3]{35-x}$

$\Leftrightarrow t^3 = 35 + 3x\sqrt[3]{35-x^3}(x + \sqrt[3]{35-x^3}) \Rightarrow x\sqrt[3]{35-x^3} = \dfrac{t^3-35}{3t}$ (*)

Phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{t^3-35}{3t}.t = 30 \Leftrightarrow t = 5$ thay vào (*) ta có:

$x\sqrt[3]{35-x^3} = 6 \Leftrightarrow x^3(35-x^3) = 216 \Leftrightarrow x^6 - 35x^3 + 216 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

14) Điều kiện : $-1 \le x \le 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow (x + \sqrt{1-x^2})(1 - x\sqrt{1-x^2}) = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \dfrac{t^2-1}{2} = x\sqrt{1-x^2}$ . Ta có phương trình:

$$t(1 - \frac{t^2-1}{2}) = \sqrt{2}\,\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \pm 1 \end{array}\right.$$

* $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} - x = \sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-x)^2 = 1 - x^2$ (do $|x| \le 1$) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

* $t = -\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -1 - \sqrt{2}$ vô nghiệm, do $VT \ge -1 > VP$

* $t = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 - \sqrt{2} \\ x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15) Điều kiện: $x \ge -1$.

Phương trình $\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 2(x^2 - x + 1) + 2(x + 1)$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x+1}{x^2 - x + 1} - 5\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - x + 1}} + 2 = 0$ (Do $x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x$).

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - x + 1}}$, $t \ge 0$, ta có: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

* $t = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2 - x + 1} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$ phương trình vô nghiệm.

* $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

16) Ta có

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, với mọi x.

Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$ nên chia hai vế của phương trình cho $x^2 + x + 1$ ta được:

$$2\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$, $t > 0$, ta được:

$2t^2 - 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}t = 0 \Leftrightarrow 6t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$, ta được $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (loại $t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$

17) Điều kiện: $x \ge -2$.

Phương trình $\Leftrightarrow x^3 - 3x(x+2) + 2\sqrt{(x+2)^3} = 0$.

Đặt $a = \sqrt{x+2}, a \ge 0$ ta có phương trình

$x^3 - 3xa^2 + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow x = a, x = -2a$

• $x = a \Leftrightarrow x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

• $2a=-x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2-4x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2-2\sqrt{3}$.

Vậy $T=\{2;2-2\sqrt{3}\}$.

18) Điều kiện: $x \ge 2$.

Đặt $a=\sqrt{x-2}; b=\sqrt{x^2-x+1}; a,b \ge 0$.

Ta có: $x^2-6x+11=(x^2-x+1)-5(x-2)=b^2-5a^2$

$x^2-4x+7=x^2-x+1-3(x-2)=b^2-3a^2$

Nên phương trình đã cho trở thành:

$(b^2-5a^2)b=2(b^2-3a^2)a$

$\Leftrightarrow 6a^3-5a^2b-2ab^2+b^3=0 \Leftrightarrow 6t^3-5t^2-2t+1=0 \qquad (t=\dfrac{a}{b}>0)$

$\Leftrightarrow t=1, t=\dfrac{1}{3}, t=-\dfrac{1}{2}$. Ta loại nghiệm $t=-\dfrac{1}{2}$

* $t=1 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ phương trình vô nghiệm.

* $t=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow b=3a \Leftrightarrow x^2-10x+19=0 \Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=5\pm\sqrt{6}$.

19) Đặt $a=(3x-1)^2$

Ta có: $18x^2-13x+2=2(2x-1)^2-x=2a-x$

$81x^4-108x^3+56x^2-12x+1=(3x-1)^4+2x^2=a^2+2x^2$

Phương tình đã cho trở thành:

$$2a-x=\sqrt{3(a^2+2x^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{x}{2} \\ a^2-4ax-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{x}{2} \\ a=-x; a=5x \end{cases}$$

* $a=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \ge \dfrac{x}{2} \\ 9x^2-5x+1=0 \end{cases}$ vô nghiệm.

* $a=5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \ge \dfrac{x}{2} \\ 9x^2-11x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{11\pm\sqrt{85}}{18}$.

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\dfrac{11\pm\sqrt{85}}{18}$.

20) Điều kiện: $x \ge 5$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=x^2+24x+5+10\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x - 20)} = 5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x+4} - 5\sqrt{\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x+4}} + 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x+4}}$, $t \geq 0$, ta có phương trình:

$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

* $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2} > 5 \text{ (nhận)} \\ x = \dfrac{5 - \sqrt{61}}{2} < 5 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

* $t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \text{ (nhận)} \\ x = -\dfrac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2}; x = 8$.

**Bài 6.**

1) Điều kiện: $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - 2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 4x = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 1}, t \geq 0$ ta có phương trình:

$t^2 + 2(x-1)t - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2x \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 2$, ta có phương trình:

$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}$. Thỏa mãn điều kiện

Với $t = -2x$, ta có phương trình:

$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$ VN. Vậy $T = \left\{-1 \pm \sqrt{6}\right\}$.

2) Điều kiện: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1 - \sqrt{17}}{8}\right] \cup \left[\dfrac{1 + \sqrt{17}}{8}; +\infty\right)$

Phương trình đã cho tương đương với

$4x^2 - x - 1 - (3x+2)\sqrt{4x^2 - x - 1} + 2x^2 + 5x - 3 = 0$

Đặt $t = \sqrt{4x^2 - x - 1}, t \geq 0$. Ta có phương trình:

$$t^2-(3x+2)t+2x^2+5x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2x-1\\t=x+3\end{array}\right.$$

Với $t=2x-1$, ta có phương trình

$$\sqrt{4x^2-x-1}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\4x^2-x-1=(2x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\3x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Với $t=x+3$, ta có phương trình

$$\sqrt{4x^2-x-1}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-3\\4x^2-x-1=(x+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-3\\3x^2-7x-10=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{10}{3}\\x=-1\end{array}\right.\qquad \text{Vậy } T=\left\{-1;\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right\}.$$

3) Điều kiện: $0\le x\le\sqrt{2}-1$

Đặt $t=\sqrt[4]{2x},\ 0\le t\le\sqrt[4]{2-\sqrt{2}}$ và $x=\dfrac{t^4}{2}$

Ta có phương trình:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t^4}=1-t\Leftrightarrow t^4+\sqrt{2}t^2-2\sqrt{2}t+2-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4+2\sqrt{2}t^2+2-\sqrt{2}(t^2+2t+1)=0\Leftrightarrow(t^2+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(t+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+\sqrt[4]{2}t+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}=0\\t^2-\sqrt[4]{2}t+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt{4\sqrt[4]{2}-3\sqrt{2}}}{2}$$

Từ đó ta tìm được $x=\dfrac{(\sqrt[4]{2}-\sqrt{4\sqrt[4]{2}-3\sqrt{2}})^4}{64}$.

4) Điều kiện: $x\ge-1$.

Đặt $\sqrt{x+1}=t(t\ge0)$ ta có phương trình

$$t^2=(2(t^2-1)+1)\sqrt{t+2}\Leftrightarrow t^2=(2t^2-1)\sqrt{t+2}\Leftrightarrow\begin{cases}2t^2-1\ge0\\t^4=(2t^2-1)^2(t+2)\quad(*)\end{cases}$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow 4t^5+7t^4-4t^3-8t^2+t+2=0$

$$\Leftrightarrow(t+1)(t^2+t-1)(4t^2-t-2)=0$$

$$\Leftrightarrow t\in\left\{-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right\}$$

Do $2t^2-1\ge0$ nên ta chọn $t=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$. Từ đó có

$$x=t^2-1=\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2-1.$$

5) Điều kiện: $x \le -1 \vee x \ge 1$

• $x \ge 1$ chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{x+1}$ ta có được

$$1 - 2.\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow 2.\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 64(x-1) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{65}{63}.$$

• $x \le -1$ chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{x-1}$ ta có được

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 2 = -\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = x + 1$ phương trình vô nghiệm.

Vậy $T = \left\{\frac{65}{63}\right\}$.

6) Đặt $\sqrt[3]{4x^3 - 3x + 1} = a, \sqrt[3]{4x - 2} = b \Rightarrow a^3 - b^3 = 4x^3 - 7x + 3$

Do đó ta có phương trình $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow a = b$

Suy ra: $4x^3 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\}$.

7) Phương trình tương đương với

$$(x^2 + 2x + 2) - 5\sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} + 6(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} - 5\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 6 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 = 0\ (vn_0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Vậy $T = \left\{\frac{5 - \sqrt{7}}{3}; \frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right\}$.

8) Điều kiện: $x \ge 3$

Đặt $t = \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-3} \Rightarrow t^2 = 5x - 4\sqrt{x^2 - 5x + 6} - 14$

Nên ta có phương trình: $2t = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Hay $\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 + 2\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow x - 2 = 4x - 11 + 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 9 - 3x = 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 3$.

9) Phương trình tương đương với

$$(x^2-\sqrt{2}x+1)+6(x^2+\sqrt{2}x+1)=5\sqrt{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-5\sqrt{\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}}+6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-5\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{6}. \text{ Vậy } T=\left\{\frac{-5\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{6}\right\}.$$

10) Điều kiện: $x \le -1 \vee x \ge \frac{1}{3}$.

Ta thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình

- Với $x<-1$, ta có: $15x^3+x^2-7x+7=(x+1)(15x^2-14x+7)<0$

Do đó phương trình vô nghiệm

- Với $x \ge \frac{1}{3}$, phương trình đã cho tương đương với

$$4(x+1)+15x^3+x^2-11x+3=4(3x-1)\sqrt{(x+1)(3x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)-4(3x-1)\sqrt{(x+1)(3x-1)}+(3x-1)(5x^2+2x-3)=0$$

Vì $x=\frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $3x-1$ ta có được:

$$4\frac{x+1}{3x-1}-4(3x-1)\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}+5x^2+2x-3=0$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}$, ta có: $4t^2-4(3x-1)t+5x^2+2x-3=0$

$$\Delta'=4(3x-1)^2-4(5x^2+2x-3)=16x^2-32x+16=(4x-4)^2$$

Nên phương trình có hai nghiệm:

$$t=\frac{2(3x-1)+4x-4}{4}=\frac{5x-3}{2},\ t=\frac{x+1}{2}$$

+) Với $t=\frac{5x-3}{2}$, ta có phương trình

$$\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}=\frac{5x-3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{5} \\ 4(x+1)=(3x-1)(5x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{5} \\ 75x^3-115x^2+53x-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

+) $t = \dfrac{x+1}{2}$, ta có phương trình

$$\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}} = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 4(x+1) = (x+1)^2(3x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 3x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $T = \{-1;1\}$.

**Bài 7.**

1) **Điều kiện:** $x > 0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}) < 2(x + \dfrac{1}{4x}) + 4$.

Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(t \ge \sqrt{2}) \Rightarrow x + \dfrac{1}{4x} = t^2 - 1$

Bất phương trình trở thành:

$$5t < 2(t^2-1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 > 0 \Leftrightarrow t > 2 \quad (\text{do } t \ge \sqrt{2})$$

$$t > 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{4x} > 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x > \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $T = \left(0; \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

2) **Điều kiện:** $\begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 - 2x + 2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$.

Ta có: $1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - \sqrt{2\left[(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}\right]} \le 1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}} < 0$

Nên bất phương trình tương đương với

$x - \sqrt{x} \le 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 1 + \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \le 0$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được: $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \sqrt{2\left(x + \dfrac{1}{x} - 1\right)} \le 0$.

Đặt $t = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \dfrac{1}{x} - 2$, nên ta có bất phương trình

$$t - 1 + \sqrt{2(t^2+1)} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(t^2+1)} \le 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 1 \\ 2(t^2+1) \le 1-2t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 1 \\ t^2+2t+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $T = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3) Điều kiện: $x \ge \frac{6}{7}$.

Đặt $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$, $(t \ge 0) \Rightarrow 14x + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = t^2 - 1$

Bất phương trình đã cho trở thành:

$\Leftrightarrow t^2 + t - 182 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 13 \Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \le 13$ (*)

Vì hàm số $f(x) = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$ là hàm đồng biến và $f(6) = 13$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x \le 6$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của bpt là: $T = \left[\frac{6}{7};6\right]$.

4) Điều kiện: $x \ge 1$.

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}, x \ge 1 \Rightarrow t \ge 1$.

Khi đó: $t^2 = x + x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - x} = \frac{t^2+1}{2}$

Phương trình cho viết lại:

$$\begin{cases} t + \frac{t^2+1}{2} \le 2 \\ t \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t-3 \le 0 \\ t \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le t \le 1 \\ t \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$ tức $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x + x - 1 + 2\sqrt{x^2-x} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ x^2 - x = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ thoả mãn $x \ge 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm phương trình đã cho.

5) Điều kiện: $|x| < 1$.

Bất phương trình đã cho viết lại: $\frac{1}{1-x^2} - 1 + 2 > \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ tương đương

với:

$$\frac{x^2}{1-x^2} - 3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0 \ (*)$$

Đặt $t = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ khi đó bất phương trình (*) trở thành $t^2 - 3t + 2 > 0$, giải bất phương trình này ta được $t < 1$ hoặc $t > 2$.

* Với $t < 1$ tức $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ \begin{cases} 0 \le x < 1 \\ 1 - x^2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ 0 \le x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

* Với $t > 2$ tức $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 2 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 > 4(1-x^2) \end{cases}$ hay $\dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T = \left(-1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

6) Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{|2x+1|} \ge 4x^2 + 4x = (2x+1)^2 - 1$

Đặt $t = \sqrt{|2x+1|}$, $t \ge 0$. Ta có: $4t \ge t^4 - 1 \Leftrightarrow t^4 - 4t - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + 1 - 2(t^2 - 2t + 1) \le 0 \Leftrightarrow (t^2-1)^2 - (\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (t^2 + \sqrt{2}t - 1 - \sqrt{2})(t^2 - \sqrt{2}t + \sqrt{2} - 1) \le 0 \Leftrightarrow t^2 + \sqrt{2}t - 1 - \sqrt{2} \le 0$

$\Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow |2x+1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$.

7) Bất phương trình $\Leftrightarrow (x^2 - 4x)\sqrt{-x^2 + 4x} + x^2 - 4x + 2 \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 4x}$, $t \ge 0$.

Ta có: $-t^3 - t^2 + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 2) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x \ge 0 \\ -x^2 + 4x - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{3} \le x \le 4 \\ 0 \le x \le 2 - \sqrt{3} \end{array}\right..$$

8) Điều kiện: $-1 < x < 1$; $x \ne 0$

Đặt:

$$t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |t| \ge 2 \Rightarrow t^2 = \frac{1-x^2}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + 2 = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + 1$$

Ta có: $t^2 - 1 + \dfrac{5}{2}t + 2 \le 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 \le 0 \Leftrightarrow t = -2$ (Do $|t| \ge 2$)

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của bpt đã cho.

9) Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

Bất phương trình viết lại: $\sqrt{2(x+2)^2 + 2(2x-1)} > x + 2 + \sqrt{2x-1}$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x-1} \ge 0 \\ v = x + 2 \end{cases}$ khi đó bất phương trình (*) trở thành

$$\sqrt{2u^2 + 2v^2} > u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ 2u^2 + 2v^2 > (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow u \ne v$$

Giả sử $u = v$ tức

$$\sqrt{2x-1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 5.$$

Vậy để $u \ne v \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và $x \ne 1, x \ne 5$.

10) Điều kiện: $x \ge 1$ Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x-1}, u \ge 0 \\ v = x - 3 \end{cases}$.

Khi đó bất phương trình cho tương đương với: $\begin{cases} u + v \ge \sqrt{v^2 + 2u^2} \\ u \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 \ge v^2 + 2u^2 \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2uv \ge u^2 \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u \le 2v \end{array}\right.$$

Với $u = 0$ tức $\sqrt{x-1} = 0$ vì thế $x = 1$

Với $u \le 2v$ tức $\sqrt{x-1} \le 2(x-3)$, bất phương trình này tương đương:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ x - 1 \le 4(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 3 \\ 4x^2 - 25x + 37 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $T = [3; +\infty) \cup \{1\}$.

11) Điều kiện: $x^3 + x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 2)} \le 2(x+1) + 2(x^2 - x + 2)$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 2}} \le 2\frac{x+1}{x^2 - x + 2} + 2$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 2}}, t > 0$

Ta có: $5t \le 2t^2 + 2 \Leftrightarrow t \ge 2 \lor t \le \frac{1}{2}$.

- $t \ge 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2 - x + 2} \ge 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 7 \le 0$ (vô nghiệm)

- $t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2 - x + 2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ v $x \ge \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$-1 \le x \le \frac{5-\sqrt{33}}{2} \text{ và } x \ge \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$

12) Bất phương trình tương đương với

$$(x+1)^3 - 7x^2 - 8x + 5 \le \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 \le \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} + 7x^2 + 9x - 4$$

Đặt $a = x + 1$, $b = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$, bất phương trình trở thành:

$$a^3 + a \le b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) + a - b \le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) \le 0 \Leftrightarrow a \le b \ (\text{do } a^2 + ab + b^2 + 1 > 0)$$

Suy ra $x + 1 \le \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 \le 0$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 - x + 1) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \le x \le 5 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 5\right].$$

**Bài 8.**

1) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x-2} \\ v = \sqrt{x+1} \end{cases}$, $v \ge 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ v^2 - u^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (3-u)^2 - u^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ u = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

2) Đặt $\begin{cases} v = \sqrt[3]{2x^8 - 1} \\ u = \sqrt[4]{17 - x^8} \end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases} u - v = 1 \\ 2u^4 + v^3 = 33 \end{cases}$.

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$. Từ đó ta tìm được: $x = \pm 1$.

3) Đặt $u = \sqrt[4]{1-x}$ , $v = \sqrt[4]{x}; u, v \in [0;1]$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} v^2 + u^2v + u^3 = u^2 + v^3 + v^2u \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2 + v^2 - u - v) = 0 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó, ta tìm được: $x = 0; x = 1; x = \dfrac{1}{2}$.

4) Điều kiện: $-5 < x < 5$

Đặt $u = \sqrt{5 - x}, v = \sqrt{5 + x}$ $(0 < u, v < \sqrt{10})$.

Khi đó ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ -\dfrac{4}{u} - \dfrac{4}{v} + 2(u + v) = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 = 10 + 2uv \\ (u + v)\left(1 - \dfrac{2}{uv}\right) = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Hay $\begin{cases} S^2 = 10 + 2P \\ S - \dfrac{2S}{P} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P = S^2 - 10 \\ \dfrac{2S}{P} = S - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Suy ra

$$4S = (S^2 - 10)\left(S - \dfrac{4}{3}\right) \Leftrightarrow (S - 4)(3S^2 + 8S - 10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 4 \\ 3S^2 + 8S - 10 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Vì $P > 0 \Rightarrow S > \dfrac{4}{3} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Với $S = 4$, ta có $P = 3$ nên $u, v$ là nghiệm của phương trình

$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3$. Từ đó ta tìm được: $x = 4, x = -4$.

5) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2 - x} \\ v = \sqrt[3]{x + 7} \end{cases}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 3P = 3 \\ S^3 - 3SP = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Từ đó, ta tìm được: $x = 1, x = -6$.

6) Điều kiện $x \ge -\dfrac{5}{4}$

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x + 5} \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 2\sqrt{4x + 5} + 11$$

Đặt $2y - 3 = \sqrt{4x + 5}$ ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x - 3)^2 = 4y + 5 \\ (2y - 3)^2 = 4x + 5 \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$$

Với $x = y \Rightarrow 2x - 3 = \sqrt{4x+5} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$

Với $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x \rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

Nghiệm của phương trình là $T = \{1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{3}\}$.

7) Điều kiện: $2x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-15}{2}$

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)+14} = 8(2x+1)^2 - 28 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+2}{2}+14} = (4x+2)^2 - 14$$

Đặt $u = 4x + 2; v = \sqrt{\frac{4x+2}{2} + 14} \geq 0$, ta có hệ: $\begin{cases} \frac{1}{2}v = u^2 - 14 \\ \frac{1}{2}u = v^2 - 14 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được:

$$u^2 - v^2 + \frac{1}{2}(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)\left(u + v + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = -\frac{1}{2} - v \end{array}\right.$$

- $u = v$ thay vào hệ ta có: $u^2 - \frac{1}{2}u - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4 \\ u = -\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $u = 4$, ta tìm được $x = \frac{1}{2}$.

- $u = -\frac{1}{2} - v$ thay vào hệ ta có:

$$v^2 + \frac{1}{2}v - \frac{55}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{221}}{4} \\ v = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{221}}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $v = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{221}}{4}$, ta tìm được $x = \frac{-9 - \sqrt{221}}{16}$.

8) Phương trình $\Leftrightarrow (2x-1)^2 - x^2 + x + 1 = 2\sqrt{2(2x-1) + x^2 - x - 1}$

Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ v = \sqrt{x^2 + 3x - 3} \end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases} u^2 - x^2 + x + 1 = 2v \\ v^2 - x^2 + x + 1 = 2u \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ theo vế ta được:

$$(u - v)(u + v) + 2(u - v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + 2 = 0 \end{array}\right.$$

+) $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, x = \dfrac{4}{3}$.

+) $u + v + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x - 3} = -2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2 + x + 4 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1; x = \dfrac{4}{3}$.

9) Phương trình $\Leftrightarrow (3x - 2)^3 - 46 = 27.\sqrt[3]{27(3x - 2) + 46}$

Đặt $\begin{cases} u = 3x - 2 \\ v = \sqrt[3]{81x - 8} \end{cases}$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 - 46 = 27v \\ v^3 - 46 = 27u \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được:

$$u^3 - v^3 = 27(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 27) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

Thay $u = v$ vào hệ ta tìm được:

$$u^3 - 27u - 46 = 0 \Leftrightarrow (u + 2)(u^2 - 2u - 23) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ u = 1 \pm 2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được: $x = 0, x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

10) Phương trình $\Leftrightarrow (2x - 3)^3 - x + 2 = \sqrt[3]{(2x - 3) + x - 2}$

Đặt $u = 2x - 3,\ v = \sqrt[3]{3x - 5}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 - x + 2 = v \\ v^3 - x + 2 = u \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có: $(u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v$

Hay $2x - 3 = \sqrt[3]{3x - 5} \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(8x^2 - 20x + 11) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Vậy $T = \left\{2; \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}\right\}$.

11) Đặt $a = \sqrt[3]{7x + 1}; b = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8};\ c = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 8 \end{cases}$

Mặt khác: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Rightarrow \text{hệ} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Giải các phương trình này ta được nghiệm của phương trình đã cho:

$x=\pm 1; x=0; x=9$.

12) Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $a=\sqrt{x-1}, b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}} (a \geq 0, b \geq 0)$ thì ta đưa về hệ phương trình sau: $\begin{cases} a^2+b \neq 5 \\ b^2-a=5 \end{cases} \to (a+b)(a-b+1)=0 \Rightarrow a-b+1=0 \Rightarrow a=b-1$

Vậy $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=5-x \Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

**Bài 9.**

1) Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 7x+2 \geq 0 \\ x+\sqrt{7x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{7} \\ \sqrt{7x+2} \geq -x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$ trên $D=[\dfrac{7-\sqrt{57}}{2};+\infty)$, ta có:

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}+\dfrac{1+\dfrac{7}{2\sqrt{7x+2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}}>0$ nên hàm số f(x) luôn đồng biến và liên tục trên D.

Mặt khác: $f(1)=4$ nên phương trình đã cho tương đương với

$f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $T=\{1\}$.

2) Điều kiện: $x \in D=\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$

Gọi $f(x)$ là vế trái của phương trình. Ta có $y=f(x)$ là hàm liên tục trên D và $f'(x)=\dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}+1>0 \ \forall x \in D$

Suy ra hàm $f$ đồng biến trên D

Mặt khác $f(1)=4$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3) Điều kiện: $x \geq 3$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x+1}+3\sqrt{x-3},\ x \geq 3$

Ta có $f$ là hàm liên tục trên $[3;+\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{3}{2\sqrt{x-3}} > 0,\ \forall x > 3$$

Nên hàm số $f$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Mặt khác $f(4) = 6$ nên phương trình đã cho tương đương với

$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

4) Điều kiện: $x \le \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3-2x} - 2\sqrt[3]{x+2} - 5$

Ta có $f$ là hàm liên tục trên $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$ và

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{2}{3.\sqrt[3]{(x+2)^2}} < 0,\ \forall x \in \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$$

Nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

Mặt khác $f(-3) = 0$ nên phương trình tương đương với

$f(x) = f(-3) \Leftrightarrow x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

5) Điều kiện: $\frac{1}{2} < x \le \frac{3}{2}$.

Ta có hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x$ là hàm liên tục trên $D = \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ và $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} - 2 < 0$, suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, đồng thời $f(1) = 6$ do đó bất phương trình

$\Leftrightarrow f(x) \le f(1) \Leftrightarrow x \ge 1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là: $1 \le x \le \frac{3}{2}$.

6) Điều kiện: $\begin{cases} 2x^3 - 15x^2 + 42x - 29 \ge 0 \\ 7 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 7.$

Khi đó, bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x^3 - 15x^2 + 42x - 29} - \sqrt{7-x} \le 2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) \le 2\sqrt{3} \quad (*)$$

Trong đó: $f(x) = \sqrt{2x^3 - 15x^2 + 42x - 29} - \sqrt{7-x}$ là hàm liên tục trên $D = [1;7]$ và $f'(x) = \frac{3(x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{2x^3 - 15x^2 + 42x - 29}} + \frac{1}{2\sqrt{7-x}} > 0$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên D.

Mà ta lại có: $f(4) = 2\sqrt{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow f(x) \le f(4) \Leftrightarrow x \le 4$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm bất phương trình là: $1 \le x \le 4$

7) Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{(3x-1)^3} + (3x-1) = 2x^3 + x^2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3x-1}) = f(x)$$

Trong đó $f(t) = 2t^3 + t^2, t \ge 0$. Ta có $f'(t) = 6t^2 + 2t > 0,\ \forall t > 0$

Do đó $f$ là hàm liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$

Nên $f(\sqrt{3x-1}) = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy $T = \left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

8) Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2 + 9x - 4 + \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} = (x+1)^3 + (x+1) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}) = f(x+1) \quad (*)$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t$ là hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $T = \left\{5; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

9) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x-1)^3}{2} + (x-1) \ge \frac{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}{2} + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$\Leftrightarrow f(x-1) \ge f(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}) \quad (*)$.

Trong đó $f(t) = \dfrac{t^3}{2} + t$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 1 > 0$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x - 1 \ge \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow (x-1)^3 \ge -x^3 + 9x^2 - 19x + 11$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T = [1;2] \cup [3;+\infty)$.

10) Điều kiện:

$$2x^3+6x^2+6x+3\ge 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^3+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x^3+6x^2+6x+3}+x+1=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{6x+11}$$

$$\Leftrightarrow x+1+\sqrt{2(x+1)^3+1}=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{2(3x+5)+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt[3]{3x+5})\quad (*)$$

Trong đó $f(t)=t+\sqrt{2t^3+1}$ có $f'(t)=1+\dfrac{3t^2}{\sqrt{2t^3+1}}>0,\ \forall t>-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{3x+5}\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow x=1, x=-2$

Kết hợp với điều kiện, ta có $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

11) Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3)=4\quad(*)$

- Nếu $\sqrt{2x-1}-3\le 0\Leftrightarrow x\le 5\Rightarrow VT(*)<0<4\Rightarrow(*)$ vô nghiệm.
- Nếu $x>5$, ta xét hàm số $f(x)=(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3)$ có:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)(\sqrt{2x-1}-3)+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0 \text{ (do } x>5\text{)}.$$

Nên f(x) là hàm đồng biến trên $(5;+\infty)$ và $f(7)=4$

Nên $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=7$.

12) Điều kiện: $x\le\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2+x)^2+(x^2+x)=4(3-2x)+2\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+x)=f(2\sqrt{3-2x})\quad(*)$$

Trong đó $f(t)=2t^2+t$ có $f'(t)=4t+1$.

Do $x^2+x\ge-\dfrac{1}{4},\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $\sqrt{3-2x}\ge 0$ nên ta xét hàm $f(t)$ với $t\ge-\dfrac{1}{4}$.

Khi đó $f(t)$ là hàm liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Do đó (*) tương đương với:

$$x^2+x=2\sqrt{3-2x}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge 0\\(x^2+x)^2=4(3-2x)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \ge 0 \\ x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \ge 0 \\ (x-1)(x+3)(x^2+4) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1, x = -3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 10.**

1) Ta có phương trình

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - 2x + 16} + x^2 - 2x + 16 + x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 16})^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 16} = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy $T = \{2\}$.

2) Điều kiện: $x \ge -1$. Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

3) Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

Với $x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 1} \ge 0 \\ \sqrt{4x - 1} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1} \ge 1.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

4) Điều kiện $0 \le x \le 2$

Đặt $t = (x-1)^2$, ta có $0 \le t \le 1$. Phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{1 + \sqrt{1-t}} + \sqrt{1 - \sqrt{1-t}} = 2t^2(2t-1)$.

Nhận thấy $t \ge \frac{1}{2}$.Bình phương hai vế và rút gọn ta được:

$1 + \sqrt{t} = 2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} = 2(2t-1)^2$

Vì $t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \ge 2 \ge 2(2t-1)^2$. Từ đây suy ra $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$

5) Điều kiện: $2 \le x \le 4$.

Áp dụng BĐT $a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, ta có:

$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le \sqrt{2(x - 2 + 4 - x)} = 2$.

Mặt khác $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2\\(x-3)^2+2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

6) Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$VT\ge 2\sqrt[4]{(2x^2+1-x)(2x^2+1+x)}=2\sqrt[4]{(2x^2+1)^2-x^2}$$
$$=2\sqrt[4]{4x^4+3x^2+1}\ge 2$$

Nên phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2-x+1}=\sqrt{2x^2+x+1}\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

7) Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $x^3-3x^2-8x+40=(x+3)(x^2-6x+9)+x+13$
$$=(x+3)(x-3)^2+x+13$$
$$\ge x+13=\frac{1}{4}\big((4x+4)+16+16+16\big)\ge 8\sqrt[4]{4x+4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

8) Điều kiện $x\ge 0$.

Ta có: $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2\le\left[(2\sqrt{2})^2+x+1\right]\left[\dfrac{1}{x+1}+\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9$

Dấu bằng $\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$.

Vậy $x=\dfrac{1}{7}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

9) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{15}}{6}\le x\le 0\\[2mm]\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{15}}{6}\end{array}\right.$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}\le\sqrt{2(2x^2-x+1+3x-3x^2)}=\sqrt{2(1+2x-x^2)}$

$=\sqrt{2[2-(1-x)^2]}\le 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Mặt khác: $x^2-3x+3=(x-1)^2+2\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

10) Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Biến đổi phương trình ta có: $x^2(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2 = 256$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2})^2$$
$$\le (13+27)(13-13x^2+3+3x^2) = 40(16-10x^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2(16-10x^2) \le \left(\dfrac{16}{2}\right)^2 = 64$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$.

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

11) Điều kiện: $x \ge 1 \cup x \le -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Kí hiệu phương trình đã cho là (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, 1, -x)^2$ và $(\sqrt{3x^2-1}, \sqrt{x^2-x}, \sqrt{x^2+1})$ ta có:

$VT(1) \le \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$ .Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

Do $x \ge 1 \cup x \le -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2 - x > 0$ .

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$VP(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2 - x + 2(x^2+2)\right] \ge \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)}$$
$$= \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$ và $x = \dfrac{4}{3}$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình (1) là $x = -1$.

12) Kí hiệu phương trình đã cho là (2).

Ta có:

$$VT(2) = \sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2} + \sqrt{(2x-\frac{5}{2})^2+(x-\frac{3}{2})^2} + \sqrt{x^2+(4x-6)^2}$$

$$\ge |3x+1| + \left|2x-\frac{5}{2}\right| + |x| .$$

Suy ra $VT(2) \ge \left|3x + 1 + 2x - \frac{5}{2} + x\right| = \left|6x - \frac{3}{2}\right| \ge 6x - \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$

Mặt khác: $VP(2) = \frac{1}{2}\left[12x - 3 - 2(4x^2 - 12x + 9)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[12x - 3 - 2(2x - 3)^2\right] \le \frac{1}{2}(12x - 3) = 6x - \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Từ đó ta có nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{3}{2}$.

13) Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có:

$$VT = 1.\sqrt{x - \frac{1}{2}} + 1.\frac{x+1}{4} \le \sqrt{2\left[x - \frac{1}{2} + \left(\frac{x+1}{4}\right)^2\right]} = \sqrt{2x - 1 + \frac{(x+1)^2}{8}} = VP$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 24 = 0$ PT vô nghiệm.

Vậy nghiệm của BPT đã cho là: $x \ge \frac{1}{2}$.

14) Ta có: $1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - \sqrt{2\left[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]} \le 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$

Nên bất phương trình tương đương với

$$x - \sqrt{x} \le 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 - x \ge \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \quad (*)$$

Do $a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ với mọi a,b và đẳng thức có khi $a = b$ nên ta có:

$$\sqrt{x} + (1 - x) \le \sqrt{2(x + (1 - x)^2)} = \sqrt{2(x^2 - x + 1)}.$$

Do vậy $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$,

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

15) Điều kiện: $x \le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x + 2)^2 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = (x - 1)\left(1 - \frac{2\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\right)$$

Hay $(x+2)^2 = (1-x)\left(\dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}} - 1\right) - \dfrac{(1-x)^2}{x^2+x+1}$

Đặt $y = \sqrt{1-x}, z = \sqrt{x^2+x+1}$ $(y \ge 0, z \ge 0)$, phương trình trở thành:

$$(x+2)^2 = y^2\left(\frac{2y}{z} - 1\right) - \frac{y^4}{z^2}$$

Dễ thấy $VT \ge 0$ và

$$VP = y^2\left(\frac{2y}{z} - 1\right) - \frac{y^4}{z^2} = y^2\left(-\frac{y^2}{z^2} + \frac{2y}{z} - 1\right) = -y^2\left(\frac{y}{z} - 1\right)^2 \le 0$$

Từ đó suy ra $VT \ge VP$ và phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ y\left(\dfrac{y}{z}-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y=0 \vee y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=-2 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

## Chuyên đề 2. Các hệ phương trình thường gặp

### I. Tóm tắt lí thuyết

**1. Hệ bậc nhất hai ẩn**

Là hệ có dạng: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (*) trong đó a, b, c, a', b', c' là các số thực cho trước và a, b, a', b' không đồng thời bằng không.

**Cách giải:** Để giải hệ phương trình ta có thể dùng phương pháp cộng đại số, phương pháp thế và phương pháp dùng định thức Crame.

Phương pháp định thức Crame.

Ta có các định thức: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

* Nếu $D \ne 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{D_x}{D}$; $y = \dfrac{D_y}{D}$.

* Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô số nghiệm: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{c-ax}{b} \ (b \ne 0) \end{cases}$.

* Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \ne 0 \\ D_y \ne 0 \end{array}\right. \end{cases}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

**2. Hệ đối xứng loại I**

**2.1. Định nghĩa**: Là hệ có dạng $\begin{cases} f(x;y)=a \\ g(x;y)=b \end{cases}$ (I) trong đó f(x;y), g(x;y) là các biểu thức đối xứng, tức là $f(x;y)=f(y;x)$, $g(x;y)=g(y;x)$.

**2.2. Cách giải**: Đặt $S=x+y$, $P=xy$.

Biểu diễn $f(x;y)$, $g(x;y)$ qua S và P ta có hệ: $\begin{cases} F(S;P)=0 \\ G(S;P)=0 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được S, P.

Khi đó x,y là nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$ (1).

**2.3. Một số biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P.**

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=S^3-3SP$$
$$x^2y+y^2x=xy(x+y)=SP$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$

**2.4. Chú ý**: * Nếu (x;y) là nghiệm của hệ (I) thì (y;x) cũng là nghiệm của hệ

* Hệ (I) có nghiệm khi (1) có nghiệm hay $S^2-4P\ge 0$.

**3. Hệ đối xứng loại II**

**3.1. Định nghĩa:** Là hệ có dạng $\begin{cases} f(x;y)=a \\ f(y;x)=a \end{cases}$ (II)

**3.2. Cách giải**: Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được:

$$f(x;y)-f(y;x)=0 \Leftrightarrow (x-y)g(x;y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ g(x;y)=0 \end{array}\right.$$

**3.3. Chú ý:**

- Nếu hệ (II) có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên hệ (II) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0$.
- $f(x;y)+f(y;x)=2a$ là một phương trình đối xứng.

**4. Hệ đẳng cấp.**

**4.1. Định nghĩa:**

* Biểu thức f(x;y) gọi là đẳng cấp bậc k nếu $f(mx;my)=m^k f(x;y)$.

**Ví dụ**: $f(x;y)=x^3-y^3+3x^2y$ là đẳng cấp bậc 3.

* Hệ: $\begin{cases} f(x;y)=a \\ g(x;y)=b \end{cases}$ trong đó f(x;y) và g(x;y) đẳng cấp bậc k gọi là hệ đẳng cấp.

**2. Cách giải:**

* Xét x = 0 thay vào hệ kiểm tra.

* Với $x \neq 0$ đặt $y = tx$ thay vào hệ ta có: $\begin{cases} f(x;tx) = a \\ g(x;tx) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^k f(1;t) = a \\ x^k g(1;t) = b \end{cases}$.

Chia hai vế của hai phương trình ta được: $f(1;t) = \frac{a}{b} g(1;t)$, giải phương trình này ta tìm được t thay vào hệ ta tìm được (x;y).

## II. Các ví dụ minh hoạ

### 1. Các ví dụ cơ bản

**Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3y^2 = 7 \\ 5\sqrt{x} - 4y^2 = 6 \end{cases}$.

**Lời giải**

1) Từ $x - 4y = 7 \Rightarrow x = 4y - 3$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$2(4y-3)^2 + 3y = 5 \Leftrightarrow 32y^2 - 45y + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{13}{32} \Rightarrow x = -\frac{11}{8} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(1;1),\ \left(-\frac{11}{8};\frac{13}{32}\right)\right\}$.

2) Hệ tương đương với

$$\begin{cases} 8\sqrt{x} + 12y^2 = 28 \\ 15\sqrt{x} - 12y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3y^2 = 7 \\ 23\sqrt{x} = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(4;1),\ (4;-1)\}$.

**Ví dụ 2.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 2 \\ 4x + my = 3m + 2 \end{cases}$

1) Giải và biện luận hệ đã cho

2) Tìm m để hệ đã cho nghiệm duy nhất (x; y) sao cho $P = 2x^2 + y^2$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

1) Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 3m+2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 4 & 3m+2 \end{vmatrix} = 3m^2 - 2m - 8 = (m-2)(3m+4)$$

- $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+1}{m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3m+4}{m+2} \end{cases}$$

- $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

+) Với $m = -2 \Rightarrow D_x \neq 0$ nên hệ đã cho vô nghiệm

+) Với $m = 2$, ta có hệ $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 4 - 2x \end{cases}$.

2) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 2$

Khi đó: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+1}{m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3m+4}{m+2} \end{cases}$ nên

$$P = 2\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2 + \left(\frac{3m+4}{m+2}\right)^2 = \frac{11m^2 + 28m + 18}{m^2 + 4m + 4}$$

Ta có $P' = \dfrac{4(4m+5)}{(m+2)^3} \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{4}$.

Do đó ta có: $\text{Min}\, P = \dfrac{1}{3}$ đạt được khi $m = -\dfrac{5}{4}$.

Vậy $m = -\dfrac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 3.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 19 \\ (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(8 + \sqrt[3]{xy}) = 2 \end{cases}$.

**Lời giải**

1) Đặt $S = x + y$, $P = xy$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 3 - S \\ S^2 - 2(3 - S) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 3 - S \\ S^2 + 2S - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases}.$$

+) $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $x = y = 1$.

+) $\begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases} \Rightarrow S^2 < 4P$ nên hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$.

2) Đặt $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt[3]{y}$, ta có hệ: $\begin{cases} a^3+b^3=19 \\ (a+b)(8+ab)=2 \end{cases}$.

Đặt $S=a+b;\ P=ab$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ S(8+P)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3-3(2-8S)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=2-8S \\ S^3+24S-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

Suy ra $a,b$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t_1=3;\ t_2=-2.$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=\{(-8;27),\ (27;-8)\}$.

**Ví dụ 4.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2=3x+2y \\ y^2=3y+2x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$.

**Lời giải**

1) Trừ vế với vế của hai phương trình trên ta được:

$$x^2-y^2=x-y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=1-y \end{array}\right.$$

- Với $x=y \Rightarrow x^2=3x \Leftrightarrow x=0, x=3$
- Với $x=1-y \Rightarrow y^2=3y+2(1-y) \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(0;0),\ (3;3),\ (-1;2),\ (2;-1)$.

2) Trừ hai phương trình của hệ ta có

$$x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$$

$\Leftrightarrow x=y$ (do $x^2+xy+y^2+2>0,\ \forall x,y$)

Thay vào hệ ta có được:

$$x^3+1=2x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

**Ví dụ 5.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=4 \\ -x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$.

**Lời giải**

1) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ $\Rightarrow x\neq 0$.

Đặt $y = tx$ thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x^2(1+2t+t^2)=4 \\ x^2(-1+t+2t^2)=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{t+1}{2t-1}=1 \Leftrightarrow t=2.$$

* $t = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ thay vào hệ: $9x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{3}$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = \left(\pm\frac{2}{3}; \pm\frac{4}{3}\right)$.

2) Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ.
Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$.

Hệ cho trở thành: $\begin{cases} 3x^2 + 5x(tx) - 4(tx)^2 = 38 \\ 5x^2 - 9x(tx) - 3(tx)^2 = 15 \end{cases}$ hệ này viết lại:

$$\begin{cases} x^2(3+5t-4t^2)=38 \\ x^2(5-9t-3t^2)=15 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2(3+5t-4t^2)=38 & (1) \\ \dfrac{3+5t-4t^2}{5-9t-3t^2}=\dfrac{38}{15} & (2) \end{cases}$$

Quy đồng mẫu số phương trình $(2)$ và rút gọn ta được:

$54t^2 + 417t - 145 = 0$, giải phương trình này ta được 2 nghiệm:

$t = -\frac{145}{18}$ hoặc $t = \frac{1}{3}$.

Với $t = \frac{1}{3}$ thế thì $x^2 = \frac{38}{3+5t-4t^2} = 9$ tức $x = -3$ hoặc $x = 3$.

Với $t = -\frac{145}{18}$ tương tự trên, trường hợp này không thỏa.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x;y) = (-3;-1), (3;1)$.

## 2. Các ví dụ phân loại

**Ví dụ 6.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2y^2 \\ x + y^3 = 2y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy - x + 2y = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 11 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2xy + 4y - 3 = 0 \\ 3y^2 - x^2 - 7xy - x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$

*Lời giải*

1) Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $x = 2y - y^3$ thay vào phương trình thứ nhất ta có

$(2y - y^3)^2 + y^3 = 2y^2 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 2)^2 + y^3 - 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2(y^4 - 4y^2 + y + 2) = 0 \Leftrightarrow y^2(y-1)(y^3 + y^2 - 3y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow y^2(y-1)(y+2)(y^2-y-1)=0 \Leftrightarrow y \in \left\{0, 1, -2, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(0;0), (1;1), (4;-2), \left(-1; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

2) Ta có $x^2 - 2y^2 - xy - x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 - (y+1)x - 2y^2 + 2y = 0$ (1)

Ta có $\Delta = (y+1)^2 - 4(-2y^2 + 2y) = 9y^2 - 6y + 1 = (3y-1)^2$

Nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y+1+3y-1}{2} = 2y \\ x = \dfrac{y+1-3y+1}{2} = -y+1 \end{array}\right.$.

- $x = 2y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4y^2 + 4y^2 + 3y^2 = 11 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 2.$$

- $x = -y + 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$(y-1)^2 + 2(-y+1)y + 3y^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = 1 \mp \sqrt{5}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(\pm 2; \pm 1), (1 \pm \sqrt{5}; \mp\sqrt{5})\right\}$.

3) Cộng hai phương trình của hệ ta được

$2x^2 + 2y^2 - 5xy - x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (5y+1)x + 2y^2 - y - 1 = 0$ (2).

Ta có $\Delta = (5y+1)^2 - 8(2y^2 - y - 1) = 9y^2 + 18y + 9 = (3y+3)^2$

Nên (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5y+1+3y+3}{4} = 2y+1 \\ x = \dfrac{5y+1-3y-3}{4} = \dfrac{y-1}{2} \end{array}\right.$.

- $x = 2y + 1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$3(2y+1)^2 - y^2 + 2(2y+1)y + 4y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 15y^2 + 18y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\dfrac{6}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$.

- $x = \dfrac{y-1}{2} \Leftrightarrow y = 2x + 1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$3x^2 - (2x+1)^2 + 2x(2x+1) + 4(2x+1) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(1;0), \left(-\dfrac{7}{5}; -\dfrac{6}{5}\right), (0;1), (-2;-3)\right\}$.

**Ví dụ 7.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = -1 \\ x^2y + y^2x + x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$.

***Lời giải***

1) Đặt $S = x + y, P = xy$ ta có hệ $\begin{cases} S^3 - 3PS - 3P = -1 \\ SP + S^2 - 2P = 4 \end{cases}$

• $S = -1$ thay vào hệ ta tìm được $P = -1 \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình

$t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

• $S \neq -1$ hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^3 + 1}{3S + 3} \\ \dfrac{S^4 + S}{3S + 3} + S^2 - \dfrac{2(S^3 + 1)}{3S + 3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^3}{3S + 3} \\ S^4 + S^3 + 3S^2 - 11S - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^3}{3S + 3} \\ (S - 2)(S + 1)(S^2 + 2S + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}.$$

Suy ra $x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) \in \left\{(1;1), \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

2) Đặt $S = x + y,\ P = xy$ ta có:

$$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3; \quad P = (S - 3)^2 \\ 2\sqrt{S + (S - 3)^2 + 1} = 14 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; \quad P = (S - 3)^2 \\ 4(S^2 + 8S + 10) = 196 - 28S + S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; \quad P = (S - 3)^2 \\ S^2 + 30S - 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases} \Rightarrow x = y = 3.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (3; 3)$.

**Chú ý:** Ý thứ 2 ta có thể giải theo cách sau

Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow x + y = 3 + \sqrt{xy} > 0 \Rightarrow x, y \geq 0$ (do $xy \geq 0$)

Vì $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 3 + \sqrt{xy} \leq 3 + \dfrac{x + y}{2} \Rightarrow x + y \leq 6$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 3$.

Mặt khác ta luôn có BĐT $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Áp dụng BĐT này với $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt{y+1}$ ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\le\sqrt{2(x+y+2)}\le 4.$$

Đẳng thức có khi $x=y=3$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;3)$.

**Ví dụ 8.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases}1+x^3y^3=19x^3\\ y+xy^2=-6x^2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{y^3-1}+\sqrt{x}=3\\ x^2+y^3=82\end{cases}$.

***Lời giải***

1) Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}+y^3=19\\ y\dfrac{1}{x^2}+y^2\dfrac{1}{x}=-6\end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$ ta có hệ: $\begin{cases}a^3+y^3=19\\ a^2y+y^2a=-6\end{cases}$

Đặt $S=a+y, P=ay$.

Khi đó: $\begin{cases}S(S^2-3P)=19\\ SP=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=1\\ P=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}a=-2\\ y=3\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};-2\right),\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$.

2) Đặt $u=\sqrt{x}$ và $v=\sqrt[4]{y^3-1}$. Khi đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=3\\ u^4+(v^4+1)=82\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ u^4+v^4=81\end{cases}\quad(*)$$

Đặt $S=u+v, P=uv$. Với điều kiện $S^2-4P\ge 0$ thì hệ $(*)$ viết lại:

$$\begin{cases}S=3\\ S^4-4S^2P+2S^2=81\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P^2-18P=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\ S=3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}P=18\\ S=3\end{cases}$$

+) $S=3, P=0$. u, v là nghiệm của phương trình $X^2-3X=0$ phương trình này có 2 nghiệm $X=0$ hoặc $X=3$.

Khi đó: $\begin{cases}u=0\\ v=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt[3]{82}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=3\\ v=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}$

+) $P=18, S=3$ không thỏa mãn vì $S^2-4P<0$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y)=(0;\sqrt[3]{82}),(9;1)$.

**Ví dụ 9.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases}\sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=8\\ \sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}=8\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x-1)(y^2+6)=y(x^2+1)\\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1)\end{cases}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x,y\ge 7$.

Trừ hai phương trình của hệ ta được: $\sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=\sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+9)(y-7)}=\sqrt{(y+9)(x-7)} \Leftrightarrow x=y$.

Thay vào hệ ta được: $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-7}=8$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+9}+\sqrt{x-7}=8\\ \sqrt{x+9}-\sqrt{x-7}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+9}=5\\ \sqrt{x-7}=3\end{cases} \Leftrightarrow x=16$.

Vậy hệ có nghiệm: $x=y=16$.

2) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}xy^2+6x-y^2-6=yx^2+y\\ yx^2+6y-x^2-6=xy^2+x\end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x+y-2xy+7=0\end{array}\right.$

- $x=y$ thay vào hệ ta được: $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=3\end{array}\right.$.
- $x+y-2xy+7=0$ (1)

Mặt khác, khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$x^2+y^2-5x-5y+12=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x+y-2xy+7=0\\ x^2+y^2-5x-5y+12=0\end{cases}$

Đặt $S+x+y, P=xy$ ta có hệ:

$$\begin{cases}S-2P+7=0\\ S^2-5S-2P+12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P=\dfrac{S+7}{2}\\ S^2-6S+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=1\\ P=4\end{cases} \vee \begin{cases}S=5\\ P=6\end{cases}$$

Với $\begin{cases}S=1\\ P=4\end{cases}$ ta thấy hệ vô nghiệm;

Với $\begin{cases}S=5\\ P=6\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(2;2),\ (3;3),\ (2;3),\ (3;2)$.

**Ví dụ 10.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} y(x+2y)^2 = 9 \\ 3x^3 + y^3 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + 2y = x + 2y^3 \\ x^2 = 2y^2 - 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{4}{\sqrt{y}} = \dfrac{2}{y} + \dfrac{8}{3} \end{cases}$.

***Lời giải***

1) Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Đặt $x = ty$, ta có hệ:

$$\begin{cases} y^3(t+2)^2 = 9 \\ y^3(3t^3+1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{(t+2)^2}{3t^3+1} = \frac{9}{4}$$

$\Leftrightarrow 4(t^2 + 4t + 4) = 9(3t^3 + 1) \Leftrightarrow 27t^3 - 4t^2 - 16t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(27t^2 + 23t + 7) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $\begin{cases} x = y \\ y^3 = \dfrac{4}{3t^3+1} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

2) Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2y^3 = x - 2y \\ 1 = 2y^2 - x^2 \end{cases}$

Suy ra $x^3 - 2y^3 = (x-2y)(2y^2 - x^2) \Leftrightarrow x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x = -y$.

+) $x = y$ thay vào hệ ta có $x^2 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

+) $x = -y$ thay vào hệ ta tìm được $x = \pm 1$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) \in \{(1;1),(-1;-1),(-1;1),(1;-1)\}$.

3) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Đặt $x = t\sqrt{y}$, từ phương trình thứ nhất ta có

$$\frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{t\sqrt{y}} = \frac{5t\sqrt{y} + \sqrt{y}}{2yt^2 + y} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{t} = \frac{5t+1}{2t^2+1}$$

$\Leftrightarrow (3t-1)(2t^2+1) = (5t+1)t \Leftrightarrow 6t^3 - 7t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(6t^2 - t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2 \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta có được

$$\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} = \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2};\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2\right)$.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + 3y^2 + xy - 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy + 3x - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x + 2xy = 0 \\ y^2 - 3y + xy + 1 = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 24 \\ x^2 - 2y^2 - xy - 2x + 4y = 0 \end{cases}$
6) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 6xy + 8x - 5y = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 - 8xy + 11x - 4y = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \end{cases}$
8) $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 - 6x + 45y - 14 = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 41x - 122y + 56 = 0 \end{cases}$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 5 \\ 2(x+y) - xy = 3 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)(x+y) = 4 \\ \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} = x + y \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \dfrac{1}{y} = 8 \end{cases}$
6) $\begin{cases} xy(x-y) = -2 \\ x^3 - y^3 = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$
8) $\begin{cases} y(y^2 + 2x^3y + 1) = 10x^3 \\ y^2(1 + 4x^6y^2) = 20x^6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 8x^3y^3 = 10 \\ 4x^3y + \dfrac{3}{y} + 1 = y + 2x^3 \end{cases}$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3+2=3y \\ y^3+2=3x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3=2x^3+yx^2 \\ 3=2y^3+xy^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2=\dfrac{1}{y}+y \\ 2y^2=\dfrac{1}{x}+x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{\sqrt{y-2}+y} \\ \sqrt{y+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y(4x^3-1)=3 \\ y^3(3x+1)=4 \end{cases}$

**Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} 2x^2-xy+5y^2=6 \\ 3x^2+2xy-4y^2=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3-y^3=15 \\ (x-y)(x^2+2y^2)=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=\dfrac{101}{17} \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=\dfrac{103}{17} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^3-6x=8y^3-10y \\ x^2-4=2(1-4y^2) \end{cases}$.

## Hướng dẫn giải

**Bài 1.**

1) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y=2x-3$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$x^2+3(2x-3)^2+x(2x-3)-2x+4(2x-3)+3=0$

$\Leftrightarrow 15x^2-33x+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=\dfrac{6}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$.

2) Ta có $4x^2-9y^2=0 \Leftrightarrow (2x-3y)(2x+3y)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}y, x=-\dfrac{3}{2}y$.

- $x=\dfrac{3}{2}y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$\frac{9y^2}{2}+\frac{9y^2}{2}+\frac{9}{2}y-y^2+4=0 \Leftrightarrow 16y^2+9y+8=0$ vô nghiệm.

- $x=-\frac{3}{2}y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\frac{9y^2}{2}-\frac{9y^2}{2}-\frac{9}{2}y-y^2+4=0 \Leftrightarrow 2y^2+9y-8=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-9\pm\sqrt{145}}{4} \Rightarrow x=\frac{27\mp 3\sqrt{145}}{8}$$

3) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2-3x+2xy=0 \\ 2y^2-6y+2xy+2=0 \end{cases}$ cộng hai phương trình ta có:

$$(x+2y)^2-3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=1 \\ x+2y=2 \end{array}\right.$$

* $x=1-2y$ thay vào hệ ta có: $y^2-3y+y(1-2y)+1=0$

$\Leftrightarrow y^2+2y-1=0 \Leftrightarrow y=-1\pm\sqrt{2} \Rightarrow x=3\mp 2\sqrt{2}$

* $x=2-2y$ thay vào hệ ta được:

$$y^2+y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=3\mp\sqrt{5}.$$

4) Ta có: $y=\frac{2x^2(2-x)}{x+1}$ (Do $x=-1$ không là nghiệm của hệ) thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$x^4(5-4x^2)=\frac{4x^4(2-x)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (5-4x^2)(x^2+2x+1)=4(4-4x+x^2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^4+8x^3+3x^2-26x+11=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y)=(0;0),\ (1;1),\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

5) Ta có $x^2-2y^2-xy-2x+4y=0 \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2-2(x-2y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)-2(x-2y)=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y-2)=0$

$\Leftrightarrow x=2y, x=2-y$.

• $x = 2y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$6y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 4.$$

$x = 2 - y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(2-y)^2 + (2-y)y + 2y^2 = 24 \Leftrightarrow y^2 - y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \mp \sqrt{41}}{2}.$$

6) Xét $x = 0$ thay vào hệ ta tìm được $y = 0$ hay $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$ thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} 2x^2 + x^2t^2 - 6x^2t + 8x - 5xt = 0 \\ 3x^2 - 2t^2x^2 - 8x^2t + 11x - 4xt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t^2 - 6t + 2) = 5t - 8 \\ x(-2t^2 - 8t + 3) = 4t - 11 \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{t^2 - 6t + 2}{-2t^2 - 8t + 3} = \frac{5t - 8}{4t - 11} \Leftrightarrow 14t^3 - 11t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 1, t = \frac{2}{7}.$$

• $t = -\frac{1}{2}$, suy ra $x = \frac{5t - 8}{t^2 - 6t + 2} = -2 \Rightarrow y = 1$.

• $t = 1$, suy ra $x = \frac{5t - 8}{t^2 - 6t + 2} = 1 \Rightarrow y = 1$.

• $t = \frac{2}{7}$, suy ra $x = \frac{5t - 8}{t^2 - 6t + 2} = -\frac{161}{9} \Rightarrow y = -\frac{46}{9}$.

7) **Cách 1**: Đặt $t = x^2$. Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} t + x = -y^2 - y + 4 \\ 2t + (y-5)x = y^2 - y - 2 \end{cases}$

Xét hệ bậc nhất hai ẩn t và x.

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & y - 5 \end{vmatrix} = y - 7$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -y^2 - y + 4 \\ 2 & y^2 - y - 2 \end{vmatrix} = 3y^2 + y - 10$$

$$D_t = \begin{vmatrix} -y^2 - y + 4 & 1 \\ y^2 - y - 2 & y - 5 \end{vmatrix} = -y^3 + 3y^2 + 10y - 18.$$

Vì $y = 7$ không là nghiệm của hệ nên suy ra: $D \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{D_t}{D} \\ x = \dfrac{D_x}{D} \end{cases}$.

Vì $t = x^2 \Rightarrow \frac{D_t}{D} = \frac{D_x^2}{D^2}$

$\Leftrightarrow D_t.D = D_x^2 \Leftrightarrow (y-7)(-y^3+3y^2+10y-18) = (3y^2+y-10)^2$

$\Leftrightarrow 5y^4 - 2y^3 - 24y^2 + 34y - 13 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(5y^2+8y-13) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\dfrac{13}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$.

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x;y) = (1;1)$, $\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$.

**Cách 2:** Ta có

$\Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0$ (*)

$\Delta_x = (y-5)^2 - 8(-y^2+y+2) = 9y^2 - 18y + 9 = (3y-3)^2$

Nên (*) có hai nghiệm: $x = \dfrac{y+1}{2}$ và $x = 2 - y$.

• Với $x = \dfrac{y+1}{2} \Leftrightarrow y = 2x - 1$ thay vào hệ ta có được:

$x^2 + (2x-1)^2 + x + 2x - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{13}{5} \end{array}\right.$

• Với $x = 2 - y$ thay vào hệ ta có:

$(2-x)^2 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (1;1)$, $\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$.

8) **Cách 1:** Đặt $t = x^2$, khi đó ta có hệ: $\begin{cases} 14t - 6x = 21y^2 - 45y + 14 \\ 35t + 41x = -28y^2 + 122y - 56 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ 35 & 41 \end{vmatrix} = 784$

$D_t = \begin{vmatrix} 21y^2 - 45y + 14 & -6 \\ -28y^2 + 122y - 56 & 41 \end{vmatrix} = 693y^2 - 1113y + 238$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 21y^2 - 45y + 14 \\ 35 & -28y^2 + 122y - 56 \end{vmatrix} = -1127y^2 + 3283y - 1274$

Do $D \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} t = \dfrac{D_t}{D} \\ x = \dfrac{D_x}{D} \end{cases}$

Vì $t = x^2$ nên ta có: $\dfrac{D_t}{D} = \dfrac{D_x^2}{D^2} \Leftrightarrow D.D_t = D_x^2$

$\Leftrightarrow 16(99y^2 - 159y + 34) = 7(23y^2 - 67y + 26)^2$

$\Leftrightarrow 3703y^4 - 21574y^3 + 38211y^2 - 21844y + 4188 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)(3703y^2 - 3059y + 698) = 0 \Leftrightarrow y = 2, y = 3$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (1;2),\ (-2;3)$.

**Cách 2:** Đặt $x = a + 1;\ y = b + 2$ hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 14a^2 - 21b^2 + 22a - 39b = 0 \\ 35a^2 + 28b^2 + 111a - 10b = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ có nghiệm $(a;b) = (0;0)$. Với $a \neq 0$ đặt $b = ta$ ta có:

$$\begin{cases} (14 - 21t^2)a = 39t - 22 \\ (35 + 28t^2)a = 10t - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{39t - 22}{14 - 21t^2} \\ a = \dfrac{10t - 11}{35 + 28t^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{39t - 22}{14 - 21t^2} = \dfrac{10t - 111}{35 + 28t^2}$$

$\Leftrightarrow 186t^3 - 421t^2 + 175t + 112 = 0 \Leftrightarrow (3t + 1)(62t^2 - 161t + 112) = 0$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow a = \dfrac{39t - 22}{14 - 21t^2} = -3 \Rightarrow b = 1$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (1;2),\ (-2;3)$.

**Bài 2.**

1) Đặt $S = x + y,\ P = xy$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^2 - 2P + 3P = 5 \\ 2S - P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2S - 3 \\ S^2 + 2S - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -4 \\ P = -11 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} S = -4 \\ P = -11 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình

$t^2 + 4t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \sqrt{15}$.

+) $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$(x;y) \in \left\{(1;1),\ (-2 + \sqrt{15}; -2 - \sqrt{15}),\ (-2 - \sqrt{15}; -2 + \sqrt{15})\right\}$.

2) Đặt $S = x + y,\ P = xy$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^3 - 3SP - 3P = -1 \\ S^2 - 2P + P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ S^3 - 3S(S^2 - 3) - 3(S^2 - 3) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ 2S^3 + 3S^2 - 9S - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ (S-2)(2S^2 + 7S + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -\dfrac{5}{2} \\ P = \dfrac{13}{4} \end{cases}.$$

+) $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

+) $\begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -2$

+) $\begin{cases} S = \dfrac{5}{2} \\ P = \dfrac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{13}{4} = 0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$(x;y) = \{(1;1),\ (1;-2),\ (-2;1)\}$.

3) Đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}; a, b \neq 0$, ta có hệ: $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(a^3 + b^3) = 4 \\ a^2b + b^2a = a^3 + b^3 \end{cases}$.

Đặt $S = a + b,\ P = ab$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{S}{P}(S^3 - 3SP) = 4 \\ SP = S^3 - 3SP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 4SP = 0 \\ S^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

+) $\begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(1;1),\ (-1;-1)\}$.

4) Đặt $a = x + \dfrac{1}{x}; b = y + \dfrac{1}{y}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Phương trình $t + \dfrac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$ và $t + \dfrac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Nên nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(1;\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};2\right)$.

5) Đặt $a=\sqrt{x+\frac{1}{y}};b=\sqrt{x+y-3}\Rightarrow a,b\ge 0$

Ta có: $\begin{cases}a+b=3\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ab=2\end{cases}$

$*\ \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}=1\\\sqrt{x+y-3}=2\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=(4\pm\sqrt{10};3\mp\sqrt{10})$

$*\ \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=(3;1),\ (5;-1)$.

6) Đặt $t=-y,\ S=x+t,\ P=xt$, điều kiện $S^2\ge 4P$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}xt(x+t)=2\\x^3+t^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2\\S^3-3SP=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\P=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}.$$

7) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ. Chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2\neq 0$ ta được

$$\begin{cases}\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}=6\\\frac{1}{x^2}+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2y+y^2a=6\\a^2+y^2=5\end{cases}\text{ với } a=\frac{1}{x}.$$

Đặt $S=a+y,\ P=ay$ ta có hệ

$$\begin{cases}SP=6\\S^2-2P=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\frac{6}{S}\\S^2-\frac{12}{S}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\frac{6}{S}\\S^3-5S-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\P=2\end{cases}$$

Suy ra $a,y$ là nghiệm của phương trình $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow t=1,t=2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)\in\left\{(1;2),\ \left(\frac{1}{2};1\right)\right\}$.

8) Ta thấy $x=0\Rightarrow y=0$ là một nghiệm của hệ

Xét $x\neq 0$, khi đó hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{2x^3}+y^2+\frac{y^3}{2x^3}=5\\\frac{y^2}{4x^6}+y^4=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+ab=5\\a^2+b^2=5\end{cases}$

với $a = \dfrac{y}{2x^3}$, $b = y^2$.

Đặt $S = a + b$, $P = ab$. Ta có $\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2(5 - S) = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}.$$

+) $\begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} \Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $t^2 + 5t + 10 = 0$ phương trình vô nghiệm

+) $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình

$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 2$.

Suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \dfrac{y}{2x^3} = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \dfrac{y}{2x^3} = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$(x;y) \in \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \sqrt{2} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; -\sqrt{2} \right), \left( \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 1 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; -1 \right) \right\}.$$

9) Điều kiện: $y \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 - 8x^3y^3 = 10 & (1) \\ 4x^3y^2 + 3 + y = y^2 + 2x^3y & (2) \end{cases}$

Lấy $(1) + 3 \times (2)$ ta có:

$x^3 + y^3 - 8x^3y^3 + 12x^3y^2 + 9 + 3y = 3y^2 + 6x^3y + 10$

$\Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = x^3(8y^3 - 12y^2 + 6y - 1)$

$\Leftrightarrow (y - 1)^3 = x^3(2y - 1)^3 \Leftrightarrow y - 1 = 2xy - x \Leftrightarrow x + y - 2xy = 1$

Nên ta có hệ: $\begin{cases} x^3 + y^3 - 8x^3y^3 = 10 \\ x + y - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3PS - 8P^3 = 10 \\ S - 2P = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2P + 1 \\ (2P+1)^3 - 3P(2P+1) - 8P^3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2P + 1 \\ 2P^2 + P - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 1 \\ S = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} P = -\dfrac{3}{2} \\ S = -2 \end{cases}$

- $\begin{cases} P = 1 \\ S = 3 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- $\begin{cases} P = -\dfrac{3}{2} \\ S = -2 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình

$t^2 + 2t - \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$.

Vậy hệ có bốn cặp nghiệm: $(x; y) = \left(\dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}; \dfrac{-2 \mp \sqrt{10}}{2}\right), \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$.

**Bài 3.**

1) Trừ hai phương trình của hệ ta được

$x^3 - y^3 = 3y - 3x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0$

( vì $x^2 + xy + y^2 + 3 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 3 > 0 \quad \forall x, y$ )

Thay $x = y$ vào hệ ta có:

$x^3 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) \in \{(1;1),\ (-2;-2)\}$.

2) Trừ hai phương trình của hệ theo vế ta có: $2(x^2 - y^3) + xy(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(Do $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 2(x + \dfrac{3}{4}y)^2 + \dfrac{7}{8}y^2 > 0$ )

Thay vào hệ ta được: $3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1 = y$.

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 1$.

3) Điều kiện: $xy \neq 0$. Từ hệ $\Rightarrow x, y > 0$

Trừ hai phương trình của hệ ta có: $(x - y)(2xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay vào hệ ta có:

$2x^2 = \dfrac{1}{x} + x \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (1; 1)$.

4) Điều kiện: $x > 0,\ y > 0$.

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 3xy^2 = x^2 + 2 \quad (1) \\ 3yx^2 = y^2 + 2 \quad (2) \end{cases}$

Trừ (1) và (2) vế theo vế, ta được: $(x-y)(3xy + x + y) = 0$

$\Rightarrow x = y$ vì $3xy + x + y > 0$ với mọi $x > 0,\ y > 0$

Thay $x = y$ vào phương trình (1) ta được

$$3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0,$$

Phương trình này có nghiệm $x = 1$ vì $3x^2 + 2x + 2 > 0$ với mọi $x > 0$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(1;1)$.

5) Điều kiện: $0 \le x, y \le 2$

Trừ hai phương trình của hệ: $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2-y} \Leftrightarrow x = y$

Do hàm số $f(t) = \sqrt{t} - \sqrt{2-t}$ là hàm đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow (x;y) = (0;0), (2;2)$

6) Điều kiện: $\begin{cases} -\dfrac{3}{2} \le x \le 4 \\ -\dfrac{3}{2} \le x \le 4 \end{cases}$.

Trừ hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{2y+3} - \sqrt{4-y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} - \sqrt{4-t},\ t \in \left[-\dfrac{3}{2};\ 4\right]$, ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2t+3}} + \frac{1}{2\sqrt{4-t}} > 0,\ \forall t \in \left(-\frac{3}{2};\ 4\right) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $x = y$ vào hệ, ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x + 7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2 + 5x + 12} = 9 - x \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{11}{9} \text{ (nhận).}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{11}{9} \\ y = \dfrac{11}{9} \end{cases}$.

7) Đặt $t = \sqrt{y}$, ta có hệ $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{t-2} + t^2 \\ \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \end{cases}$ với $x, t \ge 2$.

Trừ hai phương trình của hệ ta có được:

$$\sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{t-2} - \sqrt{x-2} + t^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-t^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{t^2+91}}+\frac{x-t}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t-2}}+(x^2-t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\left(\frac{x+t}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{t^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t-2}}+x+t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ \dfrac{x+t}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{t^2+91}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t-2}}+x+t=0\ (vn_0) \end{array}\right.$$

Thay $x=t$ vào hệ ta có: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2$

$$\Leftrightarrow x^2+91-\sqrt{x^2+91}-90+\sqrt{x-2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91}-10)(\sqrt{x^2+91}+9)+\sqrt{x-2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2+91}+9)}{\sqrt{x^2+91}+10}+\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{(x+3)(\sqrt{x^2+91}+9)}{\sqrt{x^2+91}+10}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(3;9)$.

8) Điều kiện: $xy \neq 0$

Ta có

$$x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \Leftrightarrow x-y+\frac{x-y}{xy}=0 \Leftrightarrow (x-y)(1+\frac{1}{xy})=0 \Leftrightarrow x=y, xy+1=0$$

+) $x=y$ thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta có

$$x^3+1=2x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

+) $xy+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{x}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$-\frac{2}{x}=x^3+1 \Leftrightarrow x^4+x+2=0 \Leftrightarrow x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$(x;y)=\left\{(1;1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

9) Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 8x^3 - 2 = \dfrac{6}{y} \\ 6x + 2 = \dfrac{8}{y^3} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a^3 - 2 = 3b \\ b^3 - 2 = 3a \end{cases} \text{ với } a = 2x, b = \dfrac{2}{y}.$$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được

$$a^3 - b^3 = 3b - 3a \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Thay vào hệ ta được phương trình:

$$a^3 - 2 = 3a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2, a = -1.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) \in \left\{(1;1), \left(-\dfrac{1}{2};-2\right)\right\}$.

**Bài 4.**

1) Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của phương trình . Đặt $x = ty$, ta có hệ

$$\begin{cases} y^2(2t^2 - t + 5) = 6 \\ y^2(3t^2 + 2t - 4) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2t^2 - t + 5}{3t^2 + 2t - 4} = 6$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 + 13t - 29 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -\frac{29}{16}.$$

+) $t = 1$, ta có $\begin{cases} x = y \\ y^2 = \dfrac{1}{3t^2 + 2t - 4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$.

+) $t = -\dfrac{29}{16}$, ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{29}{16}y \\ y^2 = \dfrac{1}{3t^2 + 2t - 4} = \dfrac{256}{571} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp\dfrac{29}{\sqrt{571}} \\ y = \pm\dfrac{16}{\sqrt{571}} \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$(x;y) \in \left\{(1;1), (-1;-1), \left(-\frac{29}{\sqrt{571}};\frac{16}{\sqrt{571}}\right), \left(\frac{29}{\sqrt{571}};-\frac{16}{\sqrt{571}}\right)\right\}.$$

2) Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Đặt $x = ty$, ta có hệ

$$\begin{cases} y^3(2t^3 - 1) = 15 \\ y^3(t-1)(t^2 + 2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{2t^3 - 1}{(t-1)(t^2 + 2)} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2t^3 - 1) = 5(t^3 - t^2 + 2t - 2) \Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 10t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 2..$$

Với $t = 2$, ta có $\begin{cases} x = 2y \\ y^3 = \dfrac{15}{2t^3 - 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (2;1)$.

3) Từ hệ phương trình $\Rightarrow (x^3 + y^3 - xy^2)(4x + y) = 4x^4 + y^4$.

Đặt $x = ty$ (do $y \neq 0$).

Ta có:

$$y^4(t^3 + 1 - t)(4t + 1) = y^4(4t^4 + 1) \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 1, t = 3$$

+) $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 1 \\ y^4 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$.

+) $t = 1 \Rightarrow y = x \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 5x^4 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 = y$

+) $t = 3 \Rightarrow x = 3y \Rightarrow \begin{cases} 25y^3 = 1 \\ 325y^4 = 13y \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ là: $(x;y) \in \left\{(0;1),\ (1;1),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}\right)\right\}$.

4) Điều kiện: $x > 0, y > 0$

Hệ phương trình đã cho viết lại: $\begin{cases} 3 - \dfrac{5}{y + 42x} = \dfrac{101}{17\sqrt{2y}} (a) \\ 3 + \dfrac{5}{y + 42x} = \dfrac{103}{17\sqrt{x}} (b) \end{cases}$, hệ phương trình này tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 6 = \dfrac{101}{17\sqrt{2y}} + \dfrac{103}{17\sqrt{x}} & (b) + (a) \\ \dfrac{10}{y + 42x} = \dfrac{103}{17\sqrt{x}} - \dfrac{101}{17\sqrt{2y}} & (b) - (a) \end{cases}.$$

Nhân vế theo vế của 2 phương trình trên ta được:

$\dfrac{60}{y + 42x} = \dfrac{103^2}{17^2.x} - \dfrac{101^2}{17^2.2y}$, quy đồng mẫu số và rút gọn ta được $2.(103y)^2 + 84.6275xy - 42.(101x)^2 = 0$, phương trình này được phân tích thành:

$$(2y - x)(103^2y + 101^2.42x) = 0$$

suy ra $x = 2y$ vì $103^2y + 101^2.42x > 0$ với $x > 0, y > 0$.

Thay $x = 2y$ vào phương trình $(b)$ ta được:

$3+\dfrac{5}{y+42(2y)}=\dfrac{103}{17\sqrt{2y}}$, quy đồng mẫu số và rút gọn phương trình:

$51y-\dfrac{103}{\sqrt{2}}\sqrt{y}+1=0$, phương trình này tương đương với:

$$(\sqrt{y}-\sqrt{2})\left(51\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \text{ tức } y=2 \text{ hoặc } y=\frac{1}{5202}.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(4;2)$, $\left(\dfrac{1}{2601};\dfrac{1}{5202}\right)$.

5) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=8x+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{cases} \Rightarrow 6(x^3-y^3)=(8x+2y)(x^2-3y^2)$

$$\Leftrightarrow 3x^3-3y^3=4x^3-12xy^2+x^2y-3y^3 \Leftrightarrow x(x^2+xy-12y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4y)(x-3y)=0.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là:

$$(x;y)=\left\{(3;1);(-3;-1);\left(\frac{4\sqrt{78}}{13};-\frac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(-\frac{4\sqrt{78}}{13};\frac{\sqrt{78}}{13}\right)\right\}.$$

6) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8y^3=6x-10y \\ 6=x^2+8y^2 \end{cases} \Rightarrow 6(x^3-8y^3)=2(3x-5y)(x^2+8y^2)$

$$\Leftrightarrow 3x^3-24y^3=3x^3-24xy^2-5x^2y-40y^3$$

$$\Leftrightarrow 16y^3+24xy^2+5x^2y=0 \Leftrightarrow y(5x^2+24xy+16y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow y(5x+4y)(x+4y)=0 \Leftrightarrow y=0, x=-\frac{4}{5}y, x=-4y.$$

+) $y=0$ thay vào hệ ta có được $x=\pm\sqrt{6}$

+) $x=-\dfrac{4}{5}y$ thay vào hệ ta có:

$$\frac{16}{25}y^2-3=3y^2+3 \Leftrightarrow -\frac{59}{25}y^2=6 \text{ VN}$$

+) $x=-4y$ thay vào hệ ta có:

$$72y^2-34=0 \Leftrightarrow 72y^2=34 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{17}{36}}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)\in\left\{(0;\pm\sqrt{6}),\left(4\sqrt{\dfrac{17}{36}};-\sqrt{\dfrac{17}{36}}\right),\left(-4\sqrt{\dfrac{17}{36}};\sqrt{\dfrac{17}{36}}\right)\right\}$.

## Chuyên đề 3. Hệ phương trình không mẫu mực

### I. Tóm tắt lí thuyết.

Khi giải hệ phương trình, dù bạn có dùng cách gì biến đổi đi chăng nữa thì mục đích cuối cùng của bạn cũng chuyển về phương trình một biến và giải phương trình vừa thu được. Đó cũng là suy nghĩ tự nhiên, việc làm giảm biến là quy luật không chỉ trong toán học mà cả trong cuộc sống chúng ta vẫn thường làm. Tóm lại, khi giải hệ phương trình thì chúng ta phải tìm cách làm giảm số ẩn của hệ để thuận lợi trong việc giải nó. Các phương pháp thường hay sử dụng để giải hệ phương trình là:

**1) Rút thế: Từ một phương trình rút một ẩn (hoặc biểu thức) theo ẩn còn lại (theo một nhóm biểu thức khác).**

Nếu trong phương trình của hệ mà có một ẩn xuất hiện dưới dạng bậc nhất, thì ta có thể rút ẩn đó theo ẩn còn lại và thế vào phương trình thứ hai của hệ và bạn cũng đừng ngần ngại khi thấy rằng sau khi thực hiện phép thế, phương trình thu được có bậc không nhỏ.

**2) Biến đổi về phương trình tích**

Xuất phát từ một phương trình hoặc cộng trừ hai phương trình của hệ, dẫn tới một phương trình tích. Từ phương trình tích này ta có thể biểu diễn được ẩn này qua ẩn kia.

**3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ quen thuộc**

Việc đặt ẩn phụ làm cho cấu trúc của hệ nhìn đơn giản hơn, từ đó chúng ta có lời giải rõ ràng hơn. Để đặt ẩn phụ chúng ta cần tạo ra những nhóm hạng tử đồng dạng với nhau. Để tạo ra những nhóm hạng tử này ta thường thực hiện chia hoặc ghép các hạng tử với nhau.

**4. Phương pháp hàm số**

Trong phương pháp này, chúng ta dựa vào tính đơn điệu của hàm số để thiết lập mối quan hệ giữa các ẩn.

Kịch bản mà chúng ta thường sử dụng đó là từ một phương trình của hệ hoặc cả hai phương trình ta biến đổi về dạng:

$$f(u) = f(v) \text{ với } u = u(x,y), v = v(x,y)$$

Trong đó $f(t)$ là một hàm liên tục và đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng mà ta đang xét.

Điểm mấu chốt trong cách giải này là tìm ra hàm đặc trưng $f(t)$.

**5) Phương pháp đánh giá**

Để giải hệ phương trình ta có thể sử dụng phương pháp đánh giá. Thông thường ta xuất phát từ một phương trình hoặc kết hợp cả hai phương trình của hệ để ta thiết lập được một phương trình mà đó là trường hợp xảy ra dấu "=" của một bất đẳng thức. Từ đó ta tìm được mối quan hệ đơn giản hơn giữa hai ẩn. Cách làm này thường sử dụng khi các yếu tố xuất hiện trong phương trình khó có mối quan hệ biến đổi đại số.

## II. Các ví dụ minh họa

**Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau $\begin{cases}(x+3y-1)^2 = 5y^2+20\\ x^2+(2y+1)^2 = 2\end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ tương đương với $\begin{cases}x^2+4y^2+6xy-2x-6y-19=0 & (1)\\ x^2+4y^2=1-4y & (2)\end{cases}$.

Thay (2) vào (1) ta có: $1-4y+6xy-2x-6y-19=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{x+9}{3x-5}$

Thay vào (2) ta có:

$$x^2+\left(\frac{2x+18}{3x-5}+1\right)^2=2 \Leftrightarrow x^2(3x-5)^2+(5x+13)^2=2(3x-5)^2$$

$\Leftrightarrow 9x^4-30x^3+32x^2+190x+119=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(9x^2-48x+119)=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(-1;-1)$.

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2(y+1)=6y-2\\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1\end{cases}$.

***Lời giải***

Ta thấy $y=-1$ không là nghiệm của hệ phương trình

Từ phương trình thứ nhất, ta có $x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}$ thay vào phương trình thứ hai ta được: $y^2\left(\dfrac{6y-2}{y+1}\right)^2+2y^2.\dfrac{6y-2}{y+1}+y\left(\dfrac{6y-2}{y+1}+1\right)=12y^2-1$

$\Leftrightarrow y^2(6y-2)^2+2y^2(6y-2)(y+1)+y(y+1)(7y-1)=(12y^2-1)(y+1)^2$

$\Leftrightarrow 36y^4-33y^3-5y^2+y+1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(3y-1)(12y^2+5y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=2\\ y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=0\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)\in\left\{(2;1),\ \left(0;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+2x^2y+4y^2=x^2\\ x^2+xy+2y-x=0\end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}(x^2+2y)^2=x^2(1+2y) & (1)\\ x^2+2y=x(1-y) & (2)\end{cases}$.

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^2(y-1)^2 = x^2(1+2y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y^2-4y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0, y=4 \end{array}\right..$$

+) $x = 0 \Rightarrow y = 0$

+) $y = 0$, thay vào (2) ta có $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, x = 1$.

+) $y = 4$, thay vào (2) ta có $x^2 + 3x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(0;0),\ (1;0)\}$.

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 2y^2 - y + 3x - 5 \\ y^2 = x^2 + x - 3y - 2 \end{cases}$.

***Lời giải***

Ta có $y^2 = x^2 + x - 3y - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -y - 2, x = y + 1$.

+) $x = -y - 2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$(y+2)^2 = 2y^2 - y - 3(y+2) - 5$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{31} \Rightarrow x = -6 \mp \sqrt{31}$.

+) $x = y + 1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$(y+1)^2 = 2y^2 - y + 3(y+1) - 5 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của hệ là

$(x;y) = (-6-\sqrt{31}; 4+\sqrt{31}), (-6+\sqrt{31}; 4-\sqrt{31}), (1+\sqrt{3}; \sqrt{3}), (1-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} & (2) \end{cases}$.

(***Trích đề thi ĐH Khối B - 2013***)

***Lời giải***

Điều kiện: $2x + y \geq 0; x + 4y \geq 0$

Ta có $(1) \Leftrightarrow y^2 - (3x+2)y + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ (3)

Ta xem (3) là phương trình bậc hai ẩn $y$ có

$$\Delta = (3x+2)^2 - 4(2x^2 + 3x + 1) = x^2.$$

Suy ra (3) có hai nghiệm $y = x + 1,\ y = 2x + 1$.

+) $y = x + 1$ thay vào phương trình (2) ta có

$\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3 \quad (x \geq -\frac{1}{3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3(x-1)x + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{3x+1} - (x+1)\right] + \left[\sqrt{5x+4} - (x+2)\right] = 3(x-1)x$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3(x^2-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \text{ hay } \frac{-1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=2 \end{array}\right..$$

+) $y=2x+1$, thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}=3-4x \quad (x \geq -\frac{1}{4}) \quad (4)$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}-3+4x,\ x \geq -\frac{1}{4}$.

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục và đồng biến trên $\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$ và $f(0)=0$.

Nên phương trình (4) có nghiệm $x=0 \Rightarrow y=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(0;1),\ (1;2)\}$.

**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x-2=0 \\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 \end{cases}$.

(***Trích đề thi ĐH Khối D - 2012***)

***Lời giải***

***Cách 1:*** Ta có:

$$2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 \Leftrightarrow (y-x^2)(y-2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x^2 \vee y=2x+1$$

- $y=x^2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có được:

$$x^3+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$$

- $y=2x+1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có được:

$$x(2x+1)+x-2=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{5}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(1;1),\ \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\pm\sqrt{5}\right)$.

***Cách 2:*** Từ $xy+x-2=0 \Rightarrow y=\frac{2-x}{x}$ (do $x=0$ không là nghiệm của hệ).

Thay vào phương trình thứ hai ta có được:

$$2x^3-x^2.\frac{2-x}{x}+x^2+\left(\frac{2-x}{x}\right)^2-2(2-x)-\frac{2-x}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^5-x^3(2-x)+x^4+(4-4x+x^2)-2x^2(2-x)-x(2-x)=0$$

$\Leftrightarrow x^5 + x^4 - x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;1)$, $\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \pm\sqrt{5}\right)$

**Ví dụ 7.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x - 2y - 3 = 0 \\ \sqrt{x}(x+y) = \sqrt{(x+y)^3 - y^3 - 3} \end{cases}$.

***Lời giải***

Từ phương trình thứ hai, ta có $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

và $x(x+y)^2 = (x+y)^3 - y^3 - 3$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3$

$\Leftrightarrow x^2y + 2xy^2 - 3 = 0$

Do đó, hệ tương đương với $\begin{cases} x^3 + x - 2y - 3 = 0 \\ x^2y + 2xy^2 - 3 = 0 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có

$x^3 + x - 2y - x^2y - 2xy^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - xy - 2y^2) + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x(x+y)(x-2y) + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)\left[x(x+y) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$ (do $x(x+y) \ge 0$).

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có: $x^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (\sqrt[3]{3}; \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2})$.

**Ví dụ 8.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases}$.

***(Trích đề thi ĐH Khối B - 2014)***

***Lời giải***

Đặt $a = \sqrt{x-y}, b = \sqrt{y}; a, b \ge 0 \Rightarrow x = a^2 + b^2$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$(1-b^2)a + a^2 + b^2 = 2 + (a^2-1)b \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + b - ab(a+b) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a+b) - 2 - 2ab - a(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow (a+b-1)(a+b+2) - ab(a+b+2) = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+2)(a+b-1-ab) = 0$

$\Leftrightarrow a + b - 1 - ab = 0$ (do $a + b + 2 \geq 2 > 0$)

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1, b = 1$

+) $a = 1 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$2y^2 - 3(y+1) + 6y + 1 = \sqrt{1-y}$

$\Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2(y-1)^2 + 7(y-1) + 3 = \sqrt{1-y}$

Đặt $t = \sqrt{1-y}, 0 \leq t \leq 1$ ta có

$2t^4 - 7t^2 + 3 = t \Leftrightarrow 2t^4 - 7t^2 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow (2t^2 - 2t - 3)(t^2 + t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

+) $b = 1 \Rightarrow y = 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$9 - 3x = 0 \Rightarrow x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (3;1), \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

**Ví dụ 9.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + xy + 2y - 17 = 0 \\ (x+y)(xy+4) = 32 \end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x(x+y) + 2(x+y) = 16 \\ (x+y)(xy+4) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 = (x+y)(x+2) & (1) \\ (x+y)(xy+4) = 2.16 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) được:

$(x+y)(xy+4) = 2(x+y)(x+2) \Leftrightarrow x(x+y)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0,\ x + y = 0,\ y = 2.$

+) $x = 0$ thay vào (1) được: $y = 8$.

+) $x + y = 0$ thay vào (1) được: $0x = 16$ (vô nghiệm)

+) $y = 2$ thay vào (1) được: $x = 2, x = -6$.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm: $(x;y) \in \{(0;8),\ (2;2),\ (-6;2)\}$.

**Ví dụ 10.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^2 = (x-y)(xy-1) \\ x^3 - x^2 + y + 1 = xy(x-y+1) \end{cases}$

***Lời giải***

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^2 - x^2y + xy^2 + x - y = 0 \\ x^3 - x^2 + y + 1 - x^2y + xy^2 - xy = 0 \end{cases}$

Suy ra $2x^3 - x^2 + y^2 - 2x^2y + 2xy^2 - xy + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + y^2 + 2xy^2 - 2x^2y - xy - 2x^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2+y^2-xy-x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2-xy-x+1=0 \end{array}\right.$

- $x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow 4y^2-10y-5=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{4}$
- $\begin{cases} x^3+y^2-x^2y+xy^2+x-y=0 \\ x^2+y^2-xy-x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^2-x^2y+xy^2+x-y=0 \\ 2x^2+2y^2-2xy-2x+2=0 \end{cases}$

Suy ra $x^3-2x^2-y^2-x^2y+xy^2+2xy+3x-y-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+y^2-xy+y-x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-(y+1)x+y^2+y+2=0 \quad \text{VN} \end{array}\right.$

Với $x=1 \Rightarrow y^2-y+1=0$ vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{4}\right)$.

**Ví dụ 11.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)[y+\sqrt{xy}+x(1-x)]=4 \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện $\begin{cases} x,y\ge 0 \\ xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0 \end{cases}$.

Ta có (1) tương đương với

$$\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\sqrt{xy}}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \quad (3).$$

Mặt khác, từ (2) ta có:

$$y+\sqrt{xy}=x^2-x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}+(x-1)^2\ge 2.$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow x=y$ thay vào (1) ta tìm được

$$x=y=1, x=y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

**Ví dụ 12.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+1)y^4+1=2xy^2(y^3-1) \\ xy^2(3xy^4-2)=xy^4(x+2y)+1 \end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^4+2xy^2+1+y^4-2xy^5=0 \\ 3x^2y^6-2xy^2-x^2y^4-2xy^5-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y^4}-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-\dfrac{2x}{y^2}-x^2-2xy-\dfrac{1}{y^4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-2xy-\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2=0 \end{cases}.$$

(do $y=0$ không là nghiệm của hệ)

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y^2}, b=xy$, ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2-2b=-1 \\ a^2-3b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2b-1 \\ 3b^2-4b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\pm 1 \end{cases}$$

- $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y^2}=1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

- $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y^2}=-1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ y^2+y+1=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

**Ví dụ 13.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^4-(x^3-x)y^2-(y+12)x^2=-6 \\ 5x^4-(x^2-1)^2y^2-11x^2=-5 \end{cases}$.

***Lời giải***

Nhận thấy, $x=0$ không là nghiệm của hệ nên chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2$ ta được:

$$\begin{cases} 6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y=0 \\ 5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-1=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x-\dfrac{1}{x}$, ta có hệ: $\begin{cases} 6a^2-ay^2-y=0 \\ 5a^2-a^2y^2-1=0 \end{cases}$.

Chia hai vế của hệ cho $a^2\neq 0$ ta có: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a}+\dfrac{y}{a^2}=6 \\ y^2+\dfrac{1}{a^2}=5 \end{cases}$.

Đặt $u = \frac{1}{a}$, ta có hệ: $\begin{cases} y^2u + u^2y = 6 \\ u^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy(u+y) = 6 \\ (u+y)^2 - 2uy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + y = 3 \\ uy = 2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được: $\begin{cases} u = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

- $u = 1 \Rightarrow a = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- $u = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};2\right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4};1\right)$.

**Ví dụ 14.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-1)^2 + 3 = \dfrac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y - x = \sqrt{\dfrac{4x - 3x^2y - 9xy^2}{x+3y}} \end{cases}$.

***Lời giải***

Từ phương trình thứ hai, ta có $\begin{cases} 3y \geq x \\ x + 3y \neq 0 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2) = 6x^5y \\ (3y - x)^2 = \dfrac{4x - 3x^2y - 9x^2y^2}{x + 3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ 9y^2 - 6xy + x^2 = \dfrac{4x}{x+3y} - 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ (x^2 - 3xy + 9y^2)(x + 3y) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ x^3 + 27y^3 = 4x \end{cases}$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ, nên ta có: $\begin{cases} 1 + \dfrac{8}{x^6} = \dfrac{6y}{x} \\ 1 + \dfrac{27y^3}{x^3} = \dfrac{4}{x^2} \end{cases}$

Đặt $a = \frac{2}{x^2} > 0,\ b = \frac{3y}{x}$, ta thu được hệ: $\begin{cases} 1 + a^3 = 2b \\ 1 + b^3 = 2a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^3 = 2b \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^3 - 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a-1)(a^2 + a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1, a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

• $a = b = 1$, ta có: $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = 1 \\ \dfrac{3y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

• $a = b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \dfrac{3y}{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}(\sqrt{5}-1)}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y = -\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}(\sqrt{5}-1)}{6} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y) = \left(\pm\sqrt{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(\pm\sqrt{\sqrt{5}+1};\frac{\pm\sqrt{\sqrt{5}+1}(\sqrt{5}-1)}{6}\right).$$

**Ví dụ 15**. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2(x^3+y^3)}{xy} - \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{xy}} + 5(x+y) = 8\sqrt{xy} \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2-y} = \dfrac{5x+y}{2} \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{5}; 0 < y \le 2$

Đặt $u = x + y, u > 0; v = \sqrt{xy}, v > 0$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2v - uv^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v} - 2\right)\left(2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 2 \Leftrightarrow u = 2v$$

$\Rightarrow x + y = 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ thay vào $(2)$, ta được:

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2-x} = 3x \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3 = 0 \text{ VN vì } \dfrac{1}{5} \le x \le 2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (1;1)$.

**Ví dụ 16.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 7y^2 + 3xy^2 + 3y = 0 \\ y^2(x^2y + 7) = x^2 + 3y^3 + 2y \end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 7y^2 + 3xy^2 + 3y = 0 \\ x^2y^3 + 7y^2 - x^2 - 3y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7y^2 + 3xy^2 + 3y = 0 & (1) \\ x^2y^3 + 3xy^2 - 3y^3 + y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow y(x^2y^2 + 3xy - 3y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2y^2 + 3xy - 3y^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$.

- $y = 0$, thay vào (1) ta có $x = 0$.
- $x^2y^2 + 3xy - 3y^2 + 1 = 0$ kết hợp với (1) ta có

$$\begin{cases} x^2y^2 + 3xy + 1 = 3y^2 \\ x^2 + 3xy^2 + 3y = 7y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 3 \\ \dfrac{x^2}{y^2} + 3x + \dfrac{3}{y} = 7 \end{cases} \text{ (do } y = 0 \text{ không là nghiệm của hệ).}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} = 3 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 3\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 7 \end{cases}$$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{y}$, $b = \dfrac{x}{y}$, ta có hệ: $\begin{cases} a^2 + b = 3 \\ b^2 + 3a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a^2 \\ (3 - a^2)^2 + 3a = 7 \ (*) \end{cases}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow a^4 - 6a^2 + 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 + a^2 - 5a - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)(a - 2)(a^2 + 3a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2, a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

+) $a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

+) $a = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$.

+) $a = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}y \\ (3\sqrt{5}-1)y^2 + (3-\sqrt{5})y + 2 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

+) $a = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}y \\ (3\sqrt{5}+1)y^2 + (3+\sqrt{5})y + 2 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2})\right\}$.

**Ví dụ 17.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3x+3y} & (1) \\ 12x(2x^2+3y+7xy) + 12y^2(5x+3) - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

***Lời giải***

Đặt $t = x+y, t \ge 0$. Khi đó (1) trở thành:

$$\sqrt{t+1} + 1 = 4t^2 + \sqrt{3t} \Leftrightarrow 4t^2 - 1 + \sqrt{3t} - \sqrt{t+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)(2t+1) + \frac{2t-1}{\sqrt{3t}+\sqrt{t+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)\left(2t+1+\frac{1}{\sqrt{3t}+\sqrt{t+1}}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ (do } t > 0).$$

Với $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 1-2y$ thay vào (2) ta có:

$$3(1-2y)\left[(1-2y)^2 + 6y + 7y(1-2y)\right] + 6y^2\left[5(1-2y)+6\right] - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18y^2 - 21y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-5}{6} \\ y = -\dfrac{1}{6} \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{\left(\dfrac{-5}{6};\dfrac{4}{3}\right), \left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6}\right)\right\}$.

**Ví dụ 18.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 2\sqrt{4 - x^2} - 3\sqrt{3 + 2y - y^2} - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \dfrac{8}{y^3} - \dfrac{8}{y} \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 3 + 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (3x + 3) - y^3 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + 3(x + 1) - y^3 - 3y = 0$$

$$(x + 1 - y)\left[(x + 1)^2 - y(x + 1) + y^2\right] + 3(x + 1 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 - y)\left[(x + 1)^2 - (x + 1)y + y^2 + 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 - y = 0 \Rightarrow y - 1 = x.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2\sqrt{4 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2} - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 3x = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3} \\ (2 - 3x)^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3} \\ 10x^2 - 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của hệ là $(x; y) = (0; 1)$.

2) Điều kiện $y \neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^3 - 16(x + 1) = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 - 4.\dfrac{2}{y} \\ 1 + \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 = 5(x + 1)^2 + 5 \end{cases}$

Đặt $a = x + 1,\ b = \dfrac{2}{y}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a^3 - 16a = b^3 - 4b \\ b^2 = 5a^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 16a - 4b \\ 4 = b^2 - 5a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(a^3 - b^3) = 4(4a - b)(b^2 - 5a^2)$$

$$\Leftrightarrow 21a^3 - 5a^2b - 4ab^2 = 0 \Leftrightarrow a(21a^2 - 5ab - 4b^2) = 0$$

$\Leftrightarrow a(7a-4b)(3a+b)=0 \Leftrightarrow a=0, b=\frac{7}{4}a, b=-3a$.

+) $a=0$ thay vào hệ ta có $b^2=4 \Leftrightarrow b=\pm 2$. Suy ra $\begin{cases} x=-1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$.

+) $b=\frac{7}{4}a$ thay vào hệ ta được: $4=\frac{49}{16}b^2-5b^2=-\frac{31}{16}b^2$ phương trình vô nghiệm.

+) $b=-3a$ thay vào hệ ta có: $(-3a)^2-5a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 1$.

Suy ra $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) \in \left\{(-1;\pm 1), \left(0;-\frac{2}{3}\right), \left(-2;\frac{2}{3}\right)\right\}$.

**Ví dụ 19.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3+3xy^2=25 \\ x^2+6xy+y^2=10x+6y-1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 9y^4+24y^3-xy^2+7y^2=16-x+24y \\ 8y^3+9y^2+20y-\sqrt[3]{6y+1}+35=x \end{cases}$.

***Lời giải***

1) Đặt $a=x+y$, $b=x-y \Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$.

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2=200 \\ (a+b)^2+6(a-b)(a+b)+(a-b)^2=20(a+b)+12(a-b)-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=50 \\ 2a^2-8a-b^2-2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=50 \\ 12a^2-48a-6b^2-12b+6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a^3-12a^2+48a+b^3+6b^2+12b-6=50$

$\Leftrightarrow (a-4)^3+(b+2)^3=0 \Leftrightarrow a-4=-2-b \Leftrightarrow a+b=2$

Suy ra $(a+b)^3-3ab(a+b)=50 \Leftrightarrow ab=-7$.

Do đó $a,b$ là nghiệm của phương trình $t^2-2t-7=0 \Rightarrow t=1\pm 2\sqrt{2}$.

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;\pm 2\sqrt{2})$.

2) Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$9y^4+24y^3+7y^2-24y-16=x(y^2-1)$

$\Leftrightarrow (y^2-1)(3y+4)^2=x(y^2-1)$

$$\Leftrightarrow (y^2-1)\left[x-\left(3y+4\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow y^2=1, x=(3y+4)^2$$

+) $y=1$, thay vào hệ ta có $x=72-\sqrt[3]{7}$

+) $y=-1$, thay vào hệ ta có $x=16+\sqrt[3]{5}$

+) $x=(3y+4)^2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$8y^3-4y-\sqrt[3]{6y+1}+19=0$$

$$\Leftrightarrow 8y^3-4y+21-(\sqrt[3]{6y+1}+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2y+3)(4y^2-6y+7)-\frac{3(2y+3)}{4-2\sqrt[3]{6y+1}+\sqrt[3]{(6y+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{3}{2} \\ 4y^2-6y+7=\dfrac{3}{\sqrt[3]{(6y+1)^2}-2\sqrt[3]{6y+1}+4} \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có $4y^2-6y+7=\left(2y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}\ge\dfrac{19}{4}$

$$\sqrt[3]{(6y+1)^2}-2\sqrt[3]{6y+1}+4=(\sqrt[3]{6y+1}-1)^2+3\ge 3$$

Suy ra $\dfrac{3}{\sqrt[3]{(6y+1)^2}-2\sqrt[3]{6y+1}+4}\le 1<\dfrac{19}{4}$. Do đó (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$$(x;y)\in\left\{(72-\sqrt[3]{7};1),\ (16+\sqrt[3]{5};-1),\ \left(\frac{1}{4};-\frac{3}{2}\right)\right\}.$$

**Ví dụ 20.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2-8x+2(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}=2(y+2)\sqrt{y^2+4y+5} & (1) \\ x^2+2y^2=4x-8y-6 & (2) \end{cases}$$

***Lời giải***

Từ (2), ta có $x^2=4x-8y-6-2y^2$ thay vào (1) ta được

$$2x^2-4x-6+2(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}=2y^2+8y+2(y+2)\sqrt{(y+2)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}=2(y+2)^2+2(y+2)\sqrt{(y+2)^2+1}$$

Đặt $a=x-1, b=y+2$ ta được

$$a^2+a\sqrt{a^2+1}=b^2+b\sqrt{b^2+1} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2+(a\sqrt{a^2+1}-b\sqrt{b^2+1})=0 \qquad (4).$$

Từ (3) ta suy ra $a(a+\sqrt{a^2+1})=b(b+\sqrt{b^2+1})$.

Vì $\sqrt{t^2+1}+t>\sqrt{t^2}+t=|t|+t\ge 0$

Nên ta suy ra được $ab\ge 0$.

+) Nếu $ab=0\Rightarrow x=1, y=-2$ thay vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

+) Xét $ab>0$. Khi đó

$$(4)\Leftrightarrow a^2-b^2+\frac{a^4-b^4+a^2-b^2}{a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)\left[1+\frac{a^2+b^2+1}{a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a^2+b^2+1=-a\sqrt{a^2+1}-b\sqrt{b^2+1} \quad (5) \end{array}\right.$$

Ta có

$$-a\sqrt{a^2+1}-b\sqrt{b^2+1}\le |a|\sqrt{a^2+1}+|b|\sqrt{b^2+1}=\sqrt{a^4+a^2}+\sqrt{b^4+b^2}$$

$$<\sqrt{a^4+a^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{b^4+b^2+\frac{1}{4}}=a^2+b^2+1.$$

Suy ra (5) vô nghiệm.

Với $a=b$, ta có $x-1=y+2\Rightarrow x=y+3$, thay vào (2):

$$(y+3)^2+2y^2=4(y+3)-8y-6$$

$$\Leftrightarrow 3y^2+10y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3\to x=0 \\ y=-\frac{1}{3}\to x=\frac{8}{3} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)\in\left\{(0;-3), \left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$.

**Ví dụ 21.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$$ **(VMO 2011).**

***Lời giải***

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-y^4=240 \\ 8x^3-24x^2+32x=16y^3-96y^2+256y \end{cases}$

Suy ra $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=y^4-16y^3+96y^2-256y+256$

$$\Leftrightarrow (x-2)^4=(y-4)^4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-4 \\ x-2=-y+4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right..$$

• $x=y-2$ thay vào hệ ta có:

$(y-2)^4-y^4=240\Leftrightarrow 8y^3-24y^2+32y+224=0\Leftrightarrow y=-2$

• $x = 6 - y$ thay vào hệ ta có: $(y-6)^4 - y^4 = 240 \Leftrightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (-4;-2),\ (4;2)$.

**Ví dụ 22.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+3} + x + y + 2 = 0\\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1\end{cases}.$$

***Lời giải***

Điều kiện: $x^2 + y + 1 \ge 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+2)^2+3} + x + 2 = -y\sqrt{(-y)^2+3} - y$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+3} + t$ Có $f'(t) = \sqrt{t^2+3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} + 1 > 0\ \forall t$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình (1) $\Leftrightarrow x + 2 = -y$

Thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}\\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}\\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}\\ 3x^2 + 13x + 10 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l} x = -1\\ x = -\dfrac{10}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{(tmđk)}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (-1;-1)$.

**Ví dụ 23.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8y^2(x^4+2) = 3(2x^2y+1)\\ 4y = \sqrt{x^2+y+3}\end{cases}$.

***Lời giải***

Từ phương trình thứ hai ta có $\begin{cases} y \ge 0\\ 16y^2 = x^2 + y + 3\end{cases}$.

Do đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^4y^2 + 16y^2 = 6x^2y + 3\\ 16y^2 = x^2 + y + 3\end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ ta được

$8x^4y^2 = 6x^2y - x^2 - y$

$\Leftrightarrow 8x^4y^2 + x^2 + y = 6x^2y \quad (*)$.

Do $y \ge 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$8x^4y^2 + x^2 + y \ge 3\sqrt[3]{8x^4y^2.x^2.y} = 6x^2y$$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 8x^4y^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Thử lại, ta thấy nghiệm của hệ là $(x;y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{2}\right)$.

**Ví dụ 24.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y} = y + x^2 \\ \dfrac{36}{y} - x^2 = 12 \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $y \le 12; y \ne 0$

Hệ phương trình tương đương với.

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} = y + x^2 \\ y(12+x^2) = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} = y + x^2 \\ \sqrt{y(12+x^2)} = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12+x^2)} = 6 + x^2 + y \quad$ (*).

Ta có:

$$x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12+x^2)} \le \sqrt{x^2(12-y)} + \sqrt{y(12+x^2)}$$

$$\le \sqrt{2\left[x^2(12-y) + y(12+x^2)\right]} = 2\sqrt{6(x^2+y)} \le 6 + x^2 + y.$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2(12-y) = y(12+x^2) \\ y + x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = \dfrac{6x^2}{x^2+6} \\ \dfrac{6x^2}{x^2+6} + x^2 = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = \dfrac{6x^2}{x^2+6} \\ x^4 + 6x^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-3+3\sqrt{5}} \\ y = 9 - 3\sqrt{5} \end{cases}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = \sqrt{-3+3\sqrt{5}} \\ y = 9 - 3\sqrt{5} \end{cases}$.

**Ví dụ 25.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases}$.

**(Trích đề thi ĐH Khối A - 2014).**

### *Lời giải*

Điều kiện $\begin{cases}|x| \le 2\sqrt{3} \\ 2 \le y \le 12\end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopsky ta có

$$x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \le \sqrt{(x^2+12-x^2)(12-y+y)} = 12$$

Do đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\sqrt{y} = \sqrt{12-y}.\sqrt{12-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0 \\ x^2y = 144 - 12x^2 - 12y + x^2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0 \\ y = 12 - x^2\end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10-x^2} = 0$$

$$x^3 - 8x - 3 + 2\left(1 - \sqrt{10-x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) + 2\frac{(x-3)(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right] = 0 \quad (*)$$

Vì $x > 0$ nên $x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2\left(x+3\right)}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (3;3)$

**Ví dụ 26.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2}\end{cases}$

(***Trích đề thi ĐH Khối A - 2012***).

### *Lời giải*

Ta có hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1\end{cases}$$

Đặt $a = x - 1, b = y + 1$ ta được hệ: $\begin{cases}a^3 - 12a = b^3 - 12b \\ \left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1\end{cases}$

Từ $\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases}-1 \le a + \dfrac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le b - \dfrac{1}{2} \le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{3}{2} \le a \le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \le b \le \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2 \le \dfrac{9}{4} \\ b^2 \le \dfrac{9}{4}\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$, ta có f(t) là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(t)=3(t^2-4)<0,\quad \text{với } t^2\le\frac{9}{4}$$

Nên từ $a^3-12a=b^3-12b$ ta có $a=b$.

Do đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

**Ví dụ 26.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2) \end{cases}$

(*Trích đề thi ĐH Khối A - 2013*).

***Lời giải***

Điều kiện: $x\ge 1$.

Từ (2) ta suy ra $\Delta'=(y-1)^2-(y^2-6y+1)=4y\ge 0\Rightarrow y\ge 0$

Nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{y^4}$

Đặt $u=x-1$ ta có: $\sqrt{u+2}+\sqrt[4]{u}=\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{y^4}\Leftrightarrow f(u)=f(y^4)$

Trong đó hàm $f(t)=\sqrt{t+2}+\sqrt[4]{t}$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$

Và có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}>0$ do đó f alf hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$

Suy ra $f(u)=f(y^4)\Leftrightarrow u=y^4\Leftrightarrow x-1=y^4\Leftrightarrow x=y^4+1$

Thay vào (2) ta được $(x+y-1)^2-4y=0\Leftrightarrow(y^4+y)^2-4y=0$

$$\Leftrightarrow y\left[y^3\sqrt{y}+\sqrt{y}-2\right]\left[y^3\sqrt{y}+\sqrt{y}+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\Rightarrow x=1 \\ y^3\sqrt{y}+\sqrt{y}-4=0 \quad (3) \end{array}\right.$$

(3) $\Leftrightarrow(\sqrt{y}-1)(y^3+y^2\sqrt{y}+y^2+y.\sqrt{y}+y+\sqrt{y}+2)=0\Leftrightarrow\sqrt{y}=1$

$\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$

Vậy $(x;y)=(0;1),\ (1;2)$ là nghiệm của hệ.

**Ví dụ 27.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 & (1) \\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 & (2) \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1)$ (3).

Vì hàm số $f(t) = t^3 + t$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(3) \Leftrightarrow f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$$

Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}(\sqrt{1-x} - 1) - (\sqrt{1-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{1+x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (0;1)$.

**Ví dụ 28.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2x^2 = 5 - 2y & (1) \\ (15-2x)\sqrt{6-x} - (4y+9)\sqrt{2y+3} = 0 & (2) \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 6 \\ y \ge -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Đặt $a = \sqrt{6-x},\ b = \sqrt{2y+3};\ a,\ b \ge 0$. Khi đó (2) trở thành:

$$(3+2a^2)a - (2b^2+3)b = 0 \Leftrightarrow 2a^3 + 3a = 2b^3 + 3b \quad (3).$$

Vì hàm số $f(t) = 2t^2 + 3t$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$(3) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = \sqrt{2y+3} \Leftrightarrow 2y = 3 - x$

Thay vào (1) ta được:

$$x^3 + 2x^2 = x + 2 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{\left(-2;\dfrac{5}{2}\right),\ (1;1), (-1;2)\right\}$.

**Ví dụ 29.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3 + 2y = \sqrt{y+5x+2} & (1) \\ \left(3x + \sqrt{1+9x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1 & (2) \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $y + 5x + 2 \ge 0$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 3x + \sqrt{1+(3x)^2} = (-y) + \sqrt{1+(-y)^2}$ (3).

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1+t^2},\ t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Vì $\sqrt{1+t^2} + t > \sqrt{t^2} + t = |t| + t \geq 0$ nên $f'(t) > 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$(3) \Leftrightarrow 3x = -y \Leftrightarrow y = -3x$.

Thay vào (1) ta có:

$$8x^3 - 6x = \sqrt{2x+2} \quad (4).$$

+) Nếu $x > 1$ thì ta có:

$$8x^3 - 6x = 8x\left(x^2-1\right) + 2x > 2x = \frac{x+x+2x}{2} > \frac{(x+1)+2}{2} \geq \sqrt{2x+2}$$

Suy ra (4) vô nghiệm.

+) Xét $-1 \leq x \leq 1$, đặt $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$, khi đó (4) trở thành:

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2(1+\cos t)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3t = 2\cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\dfrac{t}{2} + 2m\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{k4\pi}{5} \\ t = \dfrac{4m\pi}{7} \end{array}\right..$$

Vì $t \in [0;\pi]$ nên ta có $k = 0, k = 1, m = 0, m = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là

$$(x;y) \in \left\{(1;-3),\ \left(\cos\frac{4\pi}{5};-3\cos\frac{4\pi}{5}\right),\ \left(\cos\frac{4\pi}{7};-3\cos\frac{4\pi}{5}\right)\right\}.$$

**Ví dụ 30.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 5\sqrt{x} + 5 = 0 \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2+2y+3} - \dfrac{1}{5}y^2 + y \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $x \geq 0$.

Hệ tương đương với $\begin{cases} y^2 - 5\sqrt{x} + 5 = 0 \\ 5\sqrt{x+2} = 5\sqrt{y^2+2y+3} - y^2 + 5y \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ theo vế ta có

$$y^2 - 5\sqrt{x} + 5 - 5\sqrt{x+2} = -5\sqrt{y^2+2y+3} + y^2 - 5y$$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{y^2+2y+3} = (\sqrt{x}-1) + \sqrt{x+2}$$

Đặt $t = \sqrt{x} - 1,\ t \geq -1 \Rightarrow x = (t+1)^2$ nên ta có phương trình

$$y + \sqrt{y^2 + 2y + 3} = t + \sqrt{t^2 + 2t + 3} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(m) = m + \sqrt{m^2 + 2m + 3},\ m \geq -1$.

$$f'(m) = 1 + \frac{m+1}{\sqrt{m^2 + 2m + 3}} > 0\ \forall m \geq -1.$$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(y) = f(t) \Leftrightarrow y = t = \sqrt{x} - 1$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(\sqrt{x} - 1)^2 - 5(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 36 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(1;0),\ (36;5)\}$.

**Ví dụ 30.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 12y + 1} = \dfrac{1}{12}(x^2 + 17) & (1) \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y}{2}} & (2) \end{cases}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases} y \neq 0 \\ x^2 - 12y + 1 \geq 0 \quad (*) \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 - 12y + 1 - 8\sqrt{x^2 - 12y + 1} + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 12y + 1} - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12y + 1} = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 12y = 15 \quad (3).$

Đặt $a = \dfrac{x^2}{8y},\ b = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2}$, khi đó (2) trở thành:

$$a + b = \sqrt{4ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ (a+b)^2 = 4ab \end{cases} \Leftrightarrow a = b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \dfrac{x^2}{8y} = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 3x^2 = 16xy + 12y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 6y \\ x = \dfrac{-2}{3}y \text{ loại vì đk}(*) \end{array}\right. \end{cases}$$

+) $x = 6y$ thay vào (3) ta được:

$$36y^2 - 12y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{6} \text{ (do } y > 0) \Rightarrow x = 5.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left(5;\frac{5}{6}\right)$.

**Ví dụ 31.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3y^2 = 4 \\ x^2 + 2y^3 = 3 \end{cases}$.

***Lời giải***

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = 3(1 - y^2) \\ x^2 - 1 = 3(1 - y^3) \end{cases}$

Ta thấy $x = y = 1$ là một nghiệm của hệ

Với $x, y \neq 1$ ta có: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \dfrac{y + 1}{y^2 + y + 1}$ (*)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra được: $f(x) \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$

Xét hàm số $g(y) = \dfrac{y + 1}{y^2 + y + 1}$, tương tự ta chứng minh được:

$-\frac{1}{3} \le g(y) \le 1$

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x) = g(y) = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = -1$. Thay lại vào hệ ta thấy không thỏa

Vậy hệ đã cho có duy nhất 1 cặp nghiệm: $(x;y) = (1;1)$.

**Ví dụ 32.** Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 + x + y \le (x^2 + y^2)(x + y - 1) + 1 \\ 2x + 4y - \sqrt{10} - 3 \ge 0 \end{cases}$$

***Lời giải***

Đặt $a = x^2 + y^2, b = x + y$. Từ bất phương trình thứ nhất ta có

$(a - 1)^2 + b \le a(b - 1) + 1 \Leftrightarrow a^2 + b \le ab + a$

$\Leftrightarrow a(a - 1) + b(1 - a) \le 0 \Leftrightarrow (a - b)(a - 1) \le 0$ (1).

Từ bất phương trình thứ hai, ta có

$$\frac{\sqrt{10}}{2} = x + 2y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) \le \sqrt{5\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y \ge \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > 0.$$

Hay $a - b > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow a \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1$ (2).

Mặt khác

$$\frac{3+\sqrt{10}}{2}=x+2y\le\sqrt{5(x^2+y^2)}\Rightarrow x^2+y^2\ge\frac{13+6\sqrt{10}}{20}>1\ (3).$$

Từ (2) và (3) ta suy ra hệ vô nghiệm.

**Ví dụ 33.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{y^2-8x+9}-\sqrt[3]{xy+12-6x}\le 1 & (1)\\ \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} & (2)\end{cases}$$

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases}y^2-8x+9\ge 0\\ 2(x-y)^2+10x-6y+12\ge 0\\ y\ge 0\\ x\ge -2\end{cases}$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow\sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0; x\ge -2\\ (x-y)^2+5x-3y+6=\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2 & (3)\end{cases}$$

Ta có: $TV(3)=x^2-2xy+y^2+5x-3y+6$

$$=(x+2)^2-2y(x+2)+y^2+y+x+2$$

$$=(y-x-2)^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x+2})^2\ge\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2=VP(3)$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow y=x+2\Rightarrow(2)\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2-4x+13}-\sqrt[3]{x^2-4x+12}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\le 1\qquad (4).$$

Trong đó: $t=x^2-4x+10=(x-2)^2+6\ge 6\Rightarrow\sqrt[3]{t+2}\ge 2$.

Ta có:

$$t+3=1+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3=1+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3\ge 1+2\sqrt[3]{t+2}+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^2$$

$$\Rightarrow t+3\ge(1+\sqrt[3]{t+2})^2\Rightarrow\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\ge 1\quad (5).$$

Đẳng thức có khi $t=6$.

Từ (4) và (5) ta suy ra $\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}=1\Leftrightarrow t=6\Leftrightarrow x=2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$.

**Ví dụ 34.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{7}{2}+\frac{3y}{x+y}=\sqrt{x}+4\sqrt{y} & (1)\\ (x^2+y^2)(x+1)=4+2xy(x-1) & (2)\end{cases}$

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 4$

$\Leftrightarrow x(x-y)^2 + (x+y)^2 = 4$

Suy ra $4 \ge (x+y)^2 \Rightarrow x + y \le 2$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$$\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{x+y}{4}.\frac{x}{x+y}} \le \frac{x+y}{4} + \frac{x}{x+y}$$

$$4\sqrt{y} = 2\sqrt{(x+y).\frac{4y}{x+y}} \le x + y + \frac{4y}{x+y}$$

Do đó $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} \le \frac{5}{4}(x+y) + \frac{x+4y}{x+y} = \frac{5}{4}(x+y) + 1 + \frac{3y}{x+y}$

$$\le \frac{5}{4}.2 + 1 + \frac{3y}{x+y} = \frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y}$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{x}{x+y} \\ x + y = \dfrac{4y}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + 2y = 2y^3 + x \\ x^2 = 2y^2 - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 + 2y + y^3 = y^2 + 2xy^2 + 2 \\ xy - x + 2y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x-y)^2 + 2(x+y) + xy = 0 \\ y^2 = xy + 2y + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + 4y = y^2 + 12x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + 2y + 2\sqrt{4x+y} = 1 \\ 4\sqrt{4x+y} + \sqrt{46 - 16y(x+y) - 6y} = 8 - 4y \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

10) $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 5 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 4x + y \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - xy - 9x + 8y + 9 = 0 \\ x^2 - y^2 + 3xy - x - 8y - 5 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y(1 + 2\sqrt{2x-1}) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2x-1} + 2x = 13 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3(x-y) = 0 \\ x^4 + 9y(x^2 + y) - 5x^2 = 0 \end{cases}$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y + x - 2) = y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x[(x-y)^2 + 1] = y(8y^2 - 3xy + 2) \\ 3x^2 + 4y^3 + 2 = 3y(x+4) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8(x^2 + y^2) + 4xy + \dfrac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{4x+y} + \sqrt{2x+y} = 2 \\ \sqrt{2x+y} + x + y = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 4xy + 13 \\ \sqrt{\dfrac{x^2 - xy - 2y^2}{x-y}} + \sqrt{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x - 3y + \sqrt{x^2 + 3y^2} = 0 \\ \sqrt{2y-1} + 2x^2 - y^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y \\ x^5 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=x-y\\ x^2-12xy+9y^2+4=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6\end{cases}$

7) $\begin{cases}x(y^3-x^3)=7\\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x\end{cases}$

8) $\begin{cases}(x+2)\sqrt{x^2+4x+7}+y\sqrt{y^2+3}+x+y+2=0\\ \sqrt{x^2+y+1}=x-y+1\end{cases}$

9) $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{4+y}=2\sqrt{2}\end{cases}$

10) $\begin{cases}\left(y-2\right).\sqrt{x+2}-x.\sqrt{y}=0\\ \sqrt{x+1}.(\sqrt{y}+1)=(y-3).(1+\sqrt{x^2+y-3x})\end{cases}$.

**Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2-2x+5}}=x^2+y\\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt{y^2-2y+5}}=y^2+x\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{24}\\ (\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}})\sqrt{x}+\sqrt{y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}\right)=2\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0\\ 7x^2-14x+3y^3+10=0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1}\end{cases}$

6) $\begin{cases}x+6\sqrt{xy}-y=6\\ x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3\end{cases}$ 7) $\begin{cases}2\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|y|\\ 2\sqrt[4]{\dfrac{y^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|\end{cases}$

8) $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2}\\ 8xy^3+2y^3+1\geq 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}\end{cases}$

9) $\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{3(x-y)^2-4x+8y+5}-\sqrt{x}=\sqrt{y+1} \\ x^2y+y^2-3xy-3x+7y+8=2x\sqrt{y+3} \end{cases}$.

## Hướng dẫn giải

**Bài 1.**

1) ***Cách 1:*** Từ phương trình thứ nhất của hệ, suy ra $y=\frac{x^2+x}{2x-1}$ ( do $x=\frac{1}{2}$ không là nghiệm của hệ) thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$x^4-4x^2\frac{x^2+x}{2x-1}+3x^2+\left(\frac{x^2+x}{2x-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$$

Với $f(x)=x^2(2x-1)^2-4(x^2+x)(2x-1)+3(2x-1)^2+(x+1)^2$

$=4x^4-12x^3+10x^2-6x+4$

Nên $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$

Vậy hệ đã cho có 3 cặp nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

***Cách 2:*** Nếu $x=0 \Rightarrow y=0$ là nghiệm của hệ

Nếu $x\neq 0$, ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1+\frac{y}{x}=0 \\ x^2-4y+\frac{y^2}{x^2}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{y}{x}=2y-1 \\ (x+\frac{y}{x})^2=6y-3 \end{cases}$

Suy ra $(2y-1)^2=6y-3 \Leftrightarrow 4y^2-10y+4=0 \Leftrightarrow y=2, y=\frac{1}{2}$.

+) $y=2 \Rightarrow x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x=1, x=2$.

+) $y=\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2x}=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có 3 cặp nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

2) $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y & (1) \\ x^2-3=3(y^2+1) & (2) \end{cases}$.

***Cách 1:*** Từ (2) ta suy ra: $x^2=3(y^2+2)$ (3), thay vào (1) ta được:

$$x^3-8x=y(y^2+2)=y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2-xy-24)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{3x^2-24}{x} \end{array}\right.$$

- $x=0$ thay vào (3) ta thấy phương trình vô nghiệm.

• $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm là: $(x;y) \in \left\{(\pm 3;\pm 1),\ \left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{13}};\mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)\right\}$.

***Cách 2:*** Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ 6 = x^2 - 3y^2 \end{cases}$, suy ra $6(x^3 - y^3) = (8x + 2y)(x^2 - 3y^2)$.

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4y, x = 3y \end{array}\right..$$

+) $x = 0$ ta thấy hệ vô nghiệm

+) $x = 3y$ thay vào hệ ta có $6 = (3y)^2 - 3y^2 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

+) $x = -4y$ thay vào hệ ta có $6 = (-4y)^2 - 3y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{6}{13}}$.

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm là: $(x;y) \in \left\{(\pm 3;\pm 1),\ \left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{13}};\mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)\right\}$.

3) ***Cách 1:*** Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2y^3 = x - 2y \\ 2y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2y^3 = (x - 2y)(2y^2 - x^2)$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x = -y$

+) $x = y$ thay vào hệ ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

+) $x = -y$ thay vào hệ ta được: $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(1;1), (-1;-1),\ (1;-1),\ (-1;1)\}$.

***Cách 2:*** Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1) = 2y(y^2 - 1) \\ x^2 - 1 = 2(y^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1) = y(x^2 - 1) \\ x^2 = 2y^2 - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases}.$$

4) $\begin{cases} 2x^2 + 2y + y^3 = y^2 + 2xy^2 + 2 & (1) \\ xy - x + 2y = 2 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta có được

$$2x^2 + 2y + y^3 = y^2 + 2xy^2 + xy - x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (2y^2 + y - 1)x + y^3 - y^2 = 0$$

$\Leftrightarrow (x-y^2)(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow x=y^2, y=2x+1$

+) $x=y^2$ thay vào (2) ta có được:

$$y^3-y^2+2y-2=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$$

+) $y=2x+1$ thay vào (2) ta được:

$$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0, x=-2.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)\in\{(1;1),\ (0;1),(-2;-3)\}$.

5) $\begin{cases}(x-y)^2+2(x+y)+xy=0 & (1)\\ y^2=xy+2y+1 & (2)\end{cases}$

Lấy $(1)+3\times(2)$ ta được

$(x-2y)^2+2(x-2y)-3=0 \Leftrightarrow x=2y+1, x=2y-3$.

+) $x=2y+1$ thay vào (2) ta có

$y^2+3y+1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{5}$

+) $x=2y-3$ thay vào (2) ta được: $y^2-y+1=0$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(-2\pm\sqrt{5};\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

6) Trừ hai phương trình của hệ ta có:

$$3x^2-6x+2=y^2-2y \Leftrightarrow 3(x-1)^2=(y-1)^2 \Leftrightarrow y=1\pm\sqrt{3}(x-1)$$

+) $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$1+(\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1)^2=5+5x^2$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=0$ vô nghiệm.

+) $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$1+(\sqrt{3}x-\sqrt{3}-1)^2=5+5x^2$$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\sqrt{3}(3+\sqrt{3})\pm\sqrt{12+10\sqrt{3}}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{-\sqrt{3}(3+\sqrt{3})\pm\sqrt{12+10\sqrt{3}}}{2};\frac{5\sqrt{3}+5\mp\sqrt{12+10\sqrt{3}}}{2}\right)\right\}.$$

7) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+2\sqrt{4x+y}=1\\ 2x+6=\sqrt{46-16y(x+y)-6y} & (*)\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ 4(x+2)^2=46-16y(x+y)-6y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ 2x^2+8xy+8y^2+12x+3y=5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2(x+2y)^2 + 3(4x+y) = 5 \end{cases}$$

Đặt $a = x + 2y; b = \sqrt{4x+y} \geq 0$ ta có hệ:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a^2 + 3b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 11b^2 - 8b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

Đối chiếu lại ta thấy $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$ là nghiệm của hệ đã cho.

8) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$

***Cách 1:*** Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ nên từ (1)

$\Rightarrow y^2 = -\dfrac{x^3 + 49}{3x}$ (*) thế vào phương trình (2) ta được:

$$x^2 - 8xy - \frac{x^3 + 49}{3x} = 8y - 17 \Leftrightarrow 24y(x^2 + x) = 2x^3 + 51x^2 - 49$$

$$\Leftrightarrow 24xy(x+1) = (x+1)(2x^2 + 49x - 49) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \dfrac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \end{array}\right.$$

- $x = -1$ thế vào (*) $\Rightarrow y = \pm 4$.
- $y = \dfrac{2x^2 + 49x - 49}{24x}$ thế vào (*), ta có:

$$-\frac{x^3 + 49}{3x} = \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x}\right)^2 \Leftrightarrow -192x(x^3 + 49) = (2x^2 + 49x - 49)^2$$

Biến đổi rút gọn ta được:

$$4x^4 + 4x^3 + 45x^2 + 94x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2 - 4x + 49) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x; y) = (-1; \pm 4)$.

***Cách 2:*** Lấy $(1) + 3.(2)$ ta có được:

$$x^3 + 3x^2 + 3xy^2 - 24xy + 3y^2 = 24y - 51x - 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3y^2(x+1) - 24y(x+1) + 48(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 + 3y^2 - 24y + 48) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

***Cách 3:*** Đặt $a = x + y,\ b = x - y \Rightarrow x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a-b}{2}$

Thay vào hệ ta có được: $\begin{cases} a^3 + b^3 + 98 = 0 & (3) \\ 3a^2 - 5b^2 - 9a - 25b = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3) - 3.(4)$ ta có: $a^3 - 9a^2 + 27a - 27 + b^3 + 15b^2 + 75b + 125 = 0$

$\Leftrightarrow (a-3)^3 + (b+5)^3 = 0 \Leftrightarrow a - 3 = -b - 5$. Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

***Cách 4:*** Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^3(1+3t^2) = -49 \\ x^2(1-8t+t^2) = x(8t-17) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \dfrac{-49}{1+3t^2} = \dfrac{-49}{49+3(t^2-16)} = \dfrac{-49}{49+3a} \\ x = \dfrac{8t-17}{t^2-8t+1} = \dfrac{8t-17}{(t^2-16)-(8t-17)} = \dfrac{b}{a-b} \end{cases}$$

(Với: $a = t^2 - 16; b = 8t - 17$)

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a} = \frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3 + (a-b)^3\right) + 3ab^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left[49\left(b^2 - b(a-b) + (a-b)^2\right) + 3b^3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \\ 49(b^2 - b(a-b) + (a-b)^2) + 3b^3 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

- $t^2 = 16$ vào hệ $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \pm 4$.
- Khai triển và rút gọn, ta có:

$(*) \Leftrightarrow 49t^4 + 360t^3 + 547t^2 - 360t + 304 = 0$

$\Leftrightarrow (t+4)^2(49t^2 - 32t + 19) = 0 \Leftrightarrow t = -4$.

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x + y > 0$

Phương trình thứ nhất của hệ chứa ba biểu thức $x^2 + y^2; xy; x + y$, mà ba biểu thức này quan hệ với nhau bởi đẳng thức: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ nên sẽ biến đổi (1) như sau:

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{x+y} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2)(x+y) - (x^2+y^2)}{x+y} + x + y - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(\frac{x^2+y^2}{x+y}+1)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ (Do $\frac{x^2+y^2}{x+y}>0$

Thay vào (2), ta được: $x^2-(1-x)=1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-2 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;0),\ (-2;3)$.

10) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow x^2-(y+1)x-2y^2-y=0$ (*)

Xem (*) là phương trình bậc hai ẩn $x$, còn $y$ là tham số, phương trình này có biệt thức

$\Delta=(y+1)^2+4(2y^2+y)=(3y+1)^2$

Do đó (*) có hai nghiệm $x=2y+1, x=-y$, ta loại nghiệm $x=-y$

Thay $x=2y+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được $y=2 \Rightarrow x=5$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(5;2)$.

11) Nhận thấy phương trình có nghiệm $(1;\pm\sqrt{2})$, nên ta suy nghĩ đến việc tạo ra thừa số $x-1$.

Chú ý đến số hạng chứa $y^2$ ở hai phương trình, ta nghĩ đến lấy phương trình thứ nhất trừ đi 2 lần phương trình thứ hai ta có được:

$x^3-4x^2+8x-5+2y^2(x-1)+y(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+5)+2y^2(x-1)+y(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+2y^2+y+5)=0$ (*)

Do $x^2-3x+2y^2+y+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{21}{8}>0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

Nên (*) $\Leftrightarrow x=1$. Từ đó ta tìm được $(x;y)=(1;\pm\sqrt{2})$ là nghiệm của hệ.

12) Đặt $x=a+2,\ y=b-1$ ta có hệ:

$$\begin{cases} 2(a+2)^2+3(b-1)^2-(a+2)(b-1)-9(a+2)+8(b-1)+9=0 \\ (a+2)^2-(b-1)^2+3(a+2)(b-1)-(a+2)-8(b-1)-5=0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-ab+3b^2=4 \\ a^2+3ab-b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+3ab-b^2=2 \\ 7ab-5b^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a^2=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\frac{5}{7}b \\ \frac{81}{49}b^2=2 \end{cases}$$

Giải các hệ này ta được $\begin{cases} b = 0 \\ a = \pm\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} a = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{9} \\ b = \pm\dfrac{7\sqrt{2}}{9} \end{cases}$.

Từ đó ta suy ra được nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y) \in \left\{(2 \pm \sqrt{2}; -1), \left(2 \pm \frac{5\sqrt{2}}{9}; -1 \pm \frac{7\sqrt{2}}{9}\right)\right\}.$$

13) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ với $t \geq 0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} t - y(1+2t) = -8 \\ y^2 + yt + t^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - y - 2ty = -8 & (1) \\ (t-y)^2 + 3ty = 12 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra $2(t-y)^2 + 3(t-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - y = 0 \\ t - y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $t = y$, ta có: $t = y = 2$. Khi đó: $\sqrt{2x-1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2$.

Với $y = t + \frac{3}{2}$, có $4t^2 + 6t - 13 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3+\sqrt{61}}{4}$ (do $t \geq 0$).

Khi đó: $t = \dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \\ \sqrt{2x-1} = \dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3+\sqrt{61}}{4} \\ x = \dfrac{43-3\sqrt{61}}{16} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{5}{2};2\right), \left(\frac{43-3\sqrt{61}}{16}; \frac{3+\sqrt{61}}{4}\right)$.

14) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = 3x - 3xy \\ (x^2+3y)^2 + 3x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases}$

Thay (1) vào (2), ta được:

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) \in \left\{(0;0); \left(1; \frac{1}{3}\right)\right\}$.

**Bài 2.**

1) $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$

Đặt $a = x + y$ từ (1) $\Rightarrow x^2 + 1 = y(4-a)$ thế vào (2), ta có:

$y(4-a)(a-2) = y \Leftrightarrow y(a^2 - 6a + 9) = 0 \Leftrightarrow y = 0;\ a = 3$

* Với $y = 0$ thay vào (1) ta thấy hệ vô nghiệm.

* Với $a = 3 \Leftrightarrow x + y = 3$ thay vào hệ ta có:

$$x^2 + 1 = y = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right..$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x; y) = (1; 2),\ (-2; 5)$.

2) $$\begin{cases} x\left[(x-y)^2 + 1\right] = y(8y^2 - 3xy + 2) & (1) \\ 3x^2 + 4y^3 + 2 = 3y(x+4) & (2) \end{cases}$$

Ta có (1)

$\Leftrightarrow x(x^2 - 2xy + y^2 + 1) = 8y^3 - 3xy^2 + 2y$

$\Leftrightarrow x^3 - 8y^3 - 2x^2y + 4xy^2 + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - 2xy(x - 2y) + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + 4y^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$ thay vào (2) ta được:

$2y^3 + 3y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(2y^2 + 5y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 1),\ \left(\dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}; \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}\right)$.

3) Đk: $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x^2 \ge y \\ y^2 \ge x \end{cases}$.

Hệ $\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - y} = 2 \\ 2y - 2\sqrt{y^2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 2 - x \\ 2y - 1 = 2\sqrt{y^2 - x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2; y \ge \dfrac{1}{2} \\ 4x - y = 4 \\ 4x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{12} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$. Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = \left(\dfrac{17}{12}; \dfrac{5}{3}\right)$.

4) Đặt $a = x + y + \dfrac{1}{x + y}, b = x - y$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13 \\ (x+y+\dfrac{1}{x+y})+x-y=1 \end{cases}$

nên ta có: $\begin{cases} 5(a^2-2)+3b^2=13 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2+3b^2=23 \\ a+b=1 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ:

$$(x;y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{3}{4};-\frac{11}{4}\right),\left(\frac{3}{2};-2\right).$$

5) Ta có: $xy\left(x^2+y^2\right)+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow xy(x+y)^2-(x+y)^2-2(x^2y^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1)-(xy-1)(2xy+2)=0 \Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0$

- $xy=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

  $x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm1 \Rightarrow y=\pm1$

- $x^2+y^2=2 \Rightarrow y^2=2-x^2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

  $5x^2y-4x(2-x^2)+3(2-x^2)y-2x-2y=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{5x-2x^3}{x^2+2}$

Thay vào phương trình $x^2+y^2=2$ ta có: $x^2+\dfrac{x^2\left(5-2x^2\right)^2}{(x^2+2)^2}=2$

Đặt $t=x^2, t\geq 0$ ta được: $t(t^2+4t+4)+t(25-20t+4t^2)=2(t^2+4t+4)$

Biến đổi và rút gọn ta có: $5t^3-18t^2+21t-8=0$, phương trình này có hai nghiệm $t=1, t=\dfrac{8}{5}$.

- $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=\dfrac{5x-2x^3}{x^2+2} \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(-1;-1),(1;1)\}$

- $t=\dfrac{8}{5} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{5x-2x^3}{x^2+2} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5};\dfrac{-\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$

Tóm lại hệ có các nghiệm là:

$(x;y) = (1;1), (-1;-1), \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{-\sqrt{10}}{5}\right).$

6) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\dfrac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $a = x^2 + y; b = xy$

Ta có: $\begin{cases} a + ab + b = -\dfrac{5}{4} \\ a^2 + b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a + a(-\dfrac{5}{4} - a^2) - \dfrac{5}{4} - a^2 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a^3 + a^2 + \dfrac{1}{4}a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

* $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$

* $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\dfrac{1}{2} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{24}{16}}\right), \left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$.

7) ***Cách 1:*** Đặt $t = y - x \Leftrightarrow y = x + t$ ta có hệ:

$\begin{cases} \sqrt{7x + y} = 3 - t \\ \sqrt{2x + y} = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + t = (3 - t)^2 \\ 3x + t = (2 + t)^2 \\ -2 \le t \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - 8t = 3(3 - t)^2 - 8(2 + t)^2 \\ -2 \le t \le 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 9t + 1 = 0 \\ -2 \le t \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{-9 + \sqrt{77}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(t + 2)^2 - t}{3} = 10 - \sqrt{77} \\ y = t + x = \dfrac{11 - \sqrt{77}}{2} \end{cases}$

là nghiệm của hệ đã cho.

***Cách 2:*** Đặt $u = \sqrt{7x + y}$, $v = \sqrt{2x + y}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} u + v = 5 \\ v = 2 + y - x \end{cases}$.

Mặt khác $u^2 - v^2 = 5x \Rightarrow (u - v)(u + v) = 5x \Rightarrow u - v = x$

$\Rightarrow v = \dfrac{5-x}{2}$ (Do $u + v = 5$) $\Rightarrow \dfrac{5-x}{2} = 2 + y - x \Rightarrow y = \dfrac{1+x}{2}$

Thay vào hệ ta có được: $\sqrt{2x + \dfrac{1+x}{2}} = \dfrac{5-x}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ 10x + 2 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ x^2 - 20x + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10 - \sqrt{77}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{11 - \sqrt{77}}{2}$.

Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 10 - \sqrt{77} \\ y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$.

8) Đặt $t = x + y$, ta có: $\begin{cases} \sqrt{4x+y} = 1 + t \\ \sqrt{2x+y} = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 1 + 2t + t^2 \\ 2x + y = 1 - 2t + t^2 \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4t$

$\Leftrightarrow 2x = 4(x+y) \Leftrightarrow x = -2y$

Thay vào hệ ta có: $y^2 + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

So với điều kiện ta có nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 5 - \sqrt{21} \\ y = \dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$.

9) ĐK: $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \\ x - 2y \ge 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \\ (x+y)\sqrt{x-2y} + (x+y)\sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow (x-2y)^2 + 4(x-2y) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{array}\right. \quad (l)$

Với $x = 2y + 1$ thay vào (2), ta được:

$(3y+1)\sqrt{y+1} = 1 - 3y \Rightarrow 9y^3 + 6y^2 + 13y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$ thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1;0)$.

10) ĐK: $y \ge \dfrac{1}{2}$

Ta có phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3y^2} = 3y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \ge x \\ 6y^2 - 6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \ge x \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = y \end{array}\right. \end{cases} \quad (2)$$

Với $x = y$ thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{2y-1} = -y^2 + 3y - 1 \Rightarrow y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 8y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 + \sqrt{2} \qquad (1) \\ y = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \{(1;1);(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2})\}$.

**Bài 3.**

1) $\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y & (1) \\ x^5 + y^3 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $x^3 + x - 2 = (y+1)^3 + (y+1) - 2$ (*)

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = t^3 + t - 2$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, Kết hợp với (*) ta được $x = y + 1$

Thế vào (2) suy ra:

$$x^5 + (x+1)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^4 + x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (0,1)$.

2) $\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 & (1) \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $6x - 2xy + 1 \ge 0$ (*)

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow f(x) = f(-y)$

với $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$

Lại có: $f'(t) = \dfrac{\sqrt{t^2+1} + t}{\sqrt{t^2+1}} > \dfrac{|t| - t}{\sqrt{t^2+1}} \ge 0$ do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$.

Thế vào (2) ta có:

$$x\sqrt{6x + 2x^2 + 1} = -4x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 + 6x + 1} - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{25x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

• Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+6x+1=9x^2\\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

• Nếu

$$\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+6x+1=4x^2\\ x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{11}}{2} \Rightarrow y=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$$

Thử lại (*) ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;-1);\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

3) Điều kiện: $x\le\frac{3}{4}, y\le\frac{5}{2}$

Từ phương trình thứ nhất dễ dàng suy ra $x>0$.

Đặt $\sqrt{5-2y}=2t\ge 0$, ta được $y=\frac{5-4t^2}{2}$.

Thay vào phương trình đầu ta có: $x(4x^2+1)=t(4t^2+1)$

Vì hàm $f(u)=u(4u^2+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên ta có $x=t$, suy ra $y=\frac{5-4x^2}{2}$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x^2+\frac{(5-4x^2)^2}{4}+2\sqrt{3-4x}=7.$$

Trong khoảng $\left(0,\frac{3}{4}\right]$, hàm số $g(x)=4x^2+\frac{(5-4x^2)^2}{4}+2\sqrt{3-4x}$ có:

$$g'(x)=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<4x(4x^2-3)<0.$$

Mặt khác lại có $g\left(\frac{1}{2}\right)=7$ vì vậy phương trình $g(x)=7$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{2}$, suy ra $y=2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$.

4) Điều kiện: $x\ge 2; y\ge 0$

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3-3t$ có $f'(t)=3t^2-3\ge 0, \forall t\ge 1$

(vì $\sqrt{y+3} \geq \sqrt{3}$; $x-1 \geq 1$)

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$, hay $x-1=\sqrt{y+3}$

$$\Leftrightarrow \ y = x^2 - 2x - 2$$

Thế vào (2):

$(2) \Leftrightarrow 9(x-2) = y^2 + 8y \Leftrightarrow 9(x-2) = (x^2-2x-2)^2 + 8(x^2-2x-2)$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 17x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^3 - x^2 + 5x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0 \end{array}\right.$

Xét $g(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$ có $g'(x) = 3x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra đây là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lại có $x \geq 2 \Rightarrow g(x) \geq g(2) = 13 > 0$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (3;1)$ .

5) $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y & (1) \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x, y \geq -\dfrac{1}{2}$.

Từ (2) ta thấy nếu hệ có nghiệm (x;y) thì $x.y \geq 0$ (*)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y \qquad (3)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t$, ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra hàm f(t) đồng biến trên $(-\dfrac{1}{2};0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do (*) nên ta có các trường hợp sau

**TH 1**: $x, y \in [-\dfrac{1}{2};0) \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (do f(t) đồng biến).

**TH 2**: $x, y \in [0;+\infty) \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (do f(t) nghịch biến).

Tóm lại cả hai trường hợp đều dẫn đến $x = y$, tức là $(1) \Leftrightarrow x = y$ thay vào (2) ta được:

$2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (do $x \geq -\dfrac{1}{2}$).

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $x = y = \sqrt{2}$.

6) $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \ge -\frac{5}{4}$

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ nên $y \ne 0$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y$ (do hàm số $f(t) = t^5 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x = y^2$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;\pm 1)$.

7) Từ phương trình thứ nhất, suy ra $x - y \ne 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$x^2(x^2 - y^2) + xy(x^2 - y^2) - 9(x - y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y) + xy(x+y) - 9 = 0 \Leftrightarrow x(x+y)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm\frac{3}{\sqrt{x}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \pm \frac{3}{\sqrt{x}} \\ x > 0 \end{cases}$$

Do $y^3 - x^3 > 0 \Rightarrow y > x > 0 \Rightarrow y = -x - \frac{3}{\sqrt{x}}$ loại

Với $y = \frac{3}{\sqrt{x}} - x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$x\left[\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right)^3 - x^3\right] = 7$. Đặt $t = \sqrt{x}$ ta được

$t^2\left[\left(\frac{3}{t} - t^2\right)^3 - t^6\right] = 7 \Leftrightarrow f(t) = 2t^9 - 9t^6 + 27t^3 + 7t - 27 = 0$ (*)

Ta có: $f'(t) = 18t^8 - 54t^5 + 81t^2 + 7 \ge 2\sqrt{18t^8.81t^2} - 54t^5 + 7 > 0$ và $f(1) = 0$

Nên (*) có nghiệm duy nhất $t = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

Vậy $(x;y) = (1;2)$ là nghiệm của hệ.

8) Điều kiện: $x^2 + y + 1 \ge 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+2)^2 + 3} + x + 2 = -y\sqrt{(-y)^2 + 3} - y$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2 + 3} + t$ Có $f'(t) = \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} + 1 > 0\ \forall t$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình (1) $\Leftrightarrow x + 2 = -y$

Thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{x^2-x-1}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+13x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1 \quad \text{(tmdk)}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;-1)$.

9) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1 & (1) \\ \sqrt{1-x}+\sqrt{4+y}=2\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $0 \le x;y \le 1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}+x=\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-(1-y)}}+1-y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}}+t$ với $t \in [0;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{1-t})+\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}.\sqrt{t}}{(1+\sqrt{1-t})^2}+1>0 \quad ,\forall t \in (0;1)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(x)=f(1-y) \Leftrightarrow x=1-y$, thế vào (2) ta được:

$\sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 6-2x+2\sqrt{5-6x+x^2}=8$

$\Leftrightarrow \sqrt{5-6x+x^2}=x+1 \Leftrightarrow 5-6x+x^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ (tmđk)

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

10) $\begin{cases} (y-2).\sqrt{x+2}-x.\sqrt{y}=0 & (1) \\ \sqrt{x+1}.(\sqrt{y}+1)=(y-3).(1+\sqrt{x^2+y-3x}) & (2) \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x \ge -1; y \ge 0 \\ x^2 + y - 3x \ge 0 \end{cases}$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}.y - x.\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} = 0$

có $\Delta_y = x^2 + 8(x+2) = (x+4)^2 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \sqrt{y} = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \\ \sqrt{y} = \dfrac{-2}{4\sqrt{x+2}} (< 0) \Rightarrow \text{loại} \end{array} \right.$

với $\sqrt{y} = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2$, thế vào (1) ta được

$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) = (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2})$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.(\sqrt{x+2}+1) = (x-1).(\sqrt{(x-1)^2+1})$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2+1}+1) = t\sqrt{t^2+1} + t$, có

$f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Vì phương trình (*)

$\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$ (thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (3; 5).

**Bài 4.**

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 2\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x, y \ge 0$.

Ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}(x+y)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y+2\sqrt{xy}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = 2\sqrt{2}$

(do $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$)

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy hệ đã cho có một cặp nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

2)

* Ta thấy $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = y = 0$ là một nghiệm của hệ.

* Với $xy \ne 0$ cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x^2+y^2=2xy\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{(y-1)^2+4}}\right)\le 2xy\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2xy$$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2\le 0\Leftrightarrow (x-y)^2\le 0\Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm là: $(x;y)=(0;0),\ (1;1)$.

3) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}\right)\\ \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{x+3y}\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{3}{2}\right)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$

Cộng lại ta được $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}\right)\le 2$

Đẳng thức xảy ra nên $x=y$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}$.

4) $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0 & (1)\\ 7x^2-14x+3y^3+10=0 & (2)\end{cases}$

Từ (1) suy ra: $y^2=\dfrac{2x}{x^2+1}\le 1\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ -1\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow y^3\ge -1\ (*)$

Từ (2) suy ra $7(x-1)^2+3(y^3+1)=0$

Mà $7(x-1)^2\ge 0;\ 3(y^3+1)\ge 0$ (do (*)) $\Rightarrow 7(x-1)^2+3(y^3+1)\ge 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\ y^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;-1)$.

5) Đk: $x\ge\dfrac{1}{14}$.

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+16x^2-8x+1=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 80x^2+2x=2y\sqrt{14x-1}\end{cases}$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$y^2-2y\sqrt{14x-1}+14x-1+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$

$\Leftrightarrow(y-\sqrt{14x-1})^2+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\qquad(1).$

Ta có: $VT(1) \ge 96x^2 - 20x + 2 = \frac{1}{2}[3(8x-1)^2 + 8x + 1] \ge \frac{1}{2}(8x+1)$

$= \frac{1}{6}[16x + 8x + 1 + 2] \ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{16x(8x+1)2} = \sqrt[3]{4x(8x+1)} = VP(1)$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \sqrt{14x-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

6) Điều kiện: $\begin{cases} xy \ge 0 \\ x^2 + xy + y^2 \ne 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta thấy nếu $x \le 0, y \le 0$ thì dẫn đến hệ vô nghiệm, do đó ta chỉ giải hệ khi $x > 0, y > 0$.

Khi đó, PT thứ nhất của hệ được viết thành

$$x + 6\sqrt{xy} - y = 6 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{xy} = 3 + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$\Rightarrow x + 2\sqrt{xy} \ge 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Tiếp theo ta chứng minh,với $x + 2\sqrt{xy} \ge 3$ thì

$$x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \ge 3.$$

Thật vậy, do $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \ge \frac{x+y}{3} \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} \ge \frac{x+y}{3}$

$\Leftrightarrow 3(x^2 - xy + y^2) \ge x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng với mọi $x > 0, y > 0$)

suy ra $x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \ge x + 2\left(x + y\right) - \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Mặt khác theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$x + 2(x+y) - \sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} - \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$= x + 2\sqrt{\frac{xy}{2}(1^2 + 1^2)\left(\frac{x^2 + y^2}{xy} + 2\right)} - \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$\ge x + 2\sqrt{\frac{xy}{2}}\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy}} + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + 2\sqrt{xy} \ge 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Từ các lập luận trên dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1;1)$.

7) Trừ theo vế các PT của hệ ta được $2\left(\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(|y|-|x|\right)$ (1)

* Nếu $|x|>|y|$ thì $\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}>0>|y|-|x|$

* Nếu $|x|<|y|$ thì $\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}<0<|y|-|x|$

Vậy $(1)\Leftrightarrow |x|=|y|$; thay vào PT thứ nhất của hệ ta được phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}|x| \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}|x| \quad (2)$$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=\sqrt{\left(\frac{x^4}{3}+4\right)\left(\frac{6^2}{3}+4\right)}\ge\frac{6x^2}{3}+4=2x^2+4$$

Kết hợp với (2) suy ra $2x^2+4\le 1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}|x| \Leftrightarrow \left(|x|-\sqrt{6}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{6} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là

$(\sqrt{6};\sqrt{6}),(-\sqrt{6};\sqrt{6}),(\sqrt{6},-\sqrt{6}),(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$.

8) $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} & (1)\\ 8xy^3+2y^3+1\ge 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2} & (2)\end{cases}$

Ta có:

$$VP(1)=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow VT(1)=y^6+y^3+2x^2\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y^6+2y^3+4x^2\le 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$8xy^3+2y^3+2\ge 2y^6+2y^3+4x^2+4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 8xy^3+2\ge 2y^6+8x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4xy^3+1\ge y^6+4x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+(2x-y)^2}\ge y^6-4xy^3+4x^2=(y^3-2x)^2 \quad (4)$

$VT(4) \le 0, VP(4) \ge 0$. Do đó: $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Thử lại chỉ có: $(x;y) = (-\frac{1}{2};-1)$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-\frac{1}{2};-1)$.

9) Dễ thấy: $x = y = 0$ hoặc $x = y = -1$ là nghiệm của hệ
Xét: $x > 0$
Ta có:
$1 + y^7 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 > 1 + x^7$
$\Rightarrow y > x$

$1 + x^7 = (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 > 1 + y^7$
$\Rightarrow x > y$

Vậy hệ vô nghiệm. Tương tự khi $y > 0$ hệ cũng vô nghiệm
Xét: $x < -1 \Rightarrow 1 + x^7 < 0 \Rightarrow y < -1$
Ta có: $1 + (x + x^2) + (x^3 + x^4) + (x^5 + x^6) + x^7 > 1 + x^7 \Rightarrow y > x$.
Tương tự khi $y < -1$ ta có $x > y$
Hệ cũng vô nghiệm
Xét trường hợp $-1 < x < 0$. Hệ cũng vô nghiệm.
Vậy hệ có nghiệm: $(x;y) \in \{(0;0);(-1;-1)\}$.

10) $\begin{cases} \sqrt{3(x-y)^2 - 4x + 8y + 5} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} & (1) \\ x^2y + y^2 - 3xy - 3x + 7y + 8 = 2x\sqrt{y+3} & (2) \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3(x-y)^2 - 4x + 8y + 5} = \sqrt{x} + \sqrt{y+1}$ (3).

Do $3(x-y)^2 - 4x + 8y + 5 = 3(x-y)^2 - 6(x-y) + 3 + 2x + 2y + 2$

$= 3(x - y - 1)^2 + 2(x + y + 1) \ge 2(x + y + 1) \ge (\sqrt{x} + \sqrt{y+1})^2$.

Suy ra $\sqrt{3(x-y)^2 - 4x + 8y + 5} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y+1}$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y + 1 \ge 0 \Rightarrow y = x - 1$.

Thay $y = x - 1$ vào (2) ta được:

$x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = 2x\sqrt{x+2}$ (4).

Ta có $x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = x(x^2 - 4x + 4) + x^2 + x + 2$

$= x(x-2)^2 + x^2 + x + 2 \ge x^2 + (x+2) \ge 2\sqrt{x^2(x+2)} = 2x\sqrt{x+2}$.

Do đó $(4) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (2;1)$.

# Chuyên đề 4. Các bài toán liên quan đến tham số

## I. Tóm tắt lí thuyết

**Bài toán 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình f(x) = g(m) có nghiệm trên D**

***Phương pháp:*** Dựa vào tính chất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ hai đồ thị của hai hàm số y = f(x) và y = g(m) cắt nhau. Do đó để giải bài toán này ta tiến hành theo các bước sau:

1) Lập bảng biến thiên của hàm số y = f(x).

2) Dựa vào bảng biến thiên ta xác định m để đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

***Chú ý:*** Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên D và tồn tại $\min\limits_{x\in D} f(x) = m$, $\max\limits_{x\in D} f(x) = M$ thì phương trình: f(x) = k có nghiệm trên D khi và chỉ khi $m \le k \le M$.

**Bài toán 2: Tìm m để bất phương trình $f(x) \cdot g(m)$ có nghiệm trên D.**

***Phương pháp:*** Với dạng toán này trước hết ta đi khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D, rồi dựa vào các tính chất sau để chúng ta định giá trị của tham số:

1) Bất phương trình $f(x) \ge g(m)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} f(x) \ge g(m)$ (Với điều kiện tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$).

2) Bất phương trình $f(x) \le g(m)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le g(m)$ (Với điều kiện tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$).

## II. Các ví dụ minh họa

**Ví dụ 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$\sqrt{2x^2 - mx + 2m - 1} - x = 2$ có hai nghiệm phân biệt.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - mx + 2m - 1} = x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 - mx + 2m - 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - (m+4)x + 2m - 5 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 36 > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \\ x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 5 + 2(m+4) + 4 > 0 \\ m + 4 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{7}{4} \\ m > -8 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{7}{4}.$$

Vậy $m > -\dfrac{7}{4}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 2.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^2 - 2mx + 3m - 1} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 0.$$

***Lời giải***

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2 - 2mx + 3m - 1} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x^2 + (2m-3)x + 2 - 3m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta có: $2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Phương trình (*) có $\Delta = (2m-3)^2 - 4(2-3m) = 4m^2 + 1 > 0$

Suy ra (*) có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{3 - 2m - \sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 - 2m + \sqrt{\Delta}}{2}$

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 > \dfrac{1}{2} \\ x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta} < 2 - 2m \\ \sqrt{\Delta} < 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ \Delta < 4 - 8m + 4m^2 \\ \Delta < 4m^2 - 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ 3 - 8m > 0 \\ -4m > 0 \end{cases} \text{vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m$.

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m thì phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $x \geq 2$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-2)(x^3+6x^2-32-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+6x^2-32=m \end{array}\right.$$

Ta chứng minh: $x^3+6x^2-32=m$ có đúng 1 nghiệm thực thuộc khoảng $(2;+\infty)$.

Xét hàm số: $f(x)=x^3+6x^2-32$, với $x>2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+12x>0, \forall x>2$

Bảng biến thiên:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi $m>0$ thì phương trình $f(x)=m$ có đúng 1 nghiệm $x>2$.

Vậy với mọi $m>0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực.

**Ví dụ 4.** Tìm $m$ để phương trình: $x^2+2x+2m\sqrt{5-2x-x^2}=m^2+1$ có nghiệm.

***Lời giải***

Đặt $t=\sqrt{5-2x-x^2}=\sqrt{6-(x+1)^2} \Rightarrow t\in[0;\sqrt{6}]$ và $x^2+2x=5-t^2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-2mt+m^2-4=0$ (*) $\Leftrightarrow t=m\pm 2$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t\in[0;\sqrt{6}]$ hay

$$\left[\begin{array}{l} 0\le m+2\le\sqrt{6} \\ 0\le m-2\le\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le m\le\sqrt{6}-2 \\ 2\le m\le\sqrt{6}+2 \end{array}\right..$$

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng với $\forall m\ge 0$ thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$x^2+(m^2-\frac{5}{3})\sqrt{x^2+4}+2-m^3=0.$$

***Lời giải***

Đặt $t=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow t\ge 2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$f(t)=t^2+(m^2-\frac{5}{3})t-m^3-2=0 \quad (*).$$

Vì $m\ge 0 \Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm t phân biệt (Do $\Delta>0$)

và $f(2)=-(m^3-2m^2+\frac{4}{3})$.

Ta chứng minh: $m^3-2m^2+\frac{4}{3}>0\ \forall m\ge 0$ **(1)**.

* Nếu $m\ge 2 \Rightarrow m^3-2m^2\ge 0 \Rightarrow (1)$ đúng

* Nếu $0 \le m \le 2 \Rightarrow m^3 - 2m^2 + \frac{32}{27} = (m + \frac{2}{3})(m - \frac{4}{3})^2 \ge 0$

Suy ra $m^3 - 2m^2 \ge -\frac{32}{27} \Rightarrow m^3 - 2m^2 \ge \frac{4}{3} - \frac{32}{27} = \frac{4}{27} > 0 \Rightarrow (1)$ đúng.

Dẫn tới $f(2) < 0$ nên (*) luôn có một nghiệm $t > 2$.

Hay phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m > 0$.

**Ví dụ 6.** Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2m + 1 - 2x^2 + 4x.$$

***Lời giải***

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} \Rightarrow t \ge 1$.

Ta có phương trình: $f(t) = 2t^2 + t - 2m - 5 = 0$ **(1)**.

Xét phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = t$ (*).

* Nếu $t = 1$ thì (*) có một nghiệm $x = 1$

* Nếu $t > 1$ thì (*) có hai nghiệm x phân biệt

Dẫn đến phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $f(t) = 0$ có đúng một nghiệm $t > 1$.

Do $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$ nên ta chỉ có một trường hợp là: $a.f(1) < 0$

$\Leftrightarrow -2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m > -1$. Vậy $m > -1$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 7.** Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

1) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = m + \sqrt{(3+x)(6-x)}$

2) $\sqrt{1-m}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+m}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-m^2}$

3) $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$.

***Lời giải***

1) Điều kiện: $x \in [-3;6]$

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$ (*)

Áp dụng BĐT Côsi ta có $2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 9$ nên từ $(*) \Rightarrow 3 \le t \le 3\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$t = m + \frac{t^2 - 9}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 9 = -2m \qquad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t \in [3; 3\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t - 9$ với $t \in [3; 3\sqrt{2}]$, ta thấy f(t) là một hàm đồng biến

$\Rightarrow -6 = f(3) \le f(t) \le f(3\sqrt{2}) = 9 - 6\sqrt{2} \quad \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$

Do vậy (1) có nghiệm $t \in [3; 3\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow -6 \le -2m \le 9 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3$.

Vậy $\dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3$ là những giá trị cần tìm.

2) Điều kiện: $-1 < x < 1$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{1-x}{1+x}} = \sqrt[4]{\dfrac{2}{1+x} - 1} \Rightarrow t \in (0;+\infty)$ và phương trình trở thành:

$\sqrt{1+m}.t^2 - 2\sqrt[4]{(1-m)(1+m)}.t + \sqrt{1-m} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+m}.t = \sqrt[4]{1-m} \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{\dfrac{1-m}{1+m}}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{1-m}{1+m}} > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

3) Điều kiện: $x \ge 1$.

* $x = 1$ là nghiệm phương trình $\Leftrightarrow m = 0$.

* $x \ne 1$ chia hai vế PT cho $\sqrt[4]{x^2-1}$ ta được: $3\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} + m\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}} = 2$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 < t < 1 \quad \forall x > 1$ và phương trình trở thành:

$3t + \dfrac{m}{t} = 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t = -m$ (*).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t \in (0;1)$.

Vì $-\dfrac{1}{3} \le 3t^2 - 2t < 1 \ \forall t \in (0;1)$, suy ra (*) có nghiệm $t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m \le \dfrac{1}{3}$.

Vậy $-1 < m \le \dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 8.** Tìm $m$ để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1).\sqrt{x^2+1}.$$

***Lời giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(x^2+1) + 2(2x+1)^2 = m(2x+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{(2x+1)^2}{x^2+1} - m\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2 = 0$$

Đặt $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, ta có phương trình: $2t^2 - mt + 2 = 0$ (1)

Ta có: $t' = \dfrac{2\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $t$ | $-2$ | $\nearrow$ | $\sqrt{5}$ | $\searrow$ | $2$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- Với mỗi $\left[\begin{array}{l} t = \sqrt{5} \\ -2 < t \le 2 \end{array}\right.$ thì phương trình $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = t$ có đúng 1 nghiệm $x$
- Với mỗi $2 < t < \sqrt{5}$ thì phương trình $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = t$ có đúng 2 nghiệm $x$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{t} = \dfrac{m}{2}$ (do $t = 0$ không là nghiệm của phương trình)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t}, t \in \left(-2; \sqrt{5}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $\sqrt{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $-\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{6}{\sqrt{5}}$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < \dfrac{m}{2} < \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} < \dfrac{m}{2} < -2 \\ \dfrac{m}{2} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < m < 5 \\ -5 < m < -4 \\ m = \dfrac{12}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$.

**Ví dụ 9.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0 \quad (1).$

*Lời giải*

Điều kiện: $-3 \le x \le 1$.

Phương trình

$$\Leftrightarrow m(4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1) = 3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1} = m \qquad (2).$$

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên ta có thể đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \sqrt{1-x} = 2\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ với

$0 \le t \le 1$.

Khi đó (2) trở thành:

$$m = \frac{12t + 8(1-t^2) + 1 + t^2}{16t + 6(1-t^2) + t^2 + 1} = \frac{7t^2 - 12t - 9}{5t^2 - 16t - 7} = f(t) \quad (3).$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in [0;1]$.

Xét hàm số f(t) với $t \in [0;1]$, có

$$f'(t) = -\frac{52t^2 + 8t + 60}{(5t^2 - 16t - 7)^2} < 0 \quad \forall t \in [0;1]$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} = f(1) \le f(t) \le f(0) = \frac{9}{7} \quad \forall t \in [0;1].$$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{7}{9} \le m \le \frac{9}{7}$.

**Ví dụ 10.** Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt.

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} - 1 \quad (1).$$

*Lời giải*

Điều kiện: $|x| \le 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \ge 0 \Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le \sqrt{2} \\ 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2 \end{cases}$.

(1) trở thành: $m(t+2) = 1 - t^2 + t \Leftrightarrow m = \dfrac{-t^2 + t + 1}{t+2} = f(t) \quad (2)$.

Từ cách đặt t $\Rightarrow 1 - x^4 = \left(\dfrac{2-t^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{1 - \left(\dfrac{2-t^2}{2}\right)^2} \quad \forall t \in [0;\sqrt{2}]$

Suy ra với mỗi giá trị $t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$ ta có hai giá trị x, còn $t = 0 \Rightarrow x = 0$.

Mặt khác: $1-\left(\dfrac{2-t_1^2}{2}\right)^2=1-\left(\dfrac{2-t_2^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t_1^2=t_2^2 \Leftrightarrow t_1=t_2$

Do đó (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có đúng hai nghiệm $t\in(0;\sqrt{2}]$.

Xét hàm số f(t) với $t\in(0;\sqrt{2}]$, có:

$$f'(t)=\frac{-t^2-4t+1}{(t+2)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{5}-2.$$

Bảng biến thiên

| t | 0 | | $\sqrt{5}-2$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | | + | 0 | − | |
| f(t) | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $-2\sqrt{5}$ | ↗ | $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$ |

Dẫn tới (2) có hai nghiệm phân biệt $t\in\left(0;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow -2\sqrt{5}<m\le\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Vậy $-2\sqrt{5}<m\le\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 11.** Tìm $m$ để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$.

***Lời giải***

Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}; b=y+\dfrac{1}{y} \Rightarrow |a|\ge 2;\ |b|\ge 2$.

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8-m \end{cases}$$

Suy ra $a,b$ là nghiệm của phương trình:

$X^2-5X+8-m=0 \Leftrightarrow X^2-5X+8=m$ **(1)**

Hệ đã cho có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thỏa $|X|\ge 2$.

Xét tam thức thức $f(X)=X^2-5X+8$ với $|X|\ge 2$ ta có bảng biến thiên

| X | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(X) | $+\infty$ | ↘ | 22 | ////// | | ↘ | $\frac{7}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (1) có hai nghiệm thỏa $|X| \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 22 \\ \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \end{array}\right.$$

**Ví dụ 12.** Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x - y + m = 0 & (1) \\ y + \sqrt{xy} = 2 & (2) \end{cases}$.

*Lời giải*

Điều kiện: $xy \geq 0$

Ta thấy (2) là phương trình không chứa tham số nên ta sẽ giải quyết (2) trước

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được: $\dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4y - 4}{y} = f(y)$ (3).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $y \leq 2$. Xét hàm số $f(y)$ với $y \leq 2$

Ta có: $f'(y) = \dfrac{4}{y^2} > 0 \Rightarrow f(y)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$

$\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = 4$; $\lim\limits_{y \to 0^+} f(y) = -\infty$; $\lim\limits_{y \to 0^-} f(y) = +\infty$.

Ta có bảng biến thiên:

| y | $-\infty$ | | 0 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(y) | | + | \|\| | + | |
| f(y) | 4 | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | 2 |

Suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty; 2] \cup (4; +\infty)$.

**Ví dụ 13.** Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+1)^2 + y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có ba cặp nghiệm phân biệt.

*Lời giải*

Ta có: $x + \sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \end{cases}$

(do $x = 0$ không là nghiệm phương trình).

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $3x^2 + 6x + \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = m - 3$ (a).

Hệ có ba cặp nghiệm $\Leftrightarrow$ (a) có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \leq 1$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 3x^2 + 7x - 2 + \frac{1}{x}$ với $x \le 1$.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| f(x) | $+\infty$ | $\searrow$ | $-7$ | $\nearrow$ | $-\frac{27}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert -\infty$ | $\searrow$ | $\frac{11}{3}$ | $\nearrow$ | $9$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (a) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{11}{3} \le m - 3 \le 9 \\ -7 \le m - 3 \le -\frac{27}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{20}{3} \le m \le 12 \\ -4 \le m \le \frac{-15}{4} \end{array}\right..$$

Vậy $\frac{20}{3} \le m \le 12$ hoặc $-4 \le m \le \frac{-15}{4}$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 14**. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm (x; y) thoả mãn điều kiện $x \ge 4$.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \le a & (2) \end{cases}.$$

***Lời giải***

Điều kiện: $x, y \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 - t$, do $\begin{cases} x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \le t \le 3$.

Khi đó (2) trở thành: $a \ge \sqrt{t^2 + 5} + \sqrt{t^2 - 6t + 12} = f(t)$ (3).

Xét hàm số f(t) với $t \in [2; 3]$, có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 5}} + \frac{t - 3}{\sqrt{t^2 - 6t + 12}}$

$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{(t-3)^2 + 3} = (3 - t)\sqrt{t^2 + 5}$ (*)

$\Rightarrow t^2(t-3)^2 + 3t^2 = (3-t)^2 t^2 + 5(3-t)^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 30t + 45 = 0$

Phương trình vô nghiệm vì $t \in [2; 3]$

BBT:

| $t$ | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $5$ | $\nearrow$ | $\sqrt{14}+\sqrt{3}$ |

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in [2;3] \Leftrightarrow a \ge \min\limits_{[1;2]} f(t) = f(2) = 5$.

Vậy $a \ge 5$ là những giá trị cần tìm.

**Ví dụ 15.** Tìm giá trị thực $m$ để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \quad (1) \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \quad (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

(***Trích Đề thi ĐH khối D - 2011***).

***Lời giải***

Hệ phương trình đã cho viết lại: $\begin{cases} (x^2 - x)(2x - y) = m & (1) \\ (x^2 - x) + (2x - y) = 1 - 2m & (2) \end{cases}$

Dễ thấy phương trình trong hệ đã cho không phải là 1 đa thức đối xứng đối với $x$ và $y$. Nhưng ta có thể nhận ra tính bất biến của bài toán

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \left(u \ge -\dfrac{1}{4}\right) \\ v = 2x - y \ (v \in \mathbb{R}) \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m, \left(u \ge -\dfrac{1}{4}\right) \end{cases} (*)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = (1-2m) - u \\ -u^2 + u = m(2u+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ \dfrac{-u^2 + u}{2u+1} = m \ (3) \end{cases}$$

Đặt $f(u) = \dfrac{-u^2 + u}{2u+1}$, $u \ge -\dfrac{1}{4}$

Ta có: $f(u) = \dfrac{-2u^2 - 2u + 1}{(2u+1)^2}$, $u \in \left(-\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$: $f'(u) = 0 \Rightarrow u = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

| $u$ | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(u)$ | $-\frac{5}{8}$ | $\nearrow$ | $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{1}{4}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \le \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1.** Tìm m để phương trình

1) $\sqrt{2x^2+mx-3}=x+1$ có hai nghiệm phân biệt
2) $\sqrt{2x^2-mx}-\sqrt{x^2-4}=0$ có nghiệm
3) $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt
4) $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$ có nghiệm
5) $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$ có nghiệm
6) $m\sqrt{x^2+2}=x+m$ có đúng ba nghiệm phân biệt
7) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$ có nghiệm
8) $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm
9) $\sqrt{x^3-2x^2-2x-m^3+3m^2+1}=x-1$ có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 2.** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$m(x^2+3x)+\sqrt{(4-3x-x^2)^3}=4m-1.$$

**Bài 3.** Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

1. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}\ge m$
2. $mx-\sqrt{x-3}\le m+1$

**Bài 4.** Tìm m để phương trình

1) $\sqrt{x^4-4x^3+16x+m}+\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=6$ có đúng hai nghiệm phân biệt
2) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm
3) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=m$ có nghiệm
4) $m(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4})-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$ có nghiệm
5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(x+1)(8-x)}=m$ có nghiệm
6) $\sqrt{x^4+4x+m}+\sqrt[4]{x^4+4x+m}=6$ có nghiệm
7) $\sqrt{x-1}+4m\sqrt[4]{x^2-3x+2}+(m+3)\sqrt{x-2}=0$ có nghiệm
8) $m(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{25-x^2})+2\sqrt{(x^2-9)(25-x^2)}=5m$ có nghiệm
9) $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2}=\sqrt{16-x^4}+m(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2})+m$ có nghiệm.

**Bài 5.** Tìm m để bất phương trình

1) $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]$
2) $\sqrt{(4+x)(6-x)}\le x^2-2x+m$ nghiệm đúng $\forall x\in[-4;6]$.
3) $\sqrt{x^2-3x+2}\ge m-\sqrt{x^2-3x+4}$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 3$
4) $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+m\sqrt{3x-x^2}-3\le 0$ nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$.