NGƯT. ThS. LÊ HOÀNH PHÒ

2 trong 1

Các chuyên đề

BÁM SÁT ĐỀ THI

THPT QUỐC GIA

LƯỢNG GIÁC & TỌA ĐỘ PHẲNG

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NHÀ GIÁO ƯU TÚ
LÊ HOÀNH PHÒ

CÁC CHUYÊN ĐỀ
BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

LƯỢNG GIÁC
TỌA ĐỘ PHẲNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: *Biên tập – Chế bản:* (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN NGỌC THẮNG
Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH
Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN
20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q1 - TP. Hồ Chí Minh

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC CHUYÊN ĐỀ BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA
LƯỢNG GIÁC - TOẠ ĐỘ PHẲNG

Mã số: 1L-336ĐH2015
In 2.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Địa chỉ: Số 6 Nguyễn Trung Trực - P5 - Q. Bình Thạnh - TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 1439- 2015/CXBIPH/4–217/ĐHQGHN, ngày 3/6/2015.
Quyết định xuất bản số: 345LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 22/6/2015
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2015.

LỜI NÓI ĐẦU

Các Em học sinh thân mến!

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 12 chuẩn bị thật tốt cho **KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA** đạt điểm khá, điểm cao để trúng tuyển vào các trường Cao đẳng, Đại học mà mình đã xác định nghề nghiệp cho tương lai, theo định hướng mới.

Bộ sách này gồm 8 cuốn cho 8 chuyên đề, để các em tiện dùng trong ôn luyện theo chương trình học và trước kỳ thi:

- KHẢO SÁT HÀM SỐ

- HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT

- NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

- SỐ PHỨC VÀ TỔ HỢP

- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

- LƯỢNG GIÁC VÀ TỌA ĐỘ PHẲNG

- PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Cuốn **LƯỢNG GIÁC VÀ TỌA ĐỘ PHẲNG** gồm có 14 phần nhỏ để tiện luyện tập theo chủ đề. Từ các kiến thức và phương pháp giải Toán căn bản và nâng cao dần dần, kết hợp ôn tập Toán lớp 10 và 11, bổ sung và mở rộng kiến thức và phương pháp giải khác nhau, luyện tập thêm Toán khó, Toán tổng hợp, các bạn rèn luyện kỹ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán trong kiểm tra, thi cử.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những sai sót mà tác giả chưa thấy hết, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc, học sinh để lần in sau bộ sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

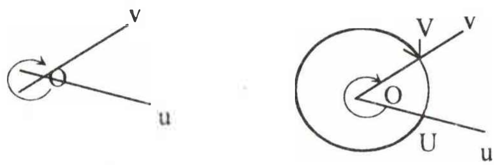
Đơn vị và cung góc lượng giác

- Cung tròn bán kính R, có độ dài l, có số đo radian là α ($0 \le \alpha \le 2\pi$), có số đo a^o ($0 \le a \le 360$) thì:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi a}{180},\ a = \frac{\alpha.180}{\pi};$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad},\ 1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \text{ và } l = R\alpha.$$

- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo độ hay radian của nó.



- Cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ được xác định bởi mút đầu, mút cuối và số đo của nó trên đường tròn định hướng. Chiều quay dương là ngược chiều quay kim đồng hồ.

Giá trị lượng giác

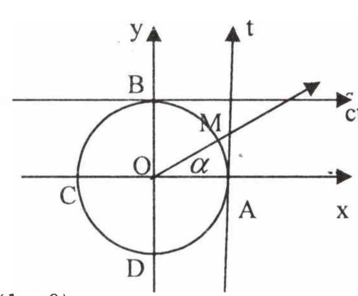
Đường tròn lượng giác là đường tròn đơn vị (R = 1), định hướng, với điểm gốc A(1 ; 0). Cho góc lượng giác α, xét điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi α: (OA, OM) = α..

Nếu M có toạ độ (x ; y) thì

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$;

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *(khi* $\cos\alpha \ne 0$*) ;*

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ *(khi* $\sin\alpha \ne 0$*).*



Trục sin là trục tung Oy.

Trục cosin là trục hoành Ox.

Trục tang là At cùng hướng với trục tung, A(1 ; 0).

Trục cotang là Bs cùng hướng với trục hoành, B(0 ; 1).

Hệ thức cơ bản

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\quad\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\quad\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$ (với $k \in \mathbb{Z}$);

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (khi $\cos\alpha \neq 0$) ; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (khi $\sin\alpha \neq 0$)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Chú ý:

1) Sử dụng hệ thức cơ bản, các hằng đẳng thức để tính các giá trị lượng giác khi biết một giá trị cho trước, chú ý dấu tương ứng với toạ độ M(x ; y) thuộc góc phần tư nào? Dấu của tan α, cot α là như nhau.

2) Dùng kỹ thuật đẳng cấp bậc n để chia $\sin^n x$, $\cos^n x$ khác 0 tạo ra $\tan^n x$, $\cot^n x$.

3) Để chứng minh hệ thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản và các hằng đẳng thức. Có thể chứng minh đẳng thức bởi biến đổi vế này thành vế kia, hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng. Nếu cần đặt ẩn phụ.

Bài toán 1.1: Kim phút và kim giờ theo thứ tự dài 1, 75 m và 1, 26 m. Hỏi trong 15 phút, kim phút và kim giờ vạch trên cung tròn dài bao nhiêu?

Giải

Trong 15 phút, mũi kim phút vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{2}$. 1, 75 ≈ 2, 75 (m) và mũi kim giờ vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{24}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{24}$. 1, 26 ≈ 0, 16 (m).

Bài toán 1.2: Kim giờ và kim phút bắt đầu chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (0 giờ). Sau t giờ, kim giờ đến vị trí tia Ou, kim phút đến vị trí tia Ov. Hai kim trùng nhau lần đầu tiên sau bao lâu?

Giải

Trong một giờ, kim phút quét góc lượng giác có số đo -2π, kim giờ quét góc lượng giác có số đo $-\frac{2\pi}{12}$, nên trong t giờ, kim phút quét góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $-2\pi t$, kim giờ quét góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\frac{\pi}{6}t$.

Theo hệ thức Salơ:

sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + $n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$= -2\pi t + \frac{\pi}{6}t + 2n\pi = \left(-\frac{11}{6}t + 2n\right)\pi$$

Hai tia Ou và Ov trùng nhau khi và chỉ khi:

$$(Ou, Ov) = 2m\pi\ (m \in \mathbf{Z}) \text{ nên } -\frac{11t}{6} + 2n = 2m \Leftrightarrow \frac{11t}{6} = 2(n - m)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{12k}{11},\ k \in \mathbf{Z}, \text{ vì } t \geq 0 \text{ nên } k \in \mathbf{N}.$$

Do đó hai kim trùng nhau lần đầu tiên sau $\frac{12}{11}g \approx 1g5'27''$

Bài toán 1.3: Tính giá trị lượng giác các góc với k nguyên:

a) $-\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

Giải

a) Ta có: $-\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ nên:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2};\ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3},\ \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Xét k chẵn và k lẻ, gộp lại thì được:

$$\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \cot(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 1\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Bài toán 1.4: Tính các giá trị lượng giác của góc α biết:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$ b) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Giải

a) Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ và $\sin\alpha < 0$ nên:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{15},\ \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

b) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$ nên:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \cot\alpha = 2\sqrt{2}.$$

Bài toán 1.5: Tính các giá trị lượng giác của góc α biết:

a) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha < 0$ b) $\cot\alpha = -3$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Giải

a) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2$. Vì $-\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$

Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Và $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{3}$. Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0$

Ta có: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

Và $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha.\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Bài toán 1.6: Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính:

a) $A = \sin\alpha + \cos\alpha$ b) $B = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $C = \frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$.

Giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $\tan\alpha > 0$. Ta có:

$$\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6 \Leftrightarrow \tan\alpha - \frac{3}{\tan\alpha} - 6 = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - 6\tan\alpha - 3 = 0$$

Vì $\tan\alpha > 0$ nên chọn $\tan\alpha = 3 + 2\sqrt{3}$.

a) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{22+12\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$, $\sin\alpha = -\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$

Do đó: $A = \sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$.

b) $B = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2(3+2\sqrt{3})}{22+12\sqrt{3}}$

$$C = \frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(2 - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}$$

$$= \tan^2\alpha.\ \frac{2\cos\alpha - 1}{\sin\alpha + 1} = (21+12\sqrt{3}).\frac{2+\sqrt{22+12\sqrt{3}}}{3+2\sqrt{3}-\sqrt{22+12\sqrt{3}}}.$$

Bài toán 1.7: Cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính

$$A = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\quad;\quad B = \frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}.$$

Giải

Vì $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$ nên $\cos\alpha \neq 0$, chia tử và mẫu của hai biểu thức lần lượt cho $\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$, ta có:

$$A = \frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{\dfrac{3}{5}+1}{\dfrac{3}{5}-1} = -4;\ B = \frac{3\tan^2\alpha + 12\tan\alpha + 1}{\tan^2\alpha + \tan\alpha - 2} = \frac{232}{-26} = -\frac{116}{13}.$$

Bài toán 1.8: Tính: $\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c$, biết

$\tan^2a\tan^2b + \tan^2b\tan^2c + \tan^2c\tan^2a + 2\tan^2a\tan^2b\tan^2c = 1$.

Giải

Từ giả thiết, thay $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ thì được:

$$\sin^2a\sin^2b\cos^2c + \sin^2b\sin^2c\cos^2a + \sin^2c\sin^2a\cos^2b + 2\sin^2a\sin^2b\sin^2c = \cos^2a\cos^2b\cos^2c$$

$$\Rightarrow \sin^2a\sin^2b + \sin^2b\sin^2c + \sin^2c\sin^2a - \sin^2a\sin^2b\sin^2c = (1-\sin^2a)(1-\sin^2b)(1-\sin^2c).$$

Từ đó thì có $\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c = 1$.

Bài toán 1.9: Cho $2\sin a + 3\cos a = 2$. Tính tan a.

Giải

Ta có: $2\sin a + 3\cos a = 2 \Rightarrow 3\cos a = 2 - 2\sin a$

$\Rightarrow 9\cos^2a = (2 - 2\sin a)^2 \Rightarrow 13\sin^2a - 8\sin a - 5 = 0$

$\Rightarrow \sin a = 1$ hoặc $\sin a = -\dfrac{5}{13}$.

Xét sina = 1 ⇒ cosa = 0 ⇒ tana không xác định (Loại)

Xét sina = $-\dfrac{5}{13}$ ⇒ cosa = $\dfrac{12}{13}$ ⇒ tan a = $-\dfrac{5}{12}$.

Bài toán 1.10: Chứng minh hệ thức:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ b) $1 - \cot^4\alpha = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$.

Giải

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$

b) $1 - \cot^4\alpha = (1 + \cot^2\alpha)(1 - \cot^2\alpha)$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\frac{\sin^2\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin^4\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^4\alpha}.$$

Bài toán 1.11: Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$

b) $2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) = (1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Giải

a) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\alpha$

b) $2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) = 2 - 2\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= (1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Bài toán 1.12: Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha} = \dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$.

Giải

a) $$VT = \frac{1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}$$

$$= \frac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\left[\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-\left(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)\right]} = \frac{2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2}{3\cos^2\alpha}.$$

b) $VP = \dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)} = \dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}$.

Bài toán 1.13: Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \tan\alpha\tan\beta$ b) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x\cos^2 x$.

Giải

a) $VT = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\beta} - \dfrac{1}{\tan\alpha}} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha.\tan\beta}} = \tan\alpha\tan\beta$

b) $VT = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha.\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}$

$= \sin^2\alpha.\cos^2\alpha\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sin^2\alpha.\cos^2\alpha.$

Bài toán 1.14: Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1 - 4\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2$ b) $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$.

Giải

a) $VT = \dfrac{1 - 4\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 4\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2$.

b) $VT = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = \dfrac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)} = \tan^4 x$.

Bài toán 1.15: Tính gọn:

a) $A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

b) $B = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$

Giải

a) Ta có: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3$

$- 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Và $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Do đó: $A = 2 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 3(1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 2 - 3 = -1$.

b) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4(1-\sin^2\alpha)} = \sqrt{(2-\sin^2\alpha)^2} = |2-\sin^2\alpha| = 2-\sin^2\alpha$

$$\sqrt{\cos^4\alpha + 4(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{(2-\cos^2\alpha)^2} = |2-\cos^2\alpha| = 2-\cos^2\alpha$$

Do đó: $B = 4 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 4 - 1 = 3$.

Bài toán 1.16: Tính gọn:

a) $A = \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$ (điều kiện có nghĩa).

b) $B = \dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}.\cot^6 x$ (điều kiện có nghĩa).

Giải

a) $$A = \frac{2}{\tan\alpha - 1} + \frac{\dfrac{1}{\tan\alpha} + 1}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - 1} = \frac{2}{\tan\alpha - 1} + \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{\tan\alpha - 1} = -1.$$

b) $$B = \frac{\sin^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)}.\cot^6 x = \frac{\sin^2 x.\tan^2 x}{\cos^2 x.\cot^2 x}.\cot^6 x = 1.$$

Bài toán 1.17: Tính gọn:

a) $M = 2\cos^4x - \sin^4x + \sin^2x.\cos^2x + 3\sin^2x$

b) $N = \sin^2y.\tan^2y + 4\sin^2y - \tan^2y + 3\cos^2y$

Giải

a) Đặt $a = \sin^2x$ thì $\cos^2x = 1 - a$

$M = 2(1 - a)^2 - a^2 + a(1 - a) + 3a = 2$.

b) $N = -\tan^2y(1 - \sin^2y) + 4\sin^2y + 3\cos^2y = -\tan^2y.\cos^2y + 4\sin^2y + 3\cos^2y$

$= -\sin^2y + 4\sin^2y + 3\cos^2y = 3(\sin^2y + \cos^2y) = 3$.

Bài toán 1.18: Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$ b) $|\tan x + \cot x| \ge 2, x \ne k\dfrac{\pi}{2}$.

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 \le 2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x \le 2$

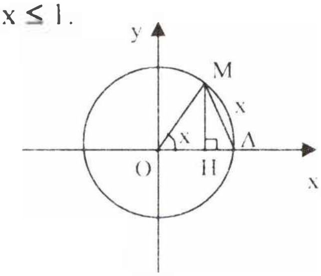
$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x\cos x \ge 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 \ge 0$: Đúng

b) Vì tanx, cotx cùng dấu nên:

$|\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \ge 2\sqrt{|\tan x.\cot x|} = 2$

Bài toán 1.19: Chứng minh bất đẳng thức

a) $\sin x \le x,\ \forall x > 0$ b) $\sin^4 x + \cos^{12} x \le 1$.



Giải

a) Xét $x \ge 1$ thì $\sin x \le 1 \le x$

Xét $0 < x < 1$ thì $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có $\sin x = MH < MA = \text{đđ}\,\overset{\frown}{MA} = x$

b) Vì $|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1$ nên:

$\sin^4 x \le \sin^2 x,\ \cos^{12} \le \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x + \cos^{12} x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bài toán 1.20: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

a) $y = 4 - 3\sin x$ b) $y = 6|\cos x| - 1$.

Giải

a) Vì $-1 \le \sin x \le 1,\ \forall x$ nên $1 \le y \le 7$. Vậy $\max y = 7$, $\min y = 1$.

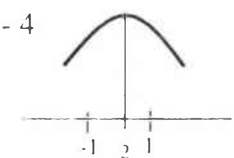
b) Vì $0 \le |\cos x| \le 1,\ \forall x$ nên $-1 \le y \le 5$. Vậy $\max y = 5$, $\min y = -1$.

Bài toán 1.21: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

a) $y = \sin^2 x + \cos x - 5$ b) $y = 2\tan^2 x - 8\tan x + 3$

Giải

a) $y = \sin^2 x + \cos x - 5 = 1 - \cos^2 x + \cos x - 5 = -\cos^2 x + \cos x - 4$

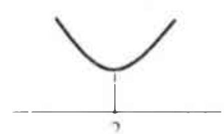


Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$ thì: $y = f(t) = -t^2 + t - 4$ là parabol

có đỉnh $t = \frac{1}{2}$, hệ số $a = -1 < 0$ nên:

$\max y = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}$

$\min y = f(-1) = -6$.



b) Đặt $t = \tan x$, $t \in \mathbb{R}$, ta có:

$y = f(t) = 2t^2 - 8t + 3$ là parabol có đỉnh $t = 2$,

hệ số $a = 2 > 0$ nên không tồn tại $\max y$, còn $\min y = f(2) = -5$.

BÀI TẬP

Bài tập 1.1: Kim giờ và kim phút bắt đầu chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (0 giờ). Sau t giờ, kim giờ đến vị trí tia Ou, kim phút đến vị trí tia Ov. Chứng minh trong vòng 12 giờ, hai tia Ou, Ov đối nhau khi và chỉ khi $t = \frac{6}{11}(2k+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.

HD-ĐS

Hai tia Ou, Ov đối nhau khi và chỉ khi $(Ou, Ov) = (2m-1)\pi\ (m \in \mathbb{Z})$ nên

$-\frac{11t}{6} + 2n = 2m - 1 \Leftrightarrow t = \frac{6}{11}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 \le t \le 12$ nên $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Bài tập 1.2: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

HD-ĐS

a) Trong 1", bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792^o.

b) Trong 1" bánh xe lăn được: $l \approx 282$ (m)

Bài tập 1.3:

a) Cho sinxcosx = n. Tính $A = \sin x + \cos x$; $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) Cho tanx + cotx = m. Tính $C = \tan^2 x + \cot^2 x$; $D = \tan^3 x + \cot^3 x$

HD-ĐS

a) $A^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + 2n \Rightarrow A = \pm\sqrt{1+2n}$ $\left(n \geq -\frac{1}{2}\right)$

$B = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2n^2$

b) $C = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha = m^2 - 2$.

$D = (\tan\alpha + \cot\alpha)(\tan^2\alpha - \tan\alpha.\cot\alpha + \cot^2\alpha) = m(m^2 - 3)$.

Bài tập 1.4: Tính các giá trị lượng giác khác của α biết:

a) $\cos\alpha = 3/3$, $\sin\alpha < 0$

b) $\sin\alpha = -1/8$, $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$

c) $\tan\alpha = 7$, $-\pi < \alpha < 0$

d) $\cot\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\cos\alpha > 0$

HD-ĐS

Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý dấu của giá trị lượng giác.

Bài tập 1.5: Cho tanα = -2. Tính:

$$A = \frac{2\sin\alpha + 7\cos\alpha}{\cos\alpha - 5\sin\alpha},\ B = \frac{9\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 1}$$

HD-ĐS

Chia tử và mẫu lần lượt cho $\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$.

Bài tập 1.6: Chứng minh:

a) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

b) $\tan x.\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$.

HD-ĐS

Sử dụng hệ thức cơ bản.

Bài tập 1.7: Tính gọn:

$A = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

$$B = \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$$

HD-ĐS

$A = 1,$ $\qquad\qquad B = \frac{3}{2}.$

Bài tập 1.8: Chứng minh đẳng thức: $|3\sin a - 4\cos a| \le 5, \forall a$.

HD-ĐS

BĐT $\Leftrightarrow (3\sin a - 4\cos a)^2 \le 25 \Leftrightarrow (4\sin a + 3\cos a)^2 \ge 0$.

Bài tập 1.9: Chứng minh đẳng thức với a, b, c là những góc nhọn:

$\tan a(\cot b + \cot c) + \tan b(\cot c + \cot a) + \tan c(\cot a + \cot b) \ge 6$.

HD-ĐS

Vì a, b, c nhọn nên tana, tanb, tanc dương. Áp dụng BĐT Côsi:

$$\frac{\tan a}{\tan b} + \frac{\tan b}{\tan a} \ge 2\ ;\ \frac{\tan b}{\tan c} + \frac{\tan c}{\tan b} \ge 2\ ;\ \frac{\tan c}{\tan a} + \frac{\tan a}{\tan c} \ge 2.$$

2 GÓC CUNG LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Giả sử các biểu thức có nghĩa

Đối nhau:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\qquad \cos(-\alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$;

Hơn kém

π: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$; $\qquad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$;

Bù nhau:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$;

Phụ nhau:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$;

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$.

Bài toán 2.1: Không dùng bảng và máy tính, tính:

a) $A = \cos 315^o + \sin 330^o + \sin 250^o - \cos 160^o$;

b) $B = \sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

Giải

a) $\cos 315^o = \cos(-45^o) = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 330^o = -\sin 30^o = -\frac{1}{2}$

$\sin 250^o = -\sin 110^o = -\sin(90^o + 20^o) = -\cos 20^o$; $\cos 160^o = -\cos 20^o$.

Do đó: $A = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

b) $\sin\frac{25\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$. Do đó: $B = 0$.

Bài toán 2.2: Không dùng bảng và máy tính, tính:

a) $A = \sin^2 10^o + \sin^2 20^o + \sin^2 30^o + \ldots + \sin^2 80^o$

b) $B = \cos 10^o + \cos 20^o + \cos 30^o + \ldots + \cos 180^o$

c) $C = \tan 1^o . \tan 3^o . \tan 5^o \ldots \tan 89^o$.

Giải

a) $A = (\sin^2 10^o + \sin^2 80^o) + (\sin^2 20^o + \sin^2 70^o)$
$+ (\sin^2 30^o + \sin^2 60^o) + (\sin^2 40^o + \sin^2 50^o)$
$= (\sin^2 10^o + \cos^2 10^o) + (\sin^2 20^o + \cos^2 20^o)$
$+ (\sin^2 30^o + \cos^2 30^o) + (\sin^2 40^o + \cos^2 40^o) = 4.$

b) $B = (\cos 10^o + \cos 170^o + (\cos 20^o + \cos 160^o) + \ldots$
$+ (\cos 80^o + \cos 100^o) + \cos 90^o + \cos 180^o = 0 + 0 - 1 = -1$

c) $C = (\tan 1^o \tan 89^o)(\tan 3^o \tan 87^o) \ldots (\tan 43^o \tan 47^o)\tan 45^o$
$= (\tan 1^o \cot 1^o)(\tan 3^o \cot 3^o) \ldots (\tan 43^o \cot 43^o). 1 = 1.$

Bài toán 2.3:

a) Cho $\tan 15^o = 2-\sqrt{3}$. Tính các giá trị lượng giác của góc -75^o.

b) Cho $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$. Tính $\cos(2\pi - \alpha)$, $\tan(\alpha - 7\pi)$, $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

Giải

a) $1 + \tan^2 45^o = \frac{1}{\cos^2 15} \Rightarrow \cos^2 15^o = \frac{1}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos 15^o = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\sin 15^o = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Vì $75^o = 90^o - 15^o$ nên $\cos(-75^o) = \cos 75^o = \sin 15^o = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin(-75^o) = -\sin(90^o - 15^o) = -\cos 15^o = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\tan(-75^o) = -\cot 15^o = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -(\sqrt{3} + 2)$; $\cot(-75^o) = -\tan 15^o = \sqrt{3} - 2$

b) $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$. Do đó:

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan(\alpha - 7\pi) = \tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = \mp\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 2.4: a) Tính $\cos\alpha$ biết $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

b) Tính $\sin\alpha$ biết: $\cot(\alpha + 540^o) - \tan(\alpha - 90^o) = \sin^2(725^o) + \cos^2(365^o)$.

Giải

a) Từ giả thiết thì: $-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 1 = \cos\alpha \Rightarrow -\cos\alpha + 1 = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

b) Từ giả thiết thì: $\cot\alpha + \cot\alpha = \sin^2 50^o + \cos^2 50^o = 1 \Rightarrow 2\cot\alpha = 1$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{2}$. Ta có: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 2.5: Lập quan hệ các giá trị lượng giác của 2 góc:

a) α và $\alpha - \frac{\pi}{2}$

b) α và $\alpha - \frac{3\pi}{2}$

Giải

a) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$.

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$.

$\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\tan\alpha$; $\cot(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cot\alpha$.

b) $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$.

$\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$.

$\tan(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\cot\alpha$; $\cot(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\tan\alpha$.

Bài toán 2.6: Tính gọn:

$P = \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$;

$Q = 2\cos x - 3\cos(\pi + x) - 5\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(\frac{3\pi}{2} - x)$.

Giải

$P = -\sin x + \cos(-x) + \sin x - \cos x = \cos x - \cos x = 0$.

$Q = 2\cos x + 3\cos x - 5\cos x + \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.

Bài toán 2.7: Tính gọn:

$A = \tan 18^\circ \tan 288^\circ + \sin 32^\circ . \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$

$B = \dfrac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$.

Giải

$A = \tan(90^\circ - 72^\circ)\tan(360^\circ - 72^\circ) + \sin 32^\circ \sin(180^\circ - 32^\circ)$
$\qquad - \sin(360^\circ - 58^\circ)\sin(180^\circ - 58^\circ)$
$= \cot 72^\circ(-\tan 72^\circ) + \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ$
$= -1 + \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = -1 + 1 = 0$.

$$B = \frac{\cos(72^\circ - 360^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(18^\circ - 180^\circ)\sin(180^\circ - 72^\circ)} - \tan 18^\circ = \frac{\cos 72^\circ \cot 72^\circ}{\tan 18^\circ \sin 72^\circ} - \tan 18^\circ$$

$$= \frac{\cot^2 72^\circ}{\tan 18^\circ} - \tan 18^\circ = \frac{\tan^2 18^\circ}{\tan 18^\circ} - \tan 18^\circ = 0.$$

Bài toán 2.8: Tính gọn:

$R = \cos(\pi - x) - 2\sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x)$.

$S = \tan(-3,1\pi).\cos(5,9\pi) + \sin(-3,6\pi)\cot(-5,6\pi)$.

Giải

$R = -\cos x + 2\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(-x)$

$= -\cos x + 2\cos x + \cot x - \cot x = \cos x$.

$S = \tan(-0,1\pi).\cos(0,1\pi) + \sin(0,4\pi).\cot(0,4\pi)$

$= -\tan(0,1\pi).\cos(0,1\pi) + \cos(0,4\pi)$

$= -\sin(0,1\pi) + \cos(0,4\pi) = 0$.

Bài toán 2.9: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác, chứng minh:

a) $\sin(A + B) = \sin C$ b) $\cos(A + B) = -\cos C$

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ d) $\tan\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2}$.

Giải

A, B, C là 3 góc tam giác nên $A + B + C = \pi$.

a) $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$

b) $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{\pi - C}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$.

d) $\tan\frac{A+B}{2} = \tan\frac{\pi - C}{2} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cot\frac{C}{2}$.

Bài toán 2.10: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác, chứng minh:

a) $\sin\frac{3(A+B)}{2} = -\cos\frac{3C}{2}$ b) $\cot\frac{3(A+B)}{2} = \tan\frac{3C}{2}$

c) $\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2} = 2$.

Giải

A, B, C là 3 góc tam giác nên $A + B + C = \pi$

a) $\sin\frac{3(A+B)}{2} = \sin\frac{3(\pi - C)}{2} = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = \cos\frac{3C}{2}$.

b) $\cot\frac{3(A+B)}{2} = \cot\frac{3(\pi - C)}{2} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = \tan\frac{3C}{2}$.

c) $\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2}+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2}$

$=\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2}=1+1=2.$

BÀI TẬP

Bài tập 2.1: Tính $\sin(\pi/2+k\pi)$; $\cos(-\pi/6+k\pi)$; $\tan(60^0+k180^0)$

HD-ĐS

$\sin(\pi/2+k\pi)$ và $\cos(-\pi/6+k\pi)$ xét k chẵn và k lẻ;

$\tan(60^0+k180^0)=\tan60^0=\sqrt{3}$.

Bài tập 2.2: Đơn giản:

$A=\cos(\pi-x)+\sin(x-\frac{3\pi}{2})-\tan(\frac{\pi}{2}+x)\cot(\frac{3\pi}{2}-x)$

$B=\cos(270^o-x)-2\sin(x-450^o)+\cos(x+900^o)+2\sin(720^o-x)$;

HD-ĐS

Dùng các góc có liên quan đặc biệt.

Bài tập 2.3: Đơn giản:

$C=\cos(5\pi+\alpha)-2\sin(\frac{11\pi}{2}-\alpha)-\sin(\frac{11\pi}{2}+\alpha)$

$D=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)+\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)$

HD-ĐS

Dùng các góc có liên quan đặc biệt.

Bài tập 2.4: Tính gọn:

$D=\frac{\sin(-4,8\pi).\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)}+\frac{\cos(-6,7\pi).\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}$.

$E=\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{18}+\sin^2\frac{7\pi}{18}$.

HD-ĐS

D = 1, E = 3

Bài tập 2.5: Tính gọn:

$F=\sin825^o\cos(-15^o)+\cos75^o\sin(-555^o)+\tan155^o\tan245^o$

$G=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+...+\cos\frac{9\pi}{9}$.

HD-ĐS

F = 0; G = -1.

Bài tập 2.6: Tính gọn:

$$H = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + ... + \cos\frac{9\pi}{5}$$

$$K = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin 2\frac{2\pi}{n} + \sin 3\frac{2\pi}{n} + ... + \sin n\frac{2\pi}{n}$$

HD-ĐS

H = -1, K = 0.

3 CÔNG THỨC CỘNG VÀ CÔNG THỨC NHÂN

Công thức cộng

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Công thức nhân, hạ bậc hai

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Công thức nhân ba

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Chú ý:

1) Vận dụng công thức cộng, công thức nhân, công thức hạ bậc, công thức biến đổi để đưa về góc đặc biệt đã biết.

2) Phối hợp với các hệ thức cơ bản và các công thức về góc liên quan đặc biệt: đối, bù, phụ, hơn kém $\frac{\pi}{2}$, hơn kém π.

3) Ghép giá trị lượng giác của góc nhân đôi liên tiếp. Nếu cần nhân chia thêm giá trị lượng giác sin hay cos của góc đầu.

4) $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$, $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha \mp \frac{\pi}{4})$

5) Đặt $t = \tan\frac{\alpha}{2}$ *thì:* $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha.$$

Bài toán 3.1: Tính các giá trị lượng giác của góc:

a) 75^o b) 15^o.

Giải

a) $\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o) = \cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o$.

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\sin 75^o = \sin(45^o + 30^o) = \sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$\tan 75^o = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$; $\cot 75^o = 2 - \sqrt{3}$.

b) $\cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o \cos 30^o + \sin 45^o \sin 30^o$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \sin 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\tan 15^o = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$; $\cot 15^o = 2 + \sqrt{3}$

Nhận xét: Hai góc 75^o và 15^o phụ nhau nên $\cos 15^o = \sin 75^o$;...

Ta có thể sử dụng công thức hạ bậc hai:

$2\cos^2 15^o = 1 + \cos 30^o = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 15^o = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$2\sin^2 15^o = 1 - \cos 30^o = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 15^o = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\tan 15^o = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$; $\cot 15^o = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 3.2: Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α và $\frac{\alpha}{2}$.

Giải

Vì $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Do đó:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ta có: $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$

$$\tan 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7};\ \cot 2\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$ đều dương

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$$

Từ đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$; $\cot\frac{\alpha}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 3.3: Không dùng máy, tính:

a) $A = \sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}$ b) $B = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$.

Giải

a) $A = \sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3}).$$

b) Ta có: $\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$.

nên: $B.\ \sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}.$$

Do đó $B = -\frac{1}{8}$.

Bài toán 3.4: Không dùng máy, tính: $A = \cos 20^o . \cos 40^o . \cos 80^o$

Giải

Ta có $A. \sin 20^o = \sin 20^o . \cos 20^o . \cos 40^o . \cos 80^o$

$$= \frac{1}{2}\sin 40^o . \cos 40^o . \cos 80^o = \frac{1}{4}\sin 80^o . \cos 80^o$$

$$= \frac{1}{8}\sin 160^o = \frac{1}{8}\sin 20^o \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Bài toán 3.5: Không dùng máy, tính:

a) $A = \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$ b) $B = \sin 6^o . \sin 42^o . \sin 66^o . \sin 78^o$

Giải

a) $A = \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16} = \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

b) Ta có: $\sin 42^o = \cos 48^o$, $\sin 66^o = \cos 24^o = \cos 12^o$ nên:

$B. \cos 6^o = \sin 6^o \cos 6^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$

$$= \frac{1}{2}\sin 12^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$$

$$= \frac{1}{4}\sin 24^o \cos 24^o \cos 48^o = \frac{1}{8}\sin 48^o \cos 48^o$$

$$= \frac{1}{16}\sin 96^o = \frac{1}{16}\cos 6^o \Rightarrow B = \frac{1}{16}.$$

Bài toán 3.6: Không dùng máy, tính:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Giải

$A = (\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}) + (\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16})$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} + 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}.\cos^2\frac{3\pi}{16} = 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán 3.7:

a) Cho $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

b) Cho $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$.

Giải

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}.$$

b) $\tan\alpha > 0 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{10}}{9}$

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{121 - 36\sqrt{10}}{41}.$$

Bài toán 3.8:

a) Cho $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$

b) Cho $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, $-\frac{3\pi}{2} < \beta < -\pi$

Tính $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$.

Giải

a) Ta có: $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\frac{1}{3})^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{9}$

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{59}{72}$$

b) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0$, $-\frac{3\pi}{2} < \beta < -\pi \Rightarrow \sin\beta > 0$.

Do đó: $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, nên

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12}.$$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\frac{6+\sqrt{35}}{12}$.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$.

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{-6+\sqrt{35}}{12}$.

Bài toán 3.9:

a) Cho a, b là các góc nhọn, $\sin a = \frac{3}{5}$; $\sin(a + b) = \frac{2}{3}$. Tính sinb.

b) Tính $\tan 2\alpha$ và $\tan 2\beta$, biết $\tan(\alpha + \beta) = 8$ và $\tan(\alpha - \beta) = 5$.

Giải

a) Ta có: $\sin^2(a + b) + \cos^2(a + b) = 1 \Rightarrow \cos(a + b) = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin b = \sin[(b + a) - a] = \sin(b + a)\cos a - \cos(b + a)\sin a$

$= \frac{2}{3}.\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{8\pm 3\sqrt{5}}{15}$ (thoả mãn đầu bài).

b) $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$= \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta)} = \frac{8+5}{1-8.5} = \frac{13}{-39} = \frac{-1}{3}$.

Tương tự: $\tan 2\beta = \frac{8-5}{1+8.5} = \frac{3}{41}$.

Bài toán 3.10: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$; $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$.

b) $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$; $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

Giải

a) $\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha.\sin\frac{\pi}{4})$.

$= \sqrt{2}(\sin\alpha.\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha.\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

Tương tự thì có $\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin\alpha - \cos\alpha$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

Bài toán 3.11: Chứng minh:

a) $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

b) $\sin\alpha.\ \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$

$\cos\alpha.\ \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4}.\ \cos3\alpha$.

Áp dụng tính: $\sin20^o.\ \sin40^o.\ \sin80^o$; $\tan20^o.\ \tan40^o.\ \tan80^o$.

Giải

a) $\sin3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin\alpha$

$= 2\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = -\cos\alpha + 2\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -\cos\alpha + 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

b) $\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha) = \sin\alpha(\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\frac{\pi}{3})$

$= \sin\alpha(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha) = \frac{\sin\alpha}{4}(3 - 4\sin^2\alpha)$

$= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$

$\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \cos\alpha(\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\alpha)$

$= \cos\alpha(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha) = \frac{\cos\alpha}{4}[\cos^2\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)]$

$= \frac{\cos\alpha}{4}(4\cos^2\alpha - 3) = \frac{1}{4}\cos3\alpha$

Áp dụng:

$\sin20^o\ \sin40^o\ \sin80^o = \sin20^o\ \sin(60^o - 20^o)\sin(60^o + 20^o)$

$$= \frac{1}{4}\sin(3.\,20^o) = \frac{1}{4}\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Tương tự, $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{4}\cos(3.\,20^o) = \frac{1}{8}$

Do đó $\tan 20^o \tan 40^o \tan 80^o = \sqrt{3}$.

Bài toán 3.12: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

$$\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha).\,\tan\alpha.\,\tan(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \tan 3\alpha$$

Áp dụng: Tính $\tan 10^o.\,\tan 50^o.\,\tan 110^o$.

Giải

Ta có: $\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha)\tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}\tan\alpha\frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha}$

$$= \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\tan\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\tan\alpha} = \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\tan\alpha \Rightarrow \text{đpcm}$$

Áp dụng: $\tan 10^o.\,\tan 50^o.\,\tan 110^o = \tan(60^o - 50^o)\tan 50^o\tan(60^o + 50^o)$

$$= \tan 150^o = -\tan 30^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài toán 3.13: Chứng minh:

a) $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = \frac{3}{M + 1}$.

Giải

a) $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a)$

$$= (\sin\frac{\pi}{8}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{8})^2 - (\sin\frac{\pi}{8}\cos a - \sin a\cos\frac{\pi}{8})^2$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin a\cos a = \sin\frac{\pi}{4}\,\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$$

Cách khác: $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a)$.

$= [\sin(\frac{\pi}{8} + a) + \sin(\frac{\pi}{8} - a)].\ [\sin(\frac{\pi}{8} + a) - \sin(\frac{\pi}{8} - a)]$

$= (2\sin\frac{\pi}{8}\cos a).\ (2\cos\frac{\pi}{8}\sin a) = \sin\frac{\pi}{4}\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3})^2 + (\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3})^2$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha.\ \frac{1}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2}.\ \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)^2$

$= \cos^2\alpha + 2(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha) = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}$.

Bài toán 3.14: Chứng minh:

a) $2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos 2\alpha$ b) $\sin\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha$.

Giải

a) $2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

b) $\sin\alpha(1+\cos 2\alpha) = \sin\alpha(1+2\cos^2\alpha-1) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha$.

Bài toán 3.15: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\frac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$ b) $\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$.

Giải

a) $\frac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + (1-\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha + (1+\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha}$

$= \frac{2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \tan\alpha$

b) $\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha} = 2.\frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$.

Bài toán 3.16: Chứng minh:

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

b) $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$.

Giải

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (1 - \cos^2\alpha) - (1 - \cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

Cách khác: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\cos2\beta - \cos2\alpha)$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2\beta - 1 - 2\cos^2\alpha + 1) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

b) $\cos4a = \cos2.\,2a = 2\cos^2 2a - 1$

$= 2(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$.

Bài toán 3.17: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha};\ \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

Suy ra: $\dfrac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = -\cot15^\circ$.

Giải

Ta có: $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

Chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\sin\alpha\sin\beta$ ta được:

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

Tương tự: $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

Áp dụng: $\dfrac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = \dfrac{\cot^2 30^\circ \cot^2 15^\circ - 1}{\cot^2 30^\circ - \cot^2 15^\circ}$

$= \dfrac{\cot^2 30^\circ \cot 15^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 15^\circ}.\dfrac{\cot 30^\circ \cot 15^\circ - 1}{\cot 30^\circ - \cot 15^\circ}$

$= \cot(15^\circ - 30^\circ)\cot(15^\circ + 30^\circ) = -\cot15^\circ$.

Bài toán 3.18: Chứng minh:

a) Nếu $\sin(2a + b) = 3\sin b$ thì $\tan(a + b) = 2\tan a$

b) Nếu $\cos(a + b) = 0$ thì $\sin(a + 2b) = \sin a$ với $a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Giải

a) $\sin(2a + b) = 3\sin b \Rightarrow \sin[(a + b) + a] = 3\sin[(a + b) - a]$.

$\Rightarrow \sin(a + b)\cos a + \sin a\cos(a + b) = 3[\sin(a + b)\cos a - \sin a\cos(a + b)]$

$\Rightarrow$ 4sina cos(a + b) = 2sin(a + b)cosa

$\Rightarrow$ tan(a + b) = 2tan a (với điều kiện có nghĩa).

b) sin(a + 2b) - sina = 2cos(a + b) sinb = 0

vì cos(a + b) = 0. Vậy sin(a + 2b) = sina.

Bài toán 3.19: Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right).\left(1 + \frac{1}{\cos 4x}\right)...\left(1 + \frac{1}{\cos 2^n x}\right)$

b) B = tanx. tan2x + tan2x. tan3x +... + tan(n - 1)x. tannx

Giải

a) Nếu sinx = 0 thì A = (1 + 1)(1 + 1)... (1 + 1) = 2^n

Nếu sinx $\neq$ 0 thì

$$A = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}.\frac{1 + \cos 4x}{\cos 4x}...\frac{1 + \cos 2^n x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}.\frac{2\cos^2 2x}{\cos 4x}...\frac{2\cos^2 2^{n-1} x}{\cos 2^n x} = \frac{2^n \cos^2 x.\cos 2x.\cos 4x...\cos 2^{n-1} x}{\cos(2^n x)}$$

$$= \cot x.2^n.\frac{\sin x \cos x.\cos 2x \cos 4x...\cos 2^{n-1} x}{\cos(2^n x)} = \cot x.\frac{\sin 2^n x}{\cos(2^n x)} = \cot x.\tan(2^n x).$$

b) Nếu tanx = 0 thì x = kπ (k $\in$ **Z**)

$\Rightarrow$ tanx = tan2x =... = tannx = 0 $\Rightarrow$ B = 0

Nếu tanx $\neq$ 0 (x $\neq$ kπ, k $\in$ **Z**)

Trong điều kiện tanx, tan2x, ..., tan(nx) có nghĩa ta có:

$$\tan x = \tan(2x - x) = \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan x \tan 2x} \Rightarrow 1 + \tan x.\ \tan 2x = \frac{\tan 2x - \tan x}{\tan x}$$

Tương tự: $1 + \tan 2x.\ \tan 3x = \frac{\tan 3x - \tan 2x}{\tan x}$, ...

$$1 + \tan(n - 1)x.\ \tan(nx) = \frac{\tan x - \tan(n-1)x}{\tan x}$$

Cộng vế ta có: (n - 1) + B = cotx. (tannx - tanx) $\Rightarrow$ B = cotx. tannx – n.

Bài toán 3.20: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của: y = sinx - $\sqrt{3}$cosx. Tổng quát với y = asinx + bcosx với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Áp dụng cho: y = (sinx - cosx)(3sinx - 4cosx).

Giải

Ta có $y = 2(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$

Vì $-1 \leq \sin(x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$, $\forall$x nên $-2 \leq y \leq 2$. Vậy maxy = 2, miny = -2.

Ta có $y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x\right)$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$: nên tồn tại góc φ

để $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, nên:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi.\sin x + \sin\varphi.\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(x+\varphi)$$

Vì $-1 \le \sin(x+\varphi) \le 1, \forall x$ nên:

$\max y = \sqrt{a^2+b^2}$, $\min y = -\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có: $y = 3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 4\cos^2 x$

$$= 3.\frac{1-\cos 2x}{2} - 7.\frac{1}{2}\sin 2x + 4.\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Áp dụng thì có: $\max y = \frac{7+5\sqrt{2}}{2}$, $\min y = \frac{7-5\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 3.21: Quỹ đạo một vật được ném lên từ gốc O, vận tốc ban đầu là v(m/s), theo phương hợp với trục hoành Ox góc α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ là parabol có phương trình $y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$, $g \approx 9,8$ (m/s^2).

a) Tính tầm xa.

b) Khi v = 80m/s, tính giá trị lớn nhất của tầm xa. Áp dụng khi:

Giải

a) Gọi x là tầm xa của quỹ đạo thì x > 0.

Cho $y = 0 \Leftrightarrow \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + (\tan\alpha)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{8} = \frac{v^2}{8}\sin 2\alpha$

b) Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:x đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó $x = \frac{v^2}{g}$, với v = 80m/s thì $x = \frac{v^2}{g} \approx \frac{80^2}{9,8} \approx 653$ (m).

BÀI TẬP

Bài tập 3.1: Cho α, β là các góc nhọn với $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\tan\beta = \frac{5}{12}$.

Tính $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\tan(\alpha - \beta)$.

HD-ĐS

Tính trước cos α, tan α, sin β, cos β.

Bài tập 3.2: Tính gọn:

a) $A = \cos(-53^o)\sin(-337^o) + \sin(307^o)\sin(113^o)$

b) $B = \dfrac{\tan 225^0 - \cot 81^0.\cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0}$

HD-ĐS

a) $A = -\dfrac{1}{2}$ b) $B = \sqrt{3}$.

Bài tập 3.3: Cho $0 < \alpha,\ \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ và $\tan\alpha\tan\beta = 3 - 2\sqrt{2}$.

Tính góc α, β.

HD-ĐS

Tính tổng $\tan\alpha + \tan\beta$ suy ra $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{8}$.

Bài tập 3.4: Tính gọn:

a) $M = \tan 75^0 + \cot 75^0$

b) $N = \cos a + \cos(120^0 + a) + \cos(120^0 - a)$.

HD-ĐS

a) M = 4 b) N = 0.

Bài tập 3.5: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \cos^2 x - 2\sin a.\cos x.\sin(a + x) + \sin^2(a + x)$

b) $B = \sin^2 x + \cos(\dfrac{\pi}{3} - x).\cos(\dfrac{\pi}{3} + x)$

HD-ĐS

a) $A = \cos^2 a$ b) $B = \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 3.6: Tính các giá trị lượng giác của góc 18^0

HD-ĐS

$\sin 3.18^0 = \cos 2.18^0$.

Bài tập 3.7: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\tan\dfrac{x}{2}(\dfrac{1}{\cos x} + 1) = \tan x$ b) $\dfrac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2})$.

HD-ĐS

Dùng công thức nhân đôi $x = 2.\dfrac{x}{2}$.

Bài tập 3.8: Tìm m để biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$K = \sin^6x + \cos^6x + m(\sin^4x + \cos^4x) + 2\sin^2 2x$

HD-ĐS

$m = \frac{5}{2}$

Bài tập 3.9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $y = a.\sin^2x + b.\cos x\sin x + c.\cos^2x$

HD-ĐS

a) hạ bậc

b) đưa về dạng $A.\sin u + B.\cos u$.

4 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta};\ \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta};\ \cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)].$$

Chú ý:

1) Phối hợp với các hệ thức cơ bản và các công thức về góc liên quan đặc biệt: đối, bù, phụ, hơn kém $\frac{\pi}{2}$, hơn kém π. Lưu ý đến cung góc lượng giác, loại giá trị lượng giác và các hệ số khi biến đổi lượng giác, biến đổi thành tích số.

2) Khi biến đổi dạng tổng, ta có thể ghép cặp để biến đổi thành tích, cũng có khi ta nhân và chia thêm giá trị lượng giác của góc bé nhất, nửa góc bé nhất: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ để biến đổi tích thành tổng.

Bài toán 4.1: Biến đổi thành tổng:

a) $A = 2\sin(a+b)\cos(a+b)$ b) $B = 2\cos(a+b)\cos(a-b)$.

Giải

a) $A = 2\sin(a+b)\cos(a+b) = \sin 2a + \sin 2b$.

b) $B = 2\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b$.

Bài toán 4.2: Biến đổi thành tổng:

a) $C = 4\sin 3x\sin 2x\sin x$ b) $D = 4\sin 3x\sin 2x\cos x$.

Giải

a) $C = 2\sin 3x(-\cos 3x + \cos x) = -2\sin 3x\cos 3x + 2\sin 3x\cos x$

$= -\sin 6x + \sin 2x + \sin 4x$

b) $D = 2\sin 3x(\sin 3x + \sin x) = 2\sin^2 3x + 2\sin 3x\sin x$

$= 1 - \cos 6x + \cos 2x - \cos 4x$.

Bài toán 4.3: Biến đổi thành tích

a) $A = \sin a + \sin b + \sin(a+b)$ b) $B = \cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1$.

Giải

a) $A = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}$

$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right) = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$.

b) $B = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos^2\frac{a+b}{2}$

$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$.

Bài toán 4.4: Biến đổi thành tích

a) $C = 1 + \sin a + \cos a$ b) $D = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

Giải

a) $C = 1 + \cos a + \sin a = 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$= 2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}) = 2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$.

b) $D = (\sin7x + \sin x) + (\sin5x + \sin3x)$

$= 2\sin4x\cos3x + 2\sin4x\cos x = 2\sin4x(\cos3x + \cos x) = 4\sin4x\cos2x\cos x$.

Bài toán 4.5: Không dùng máy, tính:

a) $\cos75^o\cos15^o$ và $\sin75^o\sin15^o$ b) $\cos75^o\sin15^o$ và $\sin75^o\cos15^o$.

Giải

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng:

a) $\cos75^o\cos15^o = \frac{1}{2}(\cos90^o + \cos60^o) = \frac{1}{4}$

$\sin75^o\sin15^o = \cos15^o\cos75^o = \frac{1}{4}$.

b) $\cos75^o\sin15^o = \frac{1}{2}(\sin90^o - \sin60^o) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin75^o\cos15^o = \frac{1}{2}(\sin90^o + \sin60^o) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 4.6: Không dùng máy, tính:

a) $A = \cos14^o + \cos134^o + \cos106^o$ b) $B = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$.

Giải

a) $A = \cos14^o + \cos134^o + \cos106^o$

$= \cos14^o + 2\cos120^o\cos14^o = \cos14^o - \cos14^o = 0$

b) $B = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = \dfrac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$

$= \dfrac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin(\pi - \frac{4\pi}{5})}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 4.7: Không dùng máy, tính:

a) $A = \dfrac{1}{\sin10^o} - 4\sin70^o$

b) $B = \cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + ... + \cos\frac{17\pi}{19}$.

Giải

a) $A = \dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = \dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\cos 20^\circ$

$= \dfrac{1-4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \dfrac{1-2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \dfrac{2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 2$

b) $B.\ 2\sin\dfrac{\pi}{19} = 2\sin\dfrac{\pi}{19}\cos\dfrac{\pi}{19} + 2\sin\dfrac{\pi}{19}\cos\dfrac{3\pi}{19} +$

$+\ 2\sin\dfrac{\pi}{19}.\cos\dfrac{5\pi}{19} + \ldots + 2\sin\dfrac{\pi}{19}\cos\dfrac{17\pi}{19}$

$= \sin\dfrac{2\pi}{19} + \left(\sin\dfrac{4\pi}{19} - \sin\dfrac{2\pi}{19}\right) + \left(\sin\dfrac{6\pi}{19} - \sin\dfrac{4\pi}{19}\right) + \ldots + \left(\sin\dfrac{18\pi}{19} - \sin\dfrac{16\pi}{19}\right)$

$= \sin\dfrac{18\pi}{19} = \sin\dfrac{\pi}{19} \Rightarrow B = \dfrac{1}{2}.$

Bài toán 4.8: Không dùng máy, tính:

a) $A = \cos 10^\circ.\cos 50^\circ.\cos 70^\circ$.

b) $B = \cot 7,5^\circ + \tan 67,5^\circ - \tan 7,5^\circ - \cot 67,5^\circ$.

Giải

a) $C = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \cos 10^\circ [\dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)]$

$= -\dfrac{1}{4}\cos 10^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 10^\circ \cos 20^\circ = -\dfrac{1}{4}\cos 10^\circ + \dfrac{1}{4}(\cos 30^\circ + \cos 10^\circ)$

$= \dfrac{1}{4}\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}.$

Nhận xét: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 10^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}.$

b) $B = \dfrac{\cos 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ} - \dfrac{\sin 7,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin 67,5^\circ}{\cos 67,5^\circ} - \dfrac{\cos 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos^2 7,5^\circ - \sin^2 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ \cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin^2 67,5^\circ - \cos^2 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 15^\circ} - \dfrac{\cos 135^\circ}{\frac{1}{2}\sin 135^\circ} = \dfrac{2(\sin 135^\circ \cos 15^\circ - \cos 135^\circ \sin 15^\circ)}{\sin 15^\circ \sin 135^\circ}$

$= \dfrac{4\sin 120^\circ}{-(\cos 150^\circ - \cos 120^\circ)} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 6 + 2\sqrt{3}.$

Bài toán 4.9: a) Cho cosα + cosβ = a, sinα + sinβ = b và $a^2 + b^2 \neq 0$. Tính sin(α + β)

b) Cho sinα + cosα = Csin(α + β), ∀α. Tính C và β.

Giải

a) $a = \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$b = \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

nên $ab = 2\sin(\alpha+\beta)\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, $a^2 + b^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

Từ đó $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

b) Phần thuận:Nếu có C và β để sinα + cosα = Csin(α + β) với mọi α thì chọn α = 0, ta được 1 = Csinβ, chọn $a = \frac{\pi}{2}$, ta được 1 = Ccosβ.

Từ đó C ≠ 0, $\sin\beta = \cos\beta = \frac{1}{C}$.

Vậy hoặc $B = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $C = \sqrt{2}$

hoặc $B = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $C = -\sqrt{2}$. Thử lại đúng.

Cách khác: Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, ta có ∀α:

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ và $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha - \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

$= 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4})$.

Bài toán 4.10: Chứng minh:

a) Nếu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và cosα ≠ cosβ thì $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\sqrt{3}$

b) $\frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \tan 4\alpha$ (điều kiện có nghĩa).

Giải

a) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = -\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{2\sin 4\alpha \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha \sin 3\alpha} = \tan 4\alpha$.

Bài toán 4.11: Chứng minh:

a) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$.

Giải

a) Đặt A = $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$. Ta có:

$$A\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\alpha - \sin\frac{5\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}.$$

Do đó A = $-\dfrac{1}{2}$.

Cách khác: Nhân 2 vế với $\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

b) $$\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0} = \frac{2(\cos 60^0 \cos 10^0 - \sin 60^0 \sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$$

$$= \frac{2\cos(60^0 + 10^0)}{\frac{1}{2}\sin 20^0} = \frac{4\cos 70^0}{\sin 20^0} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0} = 4.$$

Bài toán 4.12: Chứng minh:

a) $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) + \cos\beta\sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0$

b) $\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)\sin(\gamma - \alpha) = 0$.

Giải

a) $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha - \beta + \gamma)]$.

$\cos\beta\sin(\gamma - \alpha) = \dfrac{1}{2}[\sin(\beta + \gamma - \alpha) - \sin(\beta - \gamma + \alpha)]$.

$\cos\gamma\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2}[\sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\gamma - \alpha + \beta)]$.

Cộng vế với vế ba đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

b) $\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$

$$\cos(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\gamma)$$

$$\cos(\gamma + \alpha)\sin(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2}(\sin 2\gamma - \sin 2\alpha).$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

Bài toán 4.13: Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Chứng minh:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Giải

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$$= 2\sin\alpha + \sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\pi-(\beta+\gamma)}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$$= \cos\alpha + 2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\pi-(\beta+\gamma)}{2}\right]$$

$$= 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Bài toán 4.14: Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Chứng minh:

a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Giải

a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + 2\sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma)$

$$= 2\sin\alpha[\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = 2\sin\alpha[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)] = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\alpha\,\frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$

$= \cos^2\alpha + 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \cos^2\alpha + 1 + \cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma).$

$= \cos^2\alpha + 1 - \cos\alpha\cos(\beta - \gamma) = 1 + \cos\alpha[\cos\alpha - (\cos(\beta - \gamma)].$

$= 1 - \cos\alpha[\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Bài toán 4.15: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa:

a) Nếu $\sin a = A\sin(a + b)$ thì $\tan(a + b) = \dfrac{\sin b}{\cos b - A}$.

b) $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c + \dfrac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}$.

Giải

a) $\sin a = A\sin(a + b) \Rightarrow \sin[(a + b) - b] = A\sin(a + b)$

$\Rightarrow \sin(a + b)\cos b - \sin b\cos(a + b) = A\sin(a + b)$

$\Rightarrow [\sin(a + b)](\cos b - A) = \sin b\cos(a + b)$

$\Rightarrow \tan(a + b) = \dfrac{\sin b}{\cos b - A}$, (với điều kiện có nghĩa).

b) $\sin(a + b + c) = \sin[(a + b) + c] = \sin(a + b)\cos c + \cos(a + b)\sin c$

$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos c + (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\sin c$

$= \sin a\cos b\cos c + \sin b\cos c\cos a + \sin c\cos a\cos b - \sin a\sin b\sin c.$

Do đó: $\dfrac{\sin(a + b + c)}{\cos a\cos b\cos c} = \dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b} + \dfrac{\sin c}{\cos c} - \dfrac{\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c}$

$= \tan a + \tan b + \tan c - \tan a\tan b\tan c \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.16: Tính gọn:

a) $A = \sin^2 x + \sin^2(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x.\sin(\frac{\pi}{3} - x)$

b) $B = \sin 5x - 2\sin x(\cos 4x + \cos 2x) - \sin x$.

Giải

a) $A = \sin^2 x + \sin(\frac{\pi}{3} - x)[\sin(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x]$

$= \sin^2 x + 2\sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin\frac{\pi}{6}\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \sin^2 x + \sin(\frac{\pi}{3} - x)\cos(\frac{\pi}{6} - x)$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin\frac{\pi}{6}]$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

b) $B = \sin 5x - 2\sin x\cos 4x - 2\sin x\cos 2x - \sin x)$

$= \sin 5x - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 3x - \sin x) - \sin x = 0.$

Bài toán 4.17: Tính gọn:

a) $M = \left(\cot\frac{\alpha}{3} - \tan\frac{\alpha}{3}\right)\tan\frac{2\alpha}{3}$ - tanβ. $\tan(\frac{\pi}{2} + \beta)$

b) N = (tanα - tanβ)cot(α - β) - tanαtanβ.

Giải

a) $M = \left(\dfrac{\cos\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} - \dfrac{\sin\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\right)\dfrac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + \tan\beta.\cot\beta$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}.\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + 1 = \frac{\cos\frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2}\sin\frac{2\alpha}{3}}.\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + 1 = 3$$

$N = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)} - \tan\alpha\tan\beta$ = 1 + tanαtanβ - tanαtanβ = 1.

Bài toán 4.18: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos2\alpha} + \frac{1}{\cos2\alpha\cos3\alpha} + ... + \frac{1}{\cos7\alpha\cos8\alpha} = \frac{\tan8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}.$$

Giải

Ta có tanα - tanβ = $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ nên

$\dfrac{1}{\cos\alpha\cos2\alpha} = \dfrac{\tan2\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$, $\dfrac{1}{\cos2\alpha\cos3\alpha} = \dfrac{\tan3\alpha - \tan2\alpha}{\sin\alpha}$,

, ..., $\dfrac{1}{\cos7\alpha\cos8\alpha} = \dfrac{\tan8\alpha - \tan7\alpha}{\sin\alpha}$

Cộng vế với vế bảy đẳng thức trên thì VT = $\dfrac{\tan8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$ (đpcm).

Bài toán 4.19: Cho a ≠ k2π, k ∈ **Z**. Chứng minh:

$$S = \sin a + \sin2a + \sin3a + ... + \sin na = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Giải

Nhân hai vế cho $2\sin\frac{a}{2} \neq 0$, ta được:

$$2S\sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\sin a + 2\sin\frac{a}{2}\sin2a + ... + 2\sin\frac{a}{2}\sin na$$

$$= \left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2}\right) + \left(\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}\right) + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)a$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a = 2\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$$

Suy ra: $S = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

Bài toán 4.20: Cho a > 0, b > 0, a + b = 60^o. Chứng minh: 3tana. tanb ≤ 1.

Giải

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{3\sin a \sin b}{\cos a \cos b} \le 1 \Leftrightarrow \frac{3\cos(a-b) - \frac{3}{2}}{\cos(a-b) + \frac{1}{2}} \le 1$$

Vì a > 0, b > 0, a + b = $60^o \Rightarrow 1 \ge \cos(a - b) > \frac{1}{2}$ nên:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow 3\cos(a - b) - \frac{3}{2} < \cos(a - b) + \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2\cos(a - b) \le 2 \Leftrightarrow \cos(a - b) \le 1$: Đúng.

Bài toán 4.21: Tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = \sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$$

Giải

Ta có: $|a.c + b.d| \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} \Leftrightarrow (a.c + b.d)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \le a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2d^2 \ge 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \ge 0$: Đúng. Dấu = xảy ra khi ad = bc.

Áp dụng: $VT = 1.\sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x} + 1.\sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

$\le \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x)} = \sqrt{6}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos^2x + 2\sin^2x = \sin^2x + 2\cos^2x$.

$\Leftrightarrow \sin^2x = \cos^2x \Leftrightarrow \cos2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Vậy max T = $\sqrt{6}$.

BÀI TẬP

Bài tập 4.1: Biến đổi thành tổng:

a) sina. $\cos^2$a　　　　b)$\sin^3$a. cosb

HD-ĐS

Dùng công thức hạ bậc hai, bậc ba trước.

Bài tập 4.2: Biến đổi thành tích:

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2\cos y$ b) $\cos 46^{0} - \cos 22^{0} - 2\cos 78^{0}$

c) $1 + \sin x - \cos 2x$ d) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

HD-ĐS

Ghép nhóm rồi dùng công thức biến đổi.

Bài tập 4.3: Biến đổi thành tích:

a) $\cos 8a + 4\cos 4a + 3$ b) $\tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3$

c) $\sin x\cos 3x + \sin 4x\cos 2x$ d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

HD-ĐS

c) biến đổi tích thành tổng trước.

Bài tập 4.4: Tính gọn:

$A = \sin^2 x + \sin^2(120^0 + x) + \sin^2(120^0 - x)$

$B = \dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$.

HD-ĐS

$A = \dfrac{3}{2}$ $B = 3$.

Bài tập 4.5: Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{2}\cos 5x = 8\sin^2 x.\cos^3 x$

b) $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\cos c.\cos a} = 0$

c) $\sin x\,(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x) = \sin 7x$

HD-ĐS

Biến đổi vế trái thành vế phải.

Bài tập 4.6: Tính gọn:

a) $A = \cos\alpha + \cos(\alpha + \dfrac{\pi}{5}) + \cos(\alpha + \dfrac{2\pi}{5}) + \cos(\alpha + \dfrac{9\pi}{5})$.

b) $B = \cos 12^0 + \cos 18^0 - 4\cos 15^0.\cos 21^0.\cos 24^0$.

HD-ĐS

a) $A = 0$ b) $B = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 4.7: Tính gọn:

$I = \tan^6 20^{o} - 33\tan^4 20^{o} + 27\tan^2 20^{o} - 3$

$$J = \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}$$

HD-DS

$I = 0$, $\qquad J = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Bài tập 4.8: Chứng minh:

a) $\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x = \sin^2 x \cos^4 x$

b) $128(\sin^{10}x + \cos^{10}x) = 5\cos 8x + 60\cos 4x + 63$.

HD-DS

a) Ghép theo hệ số $\qquad$ b) Dùng công thức hạ bậc.

Bài tập 4.9: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$.

b) $\frac{\tan x + \tan y}{2} \ge \tan\frac{x+y}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$.

HD-DS

Dùng công thức biến đổi và chú ý dấu thừa số.

5 ỨNG DỤNG VÀO ĐẠI SỐ

Lượng giác hoá là đưa hàm số lượng giác vào bài toán đại số:

– Nếu $|x| \le 1$ thì đặt $x = \sin t$ hay $x = \cos t$.

– Nếu $|x| \le r, r > 0$ thì đặt $x = r.\sin t$ hay $x = r.\cos t$.

– Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$.

– Nếu $x^2 + y^2 = r^2$ thì đặt $x = r.\sin t$ và $y = r.\cos t$.

– Nếu $|x| \ge 1$ thì đặt $x = \frac{1}{\sin t}$ hay $\frac{1}{\cos t}$.

– Nếu $x \in \mathbf{R}$ thì đặt $x = \tan u$ hay $x = \cot u$.

– Nếu có dạng $a + b + c = abc$, $ab + bc + ca = 1$, ... thì đặt các đại lượng tang của các góc như các góc của tam giác, ...

Bài toán 5.1: Cho $x^2 + y^2 = 1$, $u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh:

a) $|xu + yv| \le 1$ $\qquad$ b) $|x(u - v) + y(u + v)| \le \sqrt{2}$.

Giải

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên tồn tại góc a để x = cosa, y = sina

Vì $u^2 + v^2 = 1$ nên tồn tại góc b để u = cosb, y = sinb

a) |xu + yv| = | cosa. cosb + sina. sinb| = | cos(a – b) |≤ 1

b) |x(u - v) + y(u + v)| = | cosa (cosb – sinb) + sina(cosb + sinb)|

$$= |\cos(b - a) - \sin(b - a)| = |\sqrt{2}\cos(b - a + \frac{\pi}{4})| \le \sqrt{2}.$$

Bài toán 5.2: Cho ab ≠ - 1 ; bc ≠ - 1 ; ca ≠ - 1. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca}.$$

Giải

Đặt a = tanA; b = tanB; c = tanC, thì đẳng thức đề bài thành

$$\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} + \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C} + \frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}.\frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C}.\frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A}$$

⇔ tan(A-B)+tan(B-C)+tan(C-A) = tan(A-B). tan(B-C). tan(C-A)

Ta chứng minh: $\alpha + \beta + \gamma = k\pi \Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$

Để ý rằng (A - B) + (B - C) + (C - A) = 0 ⇒ đpcm.

Bài toán 5.3: Cho |b| ≤|a|. Chứng minh:

$$|a + b| + |a - b| = |a + \sqrt{a^2 - b^2}| + |a - \sqrt{a^2 - b^2}|.$$

Giải

Nếu a = 0 thì b = 0 nên đẳng thức đúng.

Nếu a ≠ 0, đẳng thức tương đương:

$$|1 + \frac{b}{a}| + |1 - \frac{b}{a}| = |1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}| + |1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}| \quad (1)$$

Vì |b| ≤|a| nên đặt $\frac{b}{a}$ = cost, 0 ≤t ≤ π thì (1) tương đương:

| 1 + cost| + | 1- cost| = | 1 + sint| + | 1 - sint|

⇔ 1 + cost + 1- cost = 1 + sint + 1 - sint ⇔ 2 = 2: đúng.

Bài toán 5.4: Chứng minh với mọi x, y ∈ **R**:

$$-\frac{1}{4} \le \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} \le \frac{1}{4}.$$

Giải

Đặt x = tanα, y = tanβ thì:

$$T = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} = \frac{x^2(1 + y^2)^2 - y^2(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^2.(1 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{\tan^2\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)^2} - \frac{\tan^2\beta}{(1 + \tan^2\beta)^2}$$

$$= \tan^2\alpha\left(\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}\right)^2 - \tan^2\beta\left(\frac{1}{1 + \tan^2\beta}\right)^2$$

$$= \tan^2\alpha.\cos^4\alpha - \tan^2\beta.\cos^4\beta = \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin^2\beta.\cos^2\beta$$

$$= \frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta).$$

Do đó: $-\frac{1}{4} \le -\frac{1}{4}\sin^2 2\beta \le T \le \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha \le \frac{1}{4}$ (đpcm).

Bài toán 5.5: Cho x, y thay đổi thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Giải

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt x = cost, y = sint.

Ta có $P = \frac{2(\cos^2 t + 6\cos t.\sin t)}{1 + 2\cos t.\sin t + 2\sin^2 t} \Leftrightarrow (P-6).\sin 2t - (P+1)\cos 2t = 1 - 2P$

Áp dụng bất đẳng thức Svac:

$(P-6)^2 + (P-1)^2 \ge (1 - 2P)^2 \Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le P \le 3.$

Vậy min P = - 6, max P = 3.

Bài toán 5.6: Tìm giá trị lớn nhất - bé nhất của biểu thức: $P = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.

Giải

Đặt x = tanα, y = tanβ với $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$P = \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)}$$

$= \sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \beta)$ nên $-\frac{1}{2} \le P \le \frac{1}{2}$.

Vậy, max $P = \frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

min $P = -\frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4}$.

Bài toán 5.7: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của y = $\dfrac{12x^4 + 8x^2 + 3}{(2x^2 + 1)^2}$.

Giải

Đặt $x\sqrt{2}$ = tant, với t $\in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$y = \frac{3\tan^4 t + 4\tan^2 t + 3}{(\tan^2 t + 1)^2} = 3 - \frac{1}{2}\sin^2 2t.$$

Vì $\sin^2 2t \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \le y \le 3$.

Cho t = 0 thì y = 3, t = $\dfrac{\pi}{4}$ thì y = $\dfrac{5}{2}$. Vậy max y = 3 và miny = $\dfrac{5}{2}$.

Bài toán 5.8: Gọi x, y, z, t là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \ge 6 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của P = zx.

Giải

Đặt x = 2cosα, y = 2sinα; z = 3cosβ, t = 3sinβ, α, β ∈ [0, 2π]

thì xt + yz ≥ 6 ⇔ 6(cosαsinβ + sinαcosβ) ≥ 6

$$\Leftrightarrow 6\sin(\alpha + \beta) \ge 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Khi đó, P = xz = 6cosαcosβ = 3[coss(α - β) + cos(α + β)] = 3cos(α - β) đạt giá trị lớn nhất khi cos(α - β) = 1 ⇔ α - β = 0.

Suy ra $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$; $z = t = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy maxP = 3, khi $x = y = \sqrt{2}$, $z = t = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 5.9: Tìm m để $f(x) = 4x^3 + mx$ thoả: $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Giải

Phần thuận: chọn x = 1, x = $\dfrac{1}{2}$ thì được: $-1 \le 4 + m \le 1$ và $-1 \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{m}{2} \le 1$

suy ra m ≤ -3 và m ≥ -3 nên m = -3.

Đảo lại, khi m= -3. Vì – 1 ≤ x ≤ 1 nên đặt x = cos t

Ta có $|f(x)| = |4x^3 - 3x| = |4\cos^3 t - 3\cos t| = |\cos 3t| \le 1$: đúng.

Vậy giá trị cần tìm là m = -3.

Bài toán 5.10: Giải phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x$.

Giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \cos 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Phương trình trở thành:

$$\sqrt{1+\cos 2t} - \sqrt{1-\cos 2t} = \cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|\cos t| - \sqrt{2}\,|\sin t| = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos t - \sin t) = (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)$$

$$\Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4})(\cos(t - \frac{\pi}{4}) - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4}) = 0$$

Chọn $t = \frac{\pi}{4}$. Suy ra $x = 0$. Nghiệm của phương trình là: $x = 0$.

Bài toán 5.11: Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Giải:

Điều kiện: $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos u$, $u \in [0, \pi]$.

Phương trình trở thành $\cos^3 u + \sin^3 u = \sqrt{2}\sin u \cos u$ (1)

Đặt $t = \sin u + \cos u$, $|t| \le \sqrt{2}$.

(1) $\Leftrightarrow (\sin u + \cos u)(1 - \sin u\cos u) = \sqrt{2}\sin u \cos u$

$$\Leftrightarrow t(1 - \frac{t^2-1}{2}) = \sqrt{2}\,\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hay } t = -\sqrt{2} \pm 1.$$

Chọn $t = \sqrt{2}$ thì có $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn $t = 1 - \sqrt{2}$ thì có $x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài toán 5.12: Giải phương trình với x thuộc đoạn [0, 1]:

$$8x(1-2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$

Giải

Đặt $x = \sin t$, với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ thì phương trình trở thành:

$8\sin t.\cos 2t(8\sin^4 t - 8\sin^2 t + 1) = 1 \Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t[8\sin^2 t(\sin^2 t - 1) + 1] = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t(1 - 2\sin^2 2t) = 1 \Leftrightarrow 8\sin t\cos 2t.\cos 4t = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t.\cos 4t.\cos t = \cos t \Leftrightarrow \sin 8t = \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}$ hay $t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$.

Từ điều kiện $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, suy ra có bốn nghiệm thích hợp là

$x = \sin\frac{\pi}{18}$; $x = \sin\frac{5\pi}{18}$; $x = \sin\frac{\pi}{14}$ và $x = \frac{5\pi}{14}$.

Bài toán 5.13: Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

Giải

Ta có $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$ nên $x = \cos\frac{\pi}{9}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Tương tự $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{7\pi}{3}$ nên $\cos 5\frac{\pi}{9}$ và $\cos 7\frac{\pi}{9}$ cũng là nghiệm.

Vì 3 nghiệm đó phân biệt và phương trình cho bậc 3 nên phương trình có 3 nghiệm $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}, x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$.

Bài toán 5.14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$

Giải:

Từ các phương trình của hệ phương trình đã cho suy ra x, y, $z \neq \pm 1$. Nên hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x = (1 - x^2)y \\ 2y = (1 - y^2)z \\ 2z = (1 - z^2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

Đặt x = tant thì y = tan2t; z = tan4t; x = tan8t.

Ta được phương trình tan8t = tant $\Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{7}$, k = 0, 1, .., 6.

Các nghiệm t này thích hợp nên suy ra các nghiệm x, y, z.

Bài toán 5.15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(1+3y)=8 \\ x(y^3-1)=6 \end{cases}$.

Giải

Do x $\neq$ 0 nên hệ: $\begin{cases} \dfrac{8}{x^3}-3y=1 \\ y^3-3\dfrac{2}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3-3y=1 \\ y^3-3t=1 \end{cases} \quad (t=\dfrac{2}{x})$

suy ra (t- y)(t^2 + ty +y^2 + 3) = 0

Vì t^2 + ty +y^2 + 3 > 0 nên t = y do đó y^3 – 3 y = 1 (1)

Xét -2 ≤ y ≤ 2, đặt t = 2cosa

(1): $8\cos^3 a - 6\cos a = 1$ hay $\cos 3a = \dfrac{1}{2}$

Từ đó giải và chọn 3 nghiệm a là $\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}$.

Vì (1) là phương trình bậc 3 nên có đúng 3 nghiệm y là

$2\cos\dfrac{\pi}{9}; 2\cos\dfrac{5\pi}{9}; 2\cos\dfrac{7\pi}{9}$ suy ra 3 nghiệm (x, y) cuả hệ.

BÀI TẬP

Bài tập 5.1: Cho xy + yz + zx = 1 và xyz ≠ 0. Chứng minh

$$(x - \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y}) + (y - \frac{1}{y})(z - \frac{1}{z}) + (z - \frac{1}{z})(x - \frac{1}{x}) = 4.$$

HD-ĐS

Đặt x = tanα, y = tanβ; z = tanγ.

Bài tập 5.2: Cho xy + yz + zx = 1. Chứng minh

$$x + y + z - 3xyz = x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2).$$

HD-ĐS

Đặt x = tanα, y = tanβ; z = tanγ.

Bài tập 5.3: Cho số x mà $|x| \leq 1$. Chứng minh:

a) Nếu p > 1 thì $(1 - x)^p + (1 + x)^p \leq 2^p$.

b) Nếu 0 < p < 1 thì $(1 - x)^p + (1 + x)^p \geq 2^p$.

HD-ĐS

Vì $|x| \leq 1$ nên đặt x = cos 2a.

Bài tập 5.4: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số: $y = \dfrac{1 + x^6}{(1 + x^2)^3}$.

HD-ĐS

1 và $\frac{1}{4}$.

Bài tập 5.5: Cho a, b, c >0 và abc + a + c –b = 0.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$.

HD-ĐS

max $P = \frac{10}{3}$.

Bài tập 5.6: Tìm tham số m để: f(x) = $2x^2$ - m thoả mãn: $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$.

HD-ĐS

m =1.

Bài tập 5.7: Tìm tham số b, c để: f(x) = $8x^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn:

$|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$.

HD-ĐS

b = -8, c = 1.

Bài tập 5.8: Giải phương trình $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$

HD-ĐS

$x_1 = \cos\frac{\pi}{7}, x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}, x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$.

Bài tập 5.9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x + y) = \sqrt{2} \end{cases}$$

HD-ĐS

Đặt x = sina, y = cosa.

6 BÀI TOÁN TAM GIÁC

Cho tam giác ABC gọi 3 cạnh a, b, c đối diện với 3 góc A, B, C, tương ứng 3 đường cao h_a, h_b, h_c, 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c, 3 phân giác d_a, d_b, d_c hay l_a, l_b, l_c bán kính đường tròn nội tiếp r, ngoại tiếp R và nửa chu vi $p = \dfrac{(a+b+c)}{2}$.

- Điều kiện A, B, C là ba góc một tam giác là

$$\begin{cases} A, B, C > 0 \\ A + B + C = \pi \end{cases} \text{ nên có } A+B = \pi - C,\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}, \ldots$$

Các định lý về tam giác ABC

- Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

nên có $a = 2R\sin A;\ b = 2R\sin B;\ c = 2R\sin C.$

- Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A,$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$

nên có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

- Định lý trung tuyến

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2},\ m_a = AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \ldots$$

- Định lý diện tích:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Chú ý:

1) Phối hợp các hệ thức cơ bản, công thức lượng giác để chứng minh hệ thức.

2) Những hệ thức về tam giác có nhiều liên quan nhau, nhiều hệ thức gốc thường được sử dụng làm nền tảng để chứng minh hệ thức khác.

3) Bài toán dạng loại tam giác, đưa về đánh giá quan hệ góc, cạnh, giá trị góc, ... của tam giác cân, vuông, đều, ...

4) Bất đẳng thức Côsi: bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, *với mọi a, b không âm.*

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ *với mọi a, b, c không âm.*

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài toán 6.1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Giải

$$VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.\,2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = VP.$$

Bài toán 6.2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Giải

$$VT = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 1 - \cos C.\,2\cos A.\cos(-B) = 1 - 2\cos A\cos B\cos C = VP.$$

Bài toán 6.3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$$

Giải

Vì: $\sin 2C = \sin 2(\pi - (A+B)) = \sin(2\pi - 2(A+B))$

$= \sin(-2(A+B)) = -\sin 2(A+B)$. Nên

$VT = 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B)$

$= 2\sin(A + B)[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 2\sin C.(-2)\sin A.\sin(-B)$

$= 2\sin A\sin B\sin C = VP.$

Bài toán 6.4: Chứng minh trong tam giác ABC không vuông ta luôn có:

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$

Giải

Ta có $A + B = \pi - C$, nên $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

Do đó $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$

Hay $\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A\tan B)$

Nên $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$: đpcm.

Bài toán 6.5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

Giải

Ta có: $\tan\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right) = \cot\dfrac{C}{2}$ nên $\dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

hay $\tan\dfrac{C}{2}\left(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\right) = 1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

Do đó $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$: đpcm.

Bài toán 6.6: Chứng minh trong mọi tam giác ta luôn có

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2.$$

Giải

Ta có $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin A + \frac{1}{2}\sin B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 1 + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}.$$

$$\text{Và}\ \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 6.7: Cho tam giác ABC. Chứng minh: $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C} = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$.

Giải

Áp dụng định lý sin:

$$VT = \frac{(2R\sin A)^2 - (2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2} = \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{4R^2.\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1-\cos 2A}{2} - \frac{1-\cos 2B}{2}}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin^2 C} = \frac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C} = VT.$$

Bài toán 6.8: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Giải

Ta có: $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

Tương tự: $\cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$ và $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$.

Thế vào VT thì được đpcm.

Bài toán 6.9: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

Giải

$$VP = \frac{1}{4}8R^2(\sin^2 A\sin B\cos B + \sin^2 B\sin A\cos A)$$

$$= 2R^2\sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A)$$

$= \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin(A + B) = \frac{1}{2}ab\sin C = S = VT.$

Bài toán 6.10: Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có:

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

Giải

Ta chứng minh: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

nên đề bài tương đương $1 + \frac{r}{R} = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

hay $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Ta có: $VT = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$

$$= 2R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = VP.$$

Bài toán 6.11: Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ: $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$.

Giải

Bất đẳng thức đề bài tương đương với:

$$\frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)][-\cos(A + B)] \le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(A + B) + \cos(A - B)\cos(A + B) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(A + B) + \cos(A - B)\cos(A + B) + \frac{1}{4}\cos^2(A - B)$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(A - B) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(A + B) + \frac{1}{2}\cos(A - B)]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A - B) \ge 0\text{: đúng.}$$

Bài toán 6.12: Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ:

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$.

và $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) + 1 \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}]^2 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right) \ge 0\text{: đpcm.}$$

Bài toán 6.13: Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ:

a) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Giải

a) Để ý rằng với: $-\frac{\pi}{2} \le x, y \le \frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\cos x + \cos y}{2} \le \cos\frac{x+y}{2}$, nên:

$$\frac{\dfrac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2}}{2} + \dfrac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{\pi}{6}}{2}}{2} \le \frac{\cos\dfrac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2} + \cos\dfrac{\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}}{2}$$

$$\le \cos\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}}{4}$$

Từ đó suy ra đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi và kết quả trên thì:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \left(\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Bài toán 6.14: Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ:

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Giải

Ta có $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2} > 0$ và $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$$. Suy ra đpcm.

Bài toán 6.15: Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C \geq \frac{3}{4}.$$

Giải

Bất đẳng thức đề bài tương đương

$$\frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2(A + B) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2(A + B) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(A + B) + \frac{1}{2}\cos(A - B)]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A + B) \geq 0\text{: đpcm.}$$

Bài toán 6.16: Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C), \forall x.$$

Giải

BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - (\cos B + \cos C)x + 1 - \cos A \geq 0$.

Vế trái là tam thức bậc hai f(x) có hệ số $\frac{1}{2} > 0$ và:

$$\Delta = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A) = 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \leq 0$$

Do đó $f(x) \geq 0, \forall x$ (dpcm)

Bài toán 6.17: Chứng minh với tam giác ABC thì:

$$a^2(1 - \sqrt{3}\cot A) + b^2(1 - \sqrt{3}\cot B) + c^2(1 - \sqrt{3}\cot C) \geq 0.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sqrt{3}(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C. \ (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$= \frac{3(\sin A\sin B\sin C)}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} \geq \frac{3\sin A\sin B\sin C}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

nên (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.18: Trong tam giác ABC biết $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh: $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Giải

Ta có: $c = \frac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow 2\sin C = \sin A + \sin B$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A + B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bài toán 6.19: Tính 3 góc của tam giác ABC biết:

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C = 4.$$

Giải

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{3}\cos(B + C) - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{3}{2}\sin^2 C - \sqrt{3}\sin B\sin C) + (\frac{1}{2}\cos^2 B + \frac{3}{2}\cos^2 C + 2$$

$$+ \sqrt{3}\cos B\cos C - 2\cos B - 2\cos C - 2\sqrt{3}\cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin B - \sqrt{3}\sin C)^2 + \frac{1}{2}(\cos B + \sqrt{3}\cos C - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B - \sqrt{3}\sin C = 0 \text{ và } \cos B + \sqrt{3}\cos C - 2 = 0$$

Suy ra $A = 90^0$; $B = 60^0$; $C = 30^0$.

Bài toán 6.20: Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng

$$\begin{cases} A > B > C & (1) \\ \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 & (2) \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ (1) suy ra $A > \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} > B > 0$; $\frac{\pi}{3} > C > 0$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} > \frac{3A}{2} > \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4} > \frac{3B}{2} > 0 ; \frac{\pi}{2} > \frac{3C}{2} > 0$$

Do đó $\sin\frac{3B}{2} > 0$; $\sin\frac{3C}{2} > 0$, nên từ (2) suy ra

$$\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{3A}{2} = 0 \Rightarrow A = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

Chọn $A = \frac{2\pi}{3}$. Và từ (3) thì $\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$.

Vì $A = \frac{2\pi}{3}$ nên $\cos\frac{5A}{2} \neq 0$ và $B + C = \frac{\pi}{3}$.

Mà $B > C$ nên $\frac{\pi}{6} > C > 0 \Rightarrow \cos\frac{5C}{2} > 0$, do đó

$$\cos\frac{5B}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5} \text{ suy ra được } B = \frac{\pi}{5} \text{ và } C = \frac{2\pi}{15}.$$

Bài toán 6.21: Tính 3 góc của tam giác ABC biết:

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

Giải

Ta có $\frac{r}{R} = \frac{\frac{S}{p}}{R} = \frac{abc}{4R^2p} = \frac{abc}{2R^2(a+b+c)}$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \geq 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

do đó dấu bằng xảy ra nên tam giác ABC đều: $A = B = C = 60^0$.

Bài toán 6.22: Các góc của tam giác ABC thỏa mãn

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$ Tính góc C.

Giải

Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ nên

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

do đó $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\left(2\cos\frac{C}{2} - 1\right) = 0$

Vì $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} > 0$ nên $\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^0$.

Bài toán 6.23: Cho tam giác ABC thỏa: $\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$.
Hãy tính $\cos A + \cos B$.

Giải

Theo giả thiết thì có

$$2\cos C\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \cos C.\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}.\left(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2\frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}.(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}(\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2})$$

Vì $\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \neq 0$ nên $2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 1$

hay $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 1$, do đó $\cos A + \cos B = 1$.

Bài toán 6.24: Cho tam giác ABC tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}.$$

Giải

Ta có $M + 1 = \dfrac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$

nên $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{3}{M+1}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Rightarrow \cos^2 C - \cos(A-B)\cos C + 1 - \frac{3}{M+1} = 0$$

Vế trái là phương trình bậc hai theo cosC, phương trình này có nghiệm nên

$$\Delta = \cos^2(A-B) - 4(1 - \frac{3}{M+1}) \geq 0 \Rightarrow 4(1 - \frac{3}{M+1}) \leq \cos^2(A-B) \leq 1$$

$\Rightarrow M \leq 3$.

Dấu " = " xảy ra khi $\cos^2(A-B) = 1$ và $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Vậy max M = 3.

Bài toán 6.25: Cho tam giác ABC tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}.$$

Giải

Ta chứng minh: với mọi x, y $\geq$ 0, : $x + y \leq \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)}$.

Thật vậy, BĐT $\Leftrightarrow (x + y)^3 \leq 4(x^3 + y^3) \Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 \geq 0$: đúng.

Áp dụng $\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} \leq \sqrt[3]{4(\sin A + \sin B)}$

$$= 2\sqrt[3]{\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}} = 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B.

Tương tự: $\sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \leq 2\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$. Dấu " = " xảy ra khi B = C.

$$\sqrt[3]{\sin C} + \sqrt[3]{\sin A} \leq 2\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}.$$ Dấu " = " xảy ra khi C = A.

Do đó: $\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$

nên $P = \dfrac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \leq 1.$

Dấu " = " xảy ra khi tam giác ABC đều.

Vậy, max P = 1, khi tam giác ABC đều.

Bài toán 6.26: Tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Giải

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$\sin C = 2\cos A\sin B \Leftrightarrow \sin(A + B) = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A - B = k\pi$.

Vì A, B là góc tam giác nên $k = 0 \Rightarrow A = B$.

Vậy, tam giác thỏa điều kiện đã cho là tam giác cân.

Bài toán 6.27: Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$ thì tam giác đó cân.

Giải

Từ giả thiết thì

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}(1+\tan^2\frac{A}{2}) = \tan\frac{B}{2}(1+\tan^2\frac{B}{2})$$

$$\Leftrightarrow (\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2})(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1) = 0$$

Vì: $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1 = (\tan\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{B}{2})^2 + \frac{3}{4}\tan^2\frac{B}{2} + 1 > 0.$

Nên: $\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} + k\pi \Rightarrow A = B + k2\pi.$

Vì là góc của một tam giác nên $k = 0$. Suy ra $A = B$.

Vậy tam giác thỏa tính chất đã cho là tam giác cân.

Bài toán 6.28: Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn: $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$

Giải

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = 2\tan\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[1+\cos(A+B)] = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Bài toán 6.29: Xét dạng tam giác ABC: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$.

Giải

Hệ thức đã cho tương đương với

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C.$$

Vậy tam giác đã cho là tam giác cân tại A.

Bài toán 6.30: Cho tam giác ABC có $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Giải

Áp dụng định lý sin thì hệ thức đã cho tương đương với:

$$\frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \cos B \cos C = \sin B \sin C \Leftrightarrow \cos(B + C) = 0$$

$$\Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}: \text{đpcm.}$$

Bài toán 6.31: Tam giác ABC có: $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A}$ = tanA. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Giải

Ta có: $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = 0 \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Vì A, B là góc của một tam giác nên k = 0.

Vậy tam giác đã cho là tam giác vuông ở A.

Bài toán 6.32: Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$

Giải

Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$.

nên đẳng thức đề bài tương đương với:

$\cos A \cos B \cos C = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0$ hay $\cos B = 0$, $\cos C = 0$.

Vậy tam giác đã cho là tam giác vuông.

Bài toán 6.33: Tam giác ABC có tính chất gì, nếu:

$$\begin{cases} \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 \\ \cos A \cos B = \sin^2 \dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Giải

Từ hệ thức thứ hai ta được $\cos A\cos B = \frac{1}{2}(1 - \cos C)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = \frac{1}{2}[1 + \cos(A + B)] \Leftrightarrow \cos(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$

Thay vào hệ thức thứ nhất:

$2\sin 3A + \sin 3[\pi - 2A] = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3A + \sin 6A = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3A(1 + \cos 3A) = 0 \Leftrightarrow \sin 3A = 0$ hoặc $\cos 3A = -1$ nên $A = \frac{\pi}{3}$.

Vậy tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài toán 6.34: Trong tam giác ABC có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Giải

Ta có A, B, C là 3 góc của tam giác ABC nên:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B.

Tương tự: $\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2}$; $\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2}$.

nên $\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$

Và dấu đẳng thức xảy ra khi A = B = C: đpcm.

Bài toán 6.35: Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Giải

Ta có: $1 \le \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi A = B = C.

và $xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z. Do đó:

$$3(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$
$$\le (\cos A + \cos B + \cos C).(\cos A + \cos B + \cos C)$$
$$\le \frac{3}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$\Rightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) \le \cos A + \cos B + \cos C$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2} \\ 3(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C$: đpcm.

Bài toán 6.36: Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn: $b + c = \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}$.

Giải

Ta biến đổi: $b + c = \frac{a}{2} + \frac{2S\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{a}\frac{abc}{4R} = \frac{a}{2} + \frac{bc\sqrt{3}}{2R}$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C = \sin A + \sqrt{3}\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C = \sin B\cos C + \sin C\cos B + \sqrt{3}\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow (2\sin B - \sin B\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C) + (2\sin C - \sin C\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - (\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)] + 2\sin C[1 - (\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B)] = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - \cos(C - \frac{\pi}{3})] + 2\sin C[1 - \cos(B - \frac{\pi}{3})] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(C - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 6.37: Các cạnh tam giác ABC thoả mãn: $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng tỏ rằng tam giác ABC nhọn và $2\sin^2 A = \tan B\tan C$.

Giải

Từ giả thiết, suy ra $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$ nên ta chỉ cần chứng minh A nhọn.

Ta có $b^4 + c^4 = b^2.b^2 + c^2.c^2 < a^2.b^2 + a^2.c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow$ đpcm.

Và: $2\sin^2 A = \tan B \tan C \Leftrightarrow 2a^2 = \dfrac{bc}{\cos B \cos C}$

$$\Leftrightarrow 2a^2 \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = bc \Leftrightarrow a^4 = b^4 + c^4\text{: đúng.}$$

BÀI TẬP

Bài tập 6.1: Chứng minh các đẳng thức về tam giác ABC:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

b) $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

HD-ĐS

a) Dùng công thức hạ bậc.

Bài tập 6.2: Chứng minh các đẳng thức về tam giác ABC:

a) $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

b) $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$

HD-DS

Dùng công thức cộng với góc $A + B = \pi - C$, $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$.

Bài tập 6.3: Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) Nếu $2a + 2c = 3b$ thì $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{5}$

b) Nếu $a^2 = b(b + c)$ thì $A = 2B$

HD-DS

Dùng định lý sin, cos và biến đổi lượng giác.

Bài tập 6.4: Chứng minh các bất đẳng thức về tam giác ABC

a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \dfrac{3}{4}$

b) $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{9}{4}$

c) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{1}{8}$.

HD-DS

Biến đổi về tổng bình phương.

Bài tập 6.5: Chứng minh các bất đẳng thức về tam giác ΔABC

a) $\tan A + \tan B \geq 2\cot\dfrac{C}{2}$

b) $\cot A + \cot B \geq 2\tan\dfrac{C}{2}$

c) $\tan\dfrac{A}{2} + tg\dfrac{B}{2} + tg\dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

d) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$.

HD-ĐS

Dùng hệ thức về tan, cot và bất đẳng thức Côsi.

Bài tập 6.6: Tính các góc tam giác ABC cân biết có 1 góc thoả: $\tan x - \tan\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

HD-ĐS

3 góc A, B, C đều bằng 60^0.

Bài tập 6.7: Tính các góc tam giác ABC biết: $\begin{cases} a^2 \geq b^2 + c^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

HD-ĐS

$A = 90^0$, $B = C = 45^0$.

Bài tập 6.8: Xét dạng tam giác ABC biết:

a) $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ b) $\frac{b+c}{a} = \cos B + \cos C$

c) $S = \frac{2}{3}R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$ d) $a\tan B + b\tan A = (a+b)\cot\frac{C}{2}$.

HD-ĐS

a) Tam giác ABC cân b) Tam giác ABC vuông

c) Tam giác ABC đều d) Tam giác ABC vuông hay cân.

Bài tập 6.9: Cho tam giác ABC tùy ý, tìm giá trị lớn nhất:

a) $M = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ b) $N = \frac{\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 C}{\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C}$

HD-ĐS

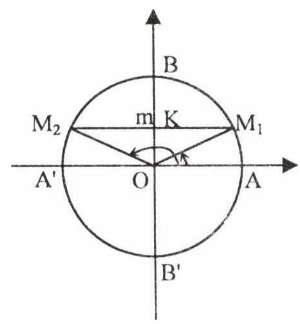
a) $\frac{1}{8}$ b) 3.

7 CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương trình cơ bản sinx = m

Vì $|\sin x| \le 1$ *với mọi x nên khi* $|m| > 1$ *thì phương trình vô nghiệm, còn khi* $|m| \le 1$ *thì phương trình có nghiệm:*

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Nếu α *là một nghiệm của phương trình sinx = m thì:*

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

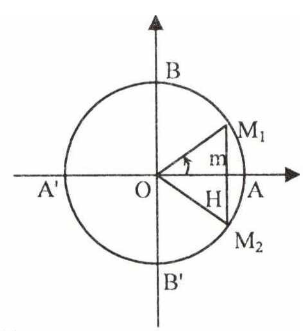
Đặc biệt: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Phương trình cơ bản cosx = m

Vì $|\cos x| \le 1$ *với mọi x nên khi* $|m| > 1$ *thì phương trình vô nghiệm, còn khi* $|m| \le 1$ *thì phương trình có nghiệm:*

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Nếu α *là một nghiệm của phương trình cosx = m thì:*

$$\cos\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

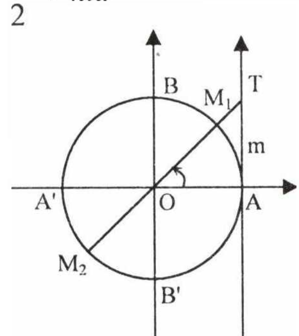
Đặc biệt: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi;\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Phương trình cơ bản tanx = m

Điều kiện xác định là $\cos x \neq 0$. *Vì tanx nhận mọi giá trị từ* $-\infty$ *đến* $+\infty$ *nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m:*

$$x = \arctan m + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$



Nếu α *là một nghiệm của phương trình tanx = m, thì*

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Đặc biệt: $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

Phương trình cơ bản cotx = m

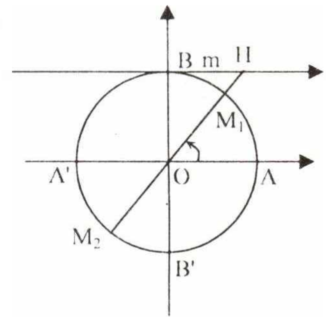
Điều kiện xác định là $\sin x \neq 0$. *Vì cotx nhận mọi giá trị từ* $-\infty$ *đến* $+\infty$ *nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m:*

$$x = \operatorname{arccot} m + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu α *là một nghiệm của phương trình cotx = m thì:*

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Đặc biệt: $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$



Chú ý:

1) Có đơn vị hoặc là số thực của ẩn, kết hợp nghiệm. Hạn chế sử dụng arcsin m, arccos m, arctanm, arccotm (giá trị $x \in \mathbb{R}$*).*

2) $$\sin u = \sin a^{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a^{0} + k360^{0} \\ u = 180^{0} - a^{0} + k360^{0} \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos u = \cos a^{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a^{0} + k360^{0} \\ u = -a^{0} + k360^{0} \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan u = \tan a^{0} \Leftrightarrow u = a^{0} + k180^{0},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot u = \cot a^{0} \Leftrightarrow u = a^{0} + k180^{0},\ k \in \mathbb{Z}.$$

3) Điều kiện xác định của tanx là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, *của cotx là* $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *hay đơn vị độ tương ứng.*

4) Tìm nghiệm thuộc miền cho trước: Giải phương trình rồi nhẩm chọn nghiệm, biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, giải bất phương trình để tìm k nguyên, vẽ đồ thị;... để chọn nghiệm thích hợp.

Phương trình theo một hàm số lượng giác

Dạng: $a.\sin x + b = 0$; $\quad a.\cos x + b = 0$

$a.\tan x + b = 0$; $\quad a.\cot x + b = 0$

$a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0$; $\quad a.\cos^2 x + b.\cos x + c = 0$

$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0$; $\quad a.\cot^2 x + b.\cot x + c = 0$

$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x + c.\sin x + d = 0$,...

Phương pháp: Chọn một hàm số lượng giác, biểu thức lượng giác thích hợp để đưa phương trình cho theo hàm số lượng giác, biểu thức lượng giác đó hoặc tích các phương trình cơ bản.

Phương trình đẳng cấp (thuần nhất, đồng bậc)

Dạng: $a.\sin x + b.\cos x = 0$

$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = 0$

$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x.\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos^3 x = 0$,...

Phương pháp: Với bậc 1, 2, 3,..., n, xét cosx = 0, xét cosx $\neq 0$ và chia 2 vế cho $\cos^n x$ thì phương trình thành phương trình theo t = tanx.

Chú ý:

1) Nếu xét sinx = 0, xét sinx $\neq 0$ và chia 2 vế cho $\sin^n x$ thì phương trình trở thành phương trình theo t = cotx.

2) Biến đổi tăng giảm bậc, đưa về cùng bậc:

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Hằng số: $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x) = d(\sin^2 x + \cos^2 x)^2,...$

Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx (dạng cổ điển)

Dạng: a. sinx + b. cosx = c với a hoặc b khác 0.

Phương pháp: biến đổi a. sinx + b. cosx về dạng A. sin(x + α) hoặc B. cos(x + β) bằng cách chia 2 vế cho $a^2 + b^2 \neq 0$ nên:

$$a.\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ *nên tồn tại số α sao cho:*

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *và* $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. *Ta có:*

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$

Do đó, việc giải phương trình asinx + bcosx = c được đưa về giải phương trình lượng giác cơ bản $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Suy ra điều kiện phương trình: a. sinx + b. cosx = c có nghiệm khi và chỉ khi $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$

Chú ý:

1) Nếu chọn số β để $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *thì ta có:* $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta)$.

2) Đặc biệt: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$,

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}),$$

$$\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{6});\ \sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{3}).$$

3) Ứng dụng điều kiện có nghiệm để chứng minh bất đẳng thức hay tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương trình đối xứng theo sinx và cosx

Dạng: a(sinx + cosx) + b(sinxcosx) + c = 0.

Phương pháp: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$ *nên phương trình trở thành phương trình bậc hai theo t:*

$$a.t + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0.$$

Chú ý:

1) Biến đổi khác: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$

2) Dạng a(sinx - cosx) + b(sinxcosx) + c = 0 thì

đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$.

$\Rightarrow t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Bài toán 7.1: Giải các phương trình:

a) $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$ b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

Giải

a) $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x+\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = \frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbf{Z}.$$

b) Vì $0 < \frac{2}{5} < 1$ nên có số α sao cho $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. Do đó:

$$\cos(x + \frac{\pi}{18}) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{18}) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha - \frac{\pi}{18} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Cách khác: Vì $0 < \frac{2}{5} < 1$ nên:

$$\cos(x + \frac{\pi}{18}) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{18} = \pm\arccos\frac{2}{5} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} \pm \arccos\frac{2}{5} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.2: Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = \frac{3}{5}$.

Giải

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 150^\circ \Leftrightarrow x = \pm 150^\circ + k360^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

b) Vì $0 < \frac{3}{5} < 1$ nên có số α để $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Do đó:

$$\text{inx} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Cách khác: Vì $0 < \frac{3}{5} < 1$ nên phương trình:

$$\sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{3}{5} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{3}{5} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.3: Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho:

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$. b) $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

Giải

a) $$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Với điều kiện $0 < x < \pi$:

- Xét $0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{1}{12} + 1 \Leftrightarrow k = 1$.

Do đó trong các giá trị $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ chỉ có nghiệm $x = \frac{11\pi}{12}$ là thoả mãn điều kiện $0 < x < \pi$.

- Xét $0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Do đó trong các giá trị $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ chỉ có nghiệm $x = \frac{7\pi}{12}$ thoả điều kiện $0 < x < \pi$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thuộc khoảng $(0; \pi)$.

b) $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x - 5) = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - 5 = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 5 + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 5 + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Với điều kiện $-\pi < x < \pi$:

- Xét $-\pi < \frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -7\pi - 30 < 12k\pi < 5\pi - 30$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} - \frac{30}{12\pi} < k < \frac{5}{12} - \frac{30}{12\pi}$$

Vì $k \in \mathbf{Z}$ và $-1,38 < k < -0,37$, do đó chỉ có một giá trị k nguyên thoả mãn các điều kiện đó là $k = -1$ nên chọn $x = \frac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \frac{11\pi}{6}$.

- Xét $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -5\pi - 30 < 12k\pi < 7\pi - 30$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{12} - \frac{5}{2\pi} \le k \le \frac{7}{12} - \frac{5}{2\pi}.$$

Do đó $k = -1$ nên có nghiệm thứ hai của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \frac{13\pi}{6}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 5 - \frac{11\pi}{6}$ và $x = 5 - \frac{13\pi}{6}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài toán 7.4: Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$ b) $\cot 2x = \cot(-\frac{1}{3})$.

Giải

a) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(2x - 1) = \tan\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

b) $\cot 2x = \cot(-\frac{1}{3}) \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 7.5: Giải các phương trình sau:

a) $\cot(\frac{x}{4} + 20^o) = -\sqrt{3}$ b) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5}$.

Giải

a) $\cot(\frac{x}{4} + 20^o) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(\frac{x}{4} + 20^o) = \cot(-30^o)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^o = -30^o + k180^o \Leftrightarrow x = -200^o + k720^o, k \in \mathbf{Z}$.

b) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\frac{\pi}{10}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 7.6: Giải các phương trình sau:

a) $\tan 2x = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ b) $2\tan 5x = 1$.

Giải

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Phương trình $\tan 2x = \tan(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (loại).

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) $2\tan 5x = 1 \Leftrightarrow \tan 5x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 5x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\arctan\frac{1}{2} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 7.7: Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho:

a) $\tan(2x - 15^o) = 1$ với $-180^o < x < 90^o$.

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Giải

a) $\tan(2x - 15^o) = 1 \Leftrightarrow 2x = 15^o + 45^o + k180^o \Leftrightarrow x = 30^o + k90^o, k \in \mathbf{Z}$.

Ta có: $-180^o < 30^o + k90^o < 90^o \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{3} + k < 1 \Leftrightarrow k \in \{-2; -1; 0\}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $x = -150^o$, $x = -60^o$ và $x = 30^o$.

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\frac{-\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ta có: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{1}{3} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0\}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = -\frac{4\pi}{9}$ và $x = -\frac{\pi}{9}$.

Bài toán 7.8: Giải các phương trình sau:

a) $\cos 3x = \sin 2x$ b) $\sin(x - 120^o) - \cos 2x = 0$

Giải

a) $\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi \\ \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Cách khác: $\cos 3x = \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$.

b) $\sin(x - 120^o) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos(210^o - x) - \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x}{2}+105^o\right)\sin\left(105^o-\frac{3x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}+105^o = k180^o \\ 105^o-\frac{3x}{2} = k180^o \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -210^o + k360^o \\ x = 70^o + k120^o \end{array}\right.$$

Cách khác: $\sin(x - 120^o) = \cos 2x = \sin(90^o - 2x)$.

Bài toán 7.9: Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \cot 2x$ b) $\tan(2x + 30^o) + \tan 10^o = 0$.

Giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$ và $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Phương trình: $\tan x = \cot 2x \Leftrightarrow \tan x = \tan(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2x + k\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Chọn nghiệm: $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) Điều kiện: $2x + 30^o \neq 90^o + k180^o \Leftrightarrow x \neq 30^o + k90^o$.

PT: $\tan(2x + 30^o) + \tan 10^o = 0 \Leftrightarrow \tan(2x + 30^o) = -\tan 10^o$.

$\Leftrightarrow \tan(2x + 30^o) = \tan(-10^o) \Leftrightarrow 2x + 30^o = -10^o + k180^o$.

$\Leftrightarrow 2x = -40^o + k180^o \Leftrightarrow x = -20^o + k90^o$ (chọn).

Bài toán 7.10: Tìm tham số m để phương trình có nghiệm:

a) $2\sin 3x = m - 1$ b) $m\cos x - 2 = \cos x + 3m$

Giải

a) $2\sin 3x = m - 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{m-1}{2}$

Điều kiện có nghiệm: $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

b) $m\cos x - 2 = \cos x + 3m \Leftrightarrow (m - 1).\cos x = 3m + 2$

Xét $m = 1$ thì PT: $0.\cos x = 2$: vô nghiệm.

Xét $m \neq 1$ thì PT: $\cos x = \frac{3m+2}{m-1}$

Điều kiện có nghiệm: $\left|\frac{3m+2}{m-1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |3m + 2| \leq |m - 1|$.

$\Leftrightarrow (3m + 2)^2 \leq (m - 1)^2 \Leftrightarrow (3m + 2^2 - (m - 1)^2 \leq 0$.

$\Leftrightarrow (4m + 1)(2m + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{4}$

Vậy diều kiện phương trình có nghiệm: $-\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{4}$.

Bài toán 7.11: Tìm tham số để phương trình sau có nghiệm:

a) $2\cot(x + 1) = 3m - 1$ b) $m.\tan x + 2 = m$.

Giải

a) $2\cot(x + 1) = 3m - 1 \Leftrightarrow \cot(x + 1) = \frac{3m-1}{2}$

Vì $\cot(x + 1)$ có giá trị từ $-\infty$ đến $-\infty$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Xét $m = 0$ thì phương trình: $2 = 0$ (vô nghiệm).

Xét m $\neq$ 0 thì phương trình:

$$m.\tan x + 2 = m \Leftrightarrow m.\tan x = m - 2 \Leftrightarrow \tan x = \frac{m-2}{m}$$

Vì tanx có giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Vậy điều kiện có nghiệm là m $\neq$ 0.

Bài toán 7.12: Giải các phương trình sau:

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ b) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$.

Giải

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

b) $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan 3x = 3 \Leftrightarrow \tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.13: Giải các phương trình sau:

a) $2\sin 2x + 1 = 0$ b) $3\cot x - 4 = 0$.

Giải

a) $2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{-\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z}).$$

b) $3\cot x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3\cot x = 4 \Leftrightarrow \cot x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \text{arccot}\frac{4}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Bài toán 7.14: Giải các phương trình sau:

a) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$ b) $\sin x + \sin 2x = 0$

Giải

a) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $2x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

b) $\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos x = -\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi$ hoặc $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Bài toán 7.15: Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ b) $\cot^2 2x - \cot 2x - 2 = 0$.

Giải

a) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 2 = 0$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$.

PT: $t^2 - t - 2 = 0$. Vì $a - b + c = 0$ nên có 2 nghiệm $t = -1$ (chọn) và $t = 2$ (loại).

Do đó $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Điều kiện: $2x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2}$. Đặt $t = \cot 2x$ thì phương trình:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x = -1 \\ \cot 2x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ 2x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Bài toán 7.16: Giải các phương trình sau:

a) $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} = 0$

b) $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$

Giải

a) Ta có $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ nên phương trình trở thành:

$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$. Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$ ta có:

$4t^2 - 2(1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (chọn).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

b) Điều kiện cosx ≠ 0 và sinx ≠ 0 ⇔ $x \neq k\frac{\pi}{2}$

Ta có: 5tanx - 2cotx - 3 = 0 ⇔ $5\tan x - 2\frac{1}{\tan x} - 3 = 0$.

$$\Leftrightarrow 5\tan^2x - 3\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.17: Giải các phương trình:

a) $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$ b) $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$.

Giải

a) Ta có $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$ ⇔ $3\cos 2(2x) - (1 + \cos 6x) = 1$

⇔ $3(2\cos^2 2x - 1) - 1 - \cos 3(2x) - 1 = 0$

⇔ $6\cos^2 2x - 5 - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = 0$ ⇔ $4\cos^3 2x - 6\cos^2 2x - 3\cos 2x + 5 = 0$

Đặt t = cos2x, $|t| \leq 1$ thì phương trình tương đương:

$4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 - 2t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

hoặc $t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4}$ hoặc $t = \frac{1 + \sqrt{21}}{4}$ (loại)

Khi t = 1 ⇔ cos2x = 1 ⇔ x = kπ;

Khi $t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4}$, đặt $\cos\alpha = \frac{1 - \sqrt{21}}{4}$.

PT ⇔ cos2x = cosα ⇔ $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: x = kπ ; $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$.

b) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, phương trình

$2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$ ⇔ $2(2\cos^2x - 1)\cos x - 8\cos^2x + 7\cos x = 1$.

Đặt t = cosx, $|t| \leq 1$, t ≠ 0, phương trình tương đương

$2(2t^2 - 1)t - 8t^2 + 7t - 1 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 8t^2 + 5t - 1 = 0$

⇔ $(t - 1)(4t^2 - 4t + 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t - 1)^2 = 0$

⇔ t = 1 hoặc $t = \frac{1}{2}$ ⇔ cosx = 1 hoặc $\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ hoặc $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi$ (chọn).

Bài toán 7.18: Tìm m để phương trình: cos4x + 6sinx cosx = m có hai nghiệm phân biệt trong đoạn $[\,0, \dfrac{\pi}{4}\,]$.

Giải

Phương trình tương đương: $1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$.

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$ thì phương trình trở thành: $-2t^2 + 3t + 1 = m$.

Với $x \in [0, \dfrac{\pi}{4}] \Leftrightarrow 0 \le 2x \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le t = \sin 2x \le 1$.

Bài toán trở thành tìm m điều kiện để phương trình

$-2t^2 + 3t + 1 = m$ có hai nghiệm thỏa: $0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

Xét parabol $y = f(t) = -2t^2 + 3t + 1$, $0 \le t \le 1$ có bề lõm hướng xuống và hoành độ đỉnh $t = \dfrac{3}{4}$.

Do đó điều kiện: $f(0) < m < f(\dfrac{3}{4}) \Leftrightarrow 1 < m < \dfrac{17}{8}$.

Bài toán 7.19: Xác định a để hai phương trình sau tương đương

$2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \qquad (1)$

$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \qquad (2)$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \cos x + \cos 3x = 1 + 2\cos^2 x - 1 + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = a\cos x + 2(4 - a)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + (4 - 2a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1)[2\cos x - (a - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x = \dfrac{a-3}{2}$

Hai phương trình đã cho tương đương khi

hoặc: $\dfrac{a-3}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 3$ hoặc $\dfrac{a-3}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4$;

hoặc $\dfrac{a-3}{2} > 1 \Leftrightarrow a > 5$ hoặc $\dfrac{a-3}{2} < -1 \Leftrightarrow a < 1$.

Vậy hai phương trình tương đương khi:

a = 3 hoặc a = 4 hoặc a < 1 hoặc a > 5.

Bài toán 7.20: Giải các phương trình sau:

a) $3\cos x + 4\sin x = -5$ b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$.

Giải

a) Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$ thì phương trình trở thành:

$\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = -1$. Vì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

nên tồn tại số α sao cho: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Do đó phương trình:

$\cos\alpha.\cos x + \sin\alpha.\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = -1$

$\Leftrightarrow x - \alpha = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

b) $2\sin 2x - 2\cos 2z = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$, $x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$.

Bài toán 7.21: Giải các phương trình sau:

a) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos x = 1$ b) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$.

Giải

a) Ta có phương trình: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

b) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 3(1 + \cos 2x) = 13$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{34}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{34}}\cos 2x = \frac{16}{\sqrt{34}}$

Vì $\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$

Nên tồn tại số α sao cho: $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ và $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Do đó phương trình: $\cos\alpha.\sin 2x - \sin\alpha.\cos 2x = \frac{16}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \frac{16}{\sqrt{34}}$

Vì $\frac{16}{\sqrt{34}} > 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

Bài toán 7.22: Giải các phương trình

a) $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\cos 7x = 0$ b) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

Giải

a) Phương trình tương đương với

$$\sin 11x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x - \frac{1}{2}\cos 7x \Leftrightarrow \sin 11x = -\sin(7x + \frac{\pi}{6}) = \sin(-7x - \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x = -7x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 11x = \pi + 7x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{108} + \frac{k\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

b) Phương trình tương đương với:

$$\sin 8x - \sqrt{3}\cos 8x = \cos 6x + \sqrt{3}\sin 6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x \Leftrightarrow \sin(8x - \frac{\pi}{3}) = \sin(6x + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{array}\right.$$

Bài toán 7.23: Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7}$.

Giải

Phương trình: $\frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{6} - 7x) = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7}$ hoặc $x = -\frac{13\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7}$.

Nghiệm thỏa điều kiện đề bài: $x = \frac{53\pi}{84}$, $x = \frac{35\pi}{84}$; $x = \frac{59\pi}{84}$.

Bài toán 7.24: Xác định m để phương trình có nghiệm:

a) 5sinx + 2cosx = m b) (m - 2)cosx + (m - 1)sinx = 1.

Giải

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 5^2 + 2^2 \geq m^2 \Leftrightarrow |m| \leq \sqrt{29}$.

b) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow (m - 2)^2 + (m - 1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ hoặc $m \geq 2$.

Bài toán 7.25: Chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi x:

$$-1 \leq \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3} \leq \frac{5}{7}.$$

Giải

Hàm số $y = \dfrac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$.

Ta có $|\sin 2x| \leq 1$, $|\cos 2x| \leq 1$ với mọi x

nên sin2x - cos2x ≥ -2 > -3, do đó D = **R**

nên 2sin2x + cos2x = y(sin2x - cos2x + 3) ⇔ (2 - y)sin2x + (1 + y)cos2x = 3y

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow (2 - y)^2 + (1 + y)^2 \geq (3y)^2$

$\Leftrightarrow 7y^2 + 2y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \dfrac{5}{7}$: đpcm.

Bài toán 7.26: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x - 4}$

Giải

Ta có $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ với mọi x nên sinx + 2cosx ≤ 3 < 4, do đó tập xác định D = **R**. Ta chuyển hàm số về phương trình:

$y = \dfrac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x - 4} \Leftrightarrow$ 3sinx - cosx = y(sinx + 2cosx - 4)

⇔ (3 - y)sinx - (1 + 2y)cosx = -4y

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow (3 - y)^2 + (1 + 2y)^2 \geq (-4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2 + 2y - 10 \leq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{111} + 1}{11} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{111} - 1}{11}$.

Vậy $\max y = \dfrac{\sqrt{111} - 1}{11}$, $\min y = -\dfrac{\sqrt{111} + 1}{11}$.

Bài toán 7.27: Giải các phương trình sau:

a) $3\sin^2 x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$

b) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x.\cos x - \cos^2 x = 4$.

Giải

a) Phương trình: $3\sin^2x + 8\sin x\cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2x = 0$

Xét $\cos x = 0$ thì $\sin x = 0$ (loại).

Xét $\cos x \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2x$ thì phương trình:

$$3\tan^2x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = -\dfrac{8}{3} + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan(-\dfrac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Với $\tan x = -\dfrac{8}{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \arctan(-\dfrac{8}{3} + \sqrt{3}) + k\pi$

Vậy phương trình có các nghiệm là:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ và } x = \arctan(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

b) Ta có: $2\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2x = 4$

$\Leftrightarrow 2\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2x = 4(\sin^2x + \cos^2x)$

$\Leftrightarrow -2\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - 5\cos^2x = 0.$

Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ đều không nghiệm đúng phương trình nên chia 2 vế $\cos^2x$ ta được phương trình tương đương:

$2\tan^2x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0$ có $\Delta = 27 - 40 < 0$

Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 7.28: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\sin^2x - \sin x\cos x = 0.$ b) $\sin^2x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2x = 1$

Giải

a) $\sqrt{3}\sin^2x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

b) PT $\Leftrightarrow \sin^2x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2x = \sin^2x + \cos^2x$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0.$

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Với cosx - $\sqrt{3}$ sinx = 0 ⇔ cotx = $\sqrt{3}$ ⇔ x = $\frac{\pi}{6}$ + kπ.

Vậy các nghiệm là: x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ và x = $\frac{\pi}{6}$ + kπ.

Cách khác: Ta có $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ và

sinxcosx = $\frac{1}{2}$sin2x nên phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 + \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.29: Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{\cos x}$ = 4sinx + 6 cosx

b) $4\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3.$

Giải

a) Điều kiện x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ. Chia hai vế cho cosx, phương trình:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4\frac{\sin x}{\cos x} + 6\frac{\cos x}{\cos x} \Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = 4\tan x + 6.$$

Đặt t = tanx, ta được $t^2 - 4t - 5 = 0$ ⇔ t = - 1 hoặc t = 5

Khi t = - 1 = tanx ⇔ x = - $\frac{\pi}{4}$ + kπ;

Khi t = 5 ⇔ tanx ⇔ x = arctan α + kπ.

Vậy phương trình có nghiệm: x = - $\frac{\pi}{4}$ + kπ; x = artanα + kπ.

b) PT ⇔ $4\cos^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3.$

Vì $\cos^2\frac{x}{2} = 0$ không thỏa phương trình, nên chia hai vế cho $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ ta được phương trình tương đương

$$4\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 3\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 3\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4 + \tan\frac{x}{2} + 3\tan^2\frac{x}{2} = 3(1 + \tan^2\frac{x}{2})$$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ thì phương trình

$$3t^2 + t + 4 = 3(1 + t^2) \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.30: Giải các phương trình:

a) $2\sin^3x - \sin^2x\cos x + 2\sin x\cos^2x - \cos^3x = 0$.

b) $\cos^3x - \sin^3x = \sin x - \cos x$.

Giải

a) Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3x \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$2\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x} + 2\frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$\Leftrightarrow 2\tan^3x - \tan^2x + 2\tan x - 1 = 0$

Đặt $t = \tan x$ thì phương trình: $2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (t^2 + 1)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ với } \alpha = \arctan\frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = \alpha + k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

b) Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3x \neq 0$ ta được:

$$\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{\cos^3 x}$$

$\Leftrightarrow 1 - \tan^3x = \tan x(1 + \tan^2x) - (1 + \tan^2x)$

Đặt t = tanx thì phương trình: $2t^3 - t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(2t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.31: Giải các phương trình:

a) $3\cos^4 x - 4\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x = 0$ b) $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x.$

Giải

a) Vì cosx = 0 không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^4 x \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$3\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x} - 4\frac{\cos^2 x.\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = 0 \Leftrightarrow 3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

Đặt $t = \tan^2 x$, $t \geq 0$ thì phương trình: $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \text{ hoặc } \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) Ta biến đổi phương trình đã cho như sau

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\right]^3 = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^3 = 4\sin x.$$

Vì cosx = 0 không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\right)^3 = 4\frac{\sin x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow (\tan x - 1)^3 = 4\tan x(1 + \tan^2 x)$$

Đặt t = tanx thì phương trình $(t - 1)^3 = 4t(1 + t^2)$

$$\Leftrightarrow 3t^3 + 3t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(3t^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 7.32: Giải và biện luận phương trình: $(m + 1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0.$

Giải

Ta viết lại phương trình

$$(m + 1)\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 1 = 0.$$

Vì sinx = 0 không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x \neq 0$ ta được phương trình tương đương,

$$(m - 1) - 2\cot x + 1 + \cot^2 x = 0$$

Đặt t = cotx thì phương trình $t^2 - 2t + m = 0$

Ta có $\Delta' = 1 - m$.

Nếu $m > 1 \Rightarrow \Delta < 0$: PT vô nghiệm $\Rightarrow$ PT cho vô nghiệm.

Nếu $m \leq 1 \Rightarrow \Delta \geq 0$: PT có nghiệm $t = 1 \pm \sqrt{1 - m}$.

Do đó PT cho có nghiệm $x = \alpha + k\pi$ hoặc $x = \beta + k\pi$, trong đó

$\cot\alpha = 1 + \sqrt{1 - m}$ và $\cot\beta = 1 - \sqrt{1 - m}$.

Bài toán 7.33: Giải các phương trình:

a) $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Giải

a) Phương trình: $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \leq \sqrt{2}$

thì $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x = 1 + 2\sin x.\cos x$

nên $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ nên phương trình tương đương

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -5(\text{ loại}) \Leftrightarrow t = 1 = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hoặc } x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình:

$5(t^2 - 1) + t + 6 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + t + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 20 < 0$.

Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 7.34: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$ b) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$.

Giải

a) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì PT:

$-(t^2 - 1) + t = 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$.

Khi $t = 0 = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Khi $t = 1 = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi$.

Vậy các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \pi + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Phương trình được biến đổi thành

$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì PT:

$t - 2\sqrt{2}\frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: chọn.

Khi $t = \sqrt{2} = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Khi $t = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi$.

Vậy phương trình có các nghiệm:

$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 7.35: Giải các phương trình:

a) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$ b) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$

Giải

a) Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Phương trình:

$2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\sin x - \cos x(4\sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x) = 0$

Xét $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$$

Xét $\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $|t| \leq \sqrt{2}$ thì: $\sin x\cos x = -\frac{t^2 - 1}{2}$

và phương trình trở thành:

$t + (t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (loại) hoặc $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (chọn)

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + k2\pi$ với $\sin\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

b) PT: $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hoặc $\sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1 = 0$

Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Xét $\sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1 = 0$.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $|t| \leq \sqrt{2}$ thì PT:

$t + \frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = - \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

Bài toán 7.36: Giải các phương trình:

a) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$.

b) $2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$

Giải

a) Điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Phương trình được biến đổi $\sin x + \cos x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x . \cos x} = \frac{10}{3}$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \leq \sqrt{2}$, thì $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ và phương trình trở thành

$$3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(3t^2 - 4t - 5) = 0.$$

Chọn $t = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi$ hoặc $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình:

$x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$ với $\sin\alpha = \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}}$.

b) Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Phương trình tương đương:

$2(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1) + 3(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\cos x}(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) + \frac{3}{\sin x}(\cos x - \sin x \cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x \cos x)\left(\frac{2}{\cos x} + \frac{3}{\sin x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x \cos x)(2\sin x + 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0$ (1) hoặc $2\sin x + 3\cos x = 0$ (2)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì PT (1):

$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{2}$ (loại) hoặc $t = 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi$ hoặc $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$.

(2) $\Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{2} = \tan\beta \Leftrightarrow x = \beta + k\pi$.

Bài toán 7.37: Giải các phương trình:

a) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$.

b) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$.

Giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ (1) hoặc $2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x + 1 = 0$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$;

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì (2):

$2t - (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 2 = 0$

Chọn $t = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi$ hoặc $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \alpha - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$

b) PT: $\cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \sin^3 x + \cos^4 x - \sin^4 x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[1 + (\cos x + \sin x) + (1 + \sin x\cos x) + (\cos x + \sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(2 + 2\sin x + 2\cos x + \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$ (1) hoặc $2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x = 0$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì PT

$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3$ (loại) hoặc $t = -1$

$\Leftrightarrow \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\dfrac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$;

$x = \pi + k2\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ với với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 7.38: Tìm m để phương trình

$$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}(\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0; \dfrac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$. Phương trình tương đương:

$$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sin x.\cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x}) = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$, $|t| \le \sqrt{2}$; $t \neq \pm 1$.

thì $\sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ nên phương trình (1) tương đương

$$mt + 1 + \frac{1}{t-1} = 0 \Leftrightarrow t[mt + (1 - m)] = 0 \ (2).$$

Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thì $\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1 \Leftrightarrow 1 < t = \sqrt{2}\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}.$$

Bài toán trở thành tìm m để (2) có nghiệm thuộc $(1; \sqrt{2}\,]$:

$$m \neq 0 \text{ và } 1 < \frac{m-1}{m} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow m \le -(\sqrt{2} + 1).$$

BÀI TẬP

Bài tập 7.1: Giải các phương trình:

a) $\sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x$ b) $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$.

HD-DS

b) $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài tập 7.2: Giải phương trình:

a) $\tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x.\ \tan 3x.\ \tan 5x$

b) $4\sin x \cos x \cos 2x = 1$

HD-ĐS

a) $x = k\pi$.

Bài tập 7.3: Giải các phương trình:

a) $\sin(2x - 15^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $-120^0 < x < 90^0$

b) $(1 + \cos x)(2\cos x - 1) = 0$ với $0^0 < x < 700^0$.

HD-DS

a) $-105^0, 30^0, 75^0$ b) $60^0, 180^0, 300^0, 420^0, 540^0$ và 660^0.

Bài tập 7.4: Giải các phương trình:

a) $\sin^4 x + \cos^4(x + \pi/4) = 1$ b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$

HD-ĐS

b) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$.

Bài tập 7.5: Giải các phương trình:

a) $3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$

b) $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$.

HD-ĐS

b) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Bài tập 7.6: Giải các phương trình:

a) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0$ b) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

HD-ĐS

b) $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$.

Bài tập 7.7: Giải các phương trình:

a) $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$ b) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$.

HD-ĐS

a) $k\frac{\pi}{2}$.

Bài tập 7.8: Chứng minh với mọi tham số $a^2 + b^2 \neq 0$, phương trình:

$a\cos x + b\sin x = c$ hoặc $a\cot x + b\tan x = \sqrt{2}c$ luôn có nghiệm.

HD-ĐS

Xét $a^2 + b^2 \geq c^2$ và $a^2 + b^2 < c^2$.

Bài tập 7.9: Tìm tham số để phương trình:

a) $11\sin^2 x + (m - 2)\sin 2x + 3\cos^2 x = 2$ có nghiệm

b) $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$ có 7 nghiệm thuộc $(-\pi/2, 2\pi)$

HD-ĐS

a) $m \leq -1$ hoặc $m \geq 5$ b) $1 < m < 3$.

8 TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH THEO SIN VÀ COSIN

Sử dụng biến đổi lượng giác, biến đổi đại số để đưa phương trình cho về phương trình lượng giác cơ bản, phương trình theo một hàm số lượng giác, phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx, phương trình thuần nhất (đẳng cấp) đối với sinx và cosx, phương trình đối xứng đối với sinx và cosx, hoặc tích các phương trình đó.

Chú ý:

1) Định hướng biến đổi theo cung góc lượng giác, theo hàm số lượng giác, theo hệ số đặc biệt của phương trình.

2) Có đơn vị và không có đơn vị của ẩn, kết hợp nghiệm.

3) Đánh giá 2 vế dựa trên tập xác định, tập giá trị và các bất đẳng thức cơ bản.

Bài toán 8.1: Giải phương trình: $4(\cos^3x + \sin^3x) = \cos x + 3\sin x$.

Giải

Khi $\cos x = 0 \Rightarrow 4\sin^3x = 3\sin x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin^2 x = \dfrac{3}{4}\end{array}\right.$ vô nghiệm.

Khi $\cos x \neq 0$ chia hai vế cho $\cos^3x$:

$4(\cos^3x + \sin^3x) = \cos x + 3\sin x$.

$\Leftrightarrow 4(1 + \tan^3x) = 1 + \tan^2x + 3\tan x(1 + \tan^2x)$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = \sqrt{3}; t = -\sqrt{3}$.

Vậy các nghiệm: $\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.2: Giải phương trình: $5 + \cos 2x = 6\cos x + 4\sin x$.

Giải

PT: $5 + \cos 2x = 6\cos x + 4\sin x \Leftrightarrow \cos^2x - 3\cos x + 2 = 2\sin x$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x - 2) = 2\sin x \Leftrightarrow 2(2 - \cos x)\sin^2\dfrac{x}{2} = 4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow [(2 - \cos x)\sin\dfrac{x}{2} - 2\cos\dfrac{x}{2}]\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin\dfrac{x}{2} = 0 & (1)\\ (2-\cos x)\sin\dfrac{x}{2} = 2\cos\dfrac{x}{2} & (2)\end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x = 2k\pi$.

Với phương trình (2), ta thấy $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, nên phương trình (2)

$\Leftrightarrow (2 - \cos x)\tan\frac{x}{2} = 2$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có phương trình: $3t^3 - 2t^2 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(3t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Vậy nghiệm $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.3: Giải phương trình:

$$(4\cos^2 2x-1)\sin 2x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sin 3x + \cos 3x) + \sqrt{6} + 1 = 0.$$

Giải

Ta có: $(4\cos^2 2x - 1)\sin 2x$

$= (2\cos 4x + 1)\sin 2x = 2\cos 4x\sin 2x + \sin 2x$

$= \sin 6x - \sin 2x + \sin 2x = 2\sin 3x\cos 3x$

Phương trình trở thành:

$2\sin 3x\cos 3x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sin 3x + \cos 3x) + \sqrt{6} + 1 = 0$

Đặt $t = \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Nên có phương trình:

$t^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})t + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{3}$ (loại).

Do đó $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.4: Giải phương trình: $\sin^2 2x = \cos 2x + \cos 3x - \cos x$.

Giải

PT: $\sin^2 2x = \cos 2x + \cos 3x - \cos x$.

$\Leftrightarrow (\sin 2x + \sin x - \cos x)(\sin 2x + \sin x + \cos x) = 0$

Xét: $\sin 2x + \sin x - \cos x = 0$.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $(|t| \leq \sqrt{2})$

$t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại).

$$x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$$

Xét $\sin 2x + \sin x + \cos x = 0$.

Đặt $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, ($|u| \leq \sqrt{2}$)

$$u^2 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } u = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (loại)}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi.$$

Bài toán 8.5: Giải phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = \frac{1}{2}$.

Giải

PT: $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = \frac{1}{2}$. Với: $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$.

Khi đó VT = -3, VP = $\frac{1}{2}$, PT vô nghiệm.

Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, nhân hai vế với $2\cos\frac{x}{2} \neq 0$

$$\cos 3x.\ 2\cos\frac{x}{2} - \cos 2x.\ 2\cos\frac{x}{2} + \cos x.\ 2\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.\ 2\cos\frac{x}{2}$$

Thu gọn được: $\cos\frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

So sánh với điều kiện thì $k \neq 3 + 7h$; $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy PT có nghiệm $x = \frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7}$, $k \neq 3 + 7h$; $h, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.6: Giải phương trình: $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$.

Giải

Biến đổi phương trình

$$\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x) - \sin 2x - 4 = 0$$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Khi đó phương trình trên thành: $t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -5$ (loại)

Nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.7: Giải phương trình:

$$8(\sin^6x + \cos^6x) + 3\sqrt{3}\sin4x = 3\sqrt{3}\cos2x - 9\sin2x + 11.$$

Giải

Biến đổi PT:

$$8(\sin^6x + \cos^6x) + 3\sqrt{3}\sin4x = 3\sqrt{3}\cos2x - 9\sin2x + 11$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin2x)(1 + \sqrt{3}\cos2x - \sin2x) = 0$$

Xét: $1 - 2\sin2x = 0 \Leftrightarrow \sin2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Xét: $1 + \sqrt{3}\cos2x - \sin2x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hoặc } x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 8.8: Giải phương trình: $2\sin^3x - \cos2x + \cos x = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình:

$$2\sin x(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2x + 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - \cos^2 x) - (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

Vì $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x + \cos x + 2 > 0$ nên: $1 - \cos x = 0$ hay $\sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ hay $\tan x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = k2\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

Bài toán 8.9: Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin2x - \sin x$.

Giải

Ta có $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x = 1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z}).$$

Bài toán 8.10: Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Giải

Ta có $(\sin x + \cos x) + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hoặc $1 + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Bài toán 8.11: Giải PT: $\sqrt{3}(\sin 2x - 3\sin x) + 5 = 2\cos^2 x + 3\cos x$.

Giải

Biến đổi phương trình thành

$(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x) - 3(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Giải được nghiệm của phương trình:

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = k2\pi;\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 8.12: Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 3(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$.

Giải

Biến đổi phương trình:

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 3(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2 - 3(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x + \cos x - 3)(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$

Xét $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 3$: vô nghiệm

Xét $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.13: Giải phương trình: $1 + \sin x + \sin 2x = \cos 3x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$1 - \cos 3x + \sin x + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Xét: $\sin\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}$

$$\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm $x = \frac{k2\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 8.14: Giải phương trình: $2(\sin 3x + \sin 2x) = \sin x + \sqrt{3}(1 + \cos x)$.

Giải

Ta có PT: $2(\sin 3x + \sin 2x) = \sin x + \sqrt{3}(1 + \cos x)$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\sin\frac{5x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = 0$$

Xét: $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

Và $\sin\frac{5x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{5x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

Do đó: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hay $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$.

Vậy nghiệm $x = \pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hay $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 8.15: Giải phương trình:

$$\sin 4x + 2\cos 2x + 4(\sin x + \cos x) = 1 + \cos 4x.$$

Giải

Phương trình $\sin 4x + 2\cos 2x + 4(\sin x + \cos x) = 1 + \cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x + 4(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x + 1 - \cos 2x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x\cos x + 2\sin^2 x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ (sinx + cosx)((1 - 2sin^{2}x)sinx + 1) = 0

$\Leftrightarrow$ (sinx + cosx)(2sin^{3}x - sinx - 1) = 0

$\Leftrightarrow$ (sinx + cosx) (sinx - 1)(2sin^{2}x + 2sinx + 1) = 0 (bậc 2 VN)

$\Leftrightarrow$ sinx + cosx = 0 hoặc sinx - 1 = 0.

Với sinx + cosx = 0 $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Với sinx = 1 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là: x = $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, x = $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k $\in$ **Z.**

Bài toán 8.16: Giải phương trình: (1 + sin2x)(sinx + cosx) = sinx + 3cosx.

Giải

Ta có (1 + sin2x)(sinx + cosx) - 3cosx - sinx = 0

$\Leftrightarrow$ cosxsin2x - 2cosx + sinxsin2x = 0

$\Leftrightarrow$ cosx(sin2x - 2 + 2sin^{2}x) = 0 $\Leftrightarrow$ cosx(sinxcosx - 1 + sin^{2}x) = 0

$\Leftrightarrow$ cosx(sinxcosx - cos^{2}x) = 0 $\Leftrightarrow$ cos^{2}x(sinx - cosx) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x - \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$, x = $\frac{\pi}{4} + k\pi$, (k $\in$ **Z**).

Bài toán 8.17: Giải phương trình: 2cosxcos2xcos3x - 7cos2x = 7.

Giải

Ta có 2cosxcos2xcos3x - 7cos2x = 7

$\Leftrightarrow$ (cos4x + cos2x)cos2x - 7cos2x - 7 = 0

$\Leftrightarrow$ (2cos^{2}2x + cos2x - 1)cos2x - 7cos2x - 7 = 0

$\Leftrightarrow$ 2cos^{3}2x + cos^{2}2x - 8cos2x - 7 = 0

Đặt t = 2cos2x, $|t| \le 1$. Phương trình trở thành

$$2t^3 + t^2 - 8t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1\\ t = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4}\end{array}\right.$$

Chọn nghiệm t = -1, ta có cos2x = -1 $\Leftrightarrow$ 2x = $\pi + k2\pi$ $\Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k $\in$ **Z**.

Bài toán 8.18: Giải phương trình:

$(\sin 2x - \cos 2x)\sin x + \sin 3x = (\sin x + \cos x)\cos x.$

Giải

Phương trình tương đương với:

$\sin 2x\sin x - \cos 2x\sin x + \sin 3x = \cos x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin x - \cos 2x\sin x + \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = \cos x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos x(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $2\sin x - 1 = 0$ hay $\sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$ hay $\tan x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ *hay* $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 8.19: Giải phương trình:

$\sin 3x + \sin 2x + \sin x + 1 = \cos 3x + \cos 2x - \cos x.$

Giải

Phương trình tương đương

$(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x + (1 - \cos 2x) = \cos 3x - \cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = -2\sin 2x.\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos x + \sin x) + \sin x(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1)(\cos x + \sin x) = 0$

Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

Xét $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

Xét $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 8.20: Giải phương trình: $3(\cos^3 x - \sin^3 x) = (4 + \sin 2x)\cos x.$

Giải

Phương trình tương đương với:

$3\cos^3 x - 3\sin^3 x = 4\cos x + 2\sin x\cos^2 x$

Ta có: $\cos x = 0$, không thỏa mãn phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq$ ta được:

$3 - 3\tan^3 x = 4(1 + \tan^2 x) + 2\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 4\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x + \tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.21: Giải phương trình:

$$(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$$

Giải

Phương trình tương đương với:

$\cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \cos^2 x\sin x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x - \cos x + \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hay $\sin x = 1$ hay $\cos x = 1$

Ta có: $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.22: Giải phương trình:

$$\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 4\sqrt{3}\cos^2 x.\sin x.\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình:

$$\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 4\sqrt{3}\cos^2 x.\sin x.\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\left(\sin 4x - \sqrt{2}\right) = 0$$

Vì $\sin 4x \leq 1 \Rightarrow \sin 4x - \sqrt{2} < 0$

Do đó $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.23: Giải phương trình: $\sin(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}) - \sin[\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})] = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2} \Leftrightarrow -2\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos\frac{3x}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}[\sqrt{2}+2\cos(x+\frac{\pi}{4})] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{3x}{2}=0\\ \cos(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x = \frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}$.

Bài toán 8.24: Giải phương trình: $(1 + 2\sin x).\cos x(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Giải

Phương trình tương đương

$$(1+2\sin x)(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1+2\sin x)(\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) = 1$$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2\sin x\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin x\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin x(-\sin x - \sqrt{3}\cos x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$

Khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Khi $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+\frac{\pi}{3}) = \cos(x-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3} = x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hoặc } 2x+\frac{\pi}{3} = -(x-\frac{\pi}{3})+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{-\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x = \frac{-\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Bài toán 8.25: Giải phương trình: $\cos x(1 + 2\sqrt{3}\sin 2x) = \cos 3x - 4\cos(\frac{3\pi}{2} - 2x)$.

Giải

Biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$\cos x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = \cos 3x + 4\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) + 4\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(2 - \sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{k\pi}{2}\\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., (k \in \mathbf{Z})$$

Bài toán 8.26: Giải phương trình: $(\cos x - \sin x - \sqrt{2})\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$.

Giải

Ta có: $2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin x\cos x) = -2\cos x + \cos x - \sin x - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos x(\cos x - \sin x) - \sqrt{2}(\sqrt{2}\cos x + 1) + (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x + 1)(\cos x - \sin x - \sqrt{2}) = 0.$$

Xét $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Và $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Vậy nghiệm $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.27: Giải phương trình: $1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 2x = 4\sin^2\frac{x}{2}$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2 + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x = 2(1 - \cos x)$$

$\Leftrightarrow 2 - \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2 - 2\cos x \Leftrightarrow -\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = -2\cos x$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{5\pi}{6} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{5\pi}{6} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in Z \end{array}\right.$$

Bài toán 8.28: Giải phương trình: $\sin x\cos 4x + \cos^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{5}{2}$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x\cos 4x + \cos^2 2x = 2\left(1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x + \cos^2 2x = -2\sin x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 2x - 1) + \cos^2 2x = -2\sin x - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)\left(\cos^2 2x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Bài toán 8.29: Giải phương trình:

$$\frac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x(2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{2\sin^2 x - 1} = 0.$$

Giải

ĐK: $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Biến đổi phương trình:

$4\cos^3 x + 4\cos^2 x\sin x - 2\cos^2 x - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện, được $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.30: Giải phương trình: $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{\cos x+\cos 2x} = \frac{2}{3}(3-\sqrt{3}\sin x)$.

Giải

$\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{\cos x+\cos 2x} = \frac{2}{3}(3-\sqrt{3}\sin x)$. ĐK: $\cos x \neq -1; 1/2$

PT $\Leftrightarrow 2\cos x = \frac{2}{3}(3-\sqrt{3}\sin x) \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Chọn nghiệm $x = k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.31: Giải phương trình: $\frac{\cos x(\cos x+2\sin x)+3\sin x(\sin + \sqrt{2})}{\sin 2x-1} = 1$.

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 1$, khi đó PT $\Leftrightarrow$

$\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 3\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x = \sin 2x - 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2\sin 2x + 3 - 3\cos 2x + 6\sqrt{2}\sin x = 2\sin 2x - 2$

$\Leftrightarrow -2\cos 2x + 6\sqrt{2}\sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow -1(1 - 2\sin^2 x) + 3\sqrt{2}\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{2}(VN) \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi(VN) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Bài toán 8.32: Giải phương trình: $\frac{3(\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2})}{2+\sin x} = \cos x$.

Giải

Ta có $\sin x + 2 > 0, \forall x$

Phương trình đã cho tương đương

$3(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})(1 + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) = \cos x.(2 + \sin x)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})(2 + \sin x) = \cos x(2 + \sin x)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})[\frac{3}{2} + (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})] = 0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$ (1) hoặc $\frac{3}{2} + (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}) = 0$ (2)

Giải (1): $\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Giải (2): $\Leftrightarrow \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{-3}{2\sqrt{2}} < -1$:Phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.33: Giải phương trình: $\frac{4\cos x - \sqrt{3}\sin 2x}{1 - \sin x} = 2(1 + \sin x)$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 1$. Ta có:

$\Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3}\sin x\cos x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3}\sin x\cos x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x(2 - \sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$.

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Xét $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Vậy nghiệm PT là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.34: Giải phương trình: $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$. Ta có

PT $\Leftrightarrow 1 + \cos x = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

Đặt: $t = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. ĐK: $-1 \le t \le 1$.

Ta có: $2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (chọn).

Vậy nghiệm: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.35: Giải phương trình: $\frac{\cos 2x - \sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2} + 2\cos x} = \sin x$.

Giải

Với điều kiện $\cos x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x + 1 - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin x + 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) = 0$

Xét $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy nghiệm PT là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.36: Giải phương trình: $\frac{\sin 3x - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3}{\sin 3x - 1} = 0$.

Giải

Điều kiện $\sin 3x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với:

$\sin 3x - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos(3x - \frac{\pi}{2}) - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3u - 4\cos u - 3 = 0$ (với $u = x - \frac{\pi}{6}$) $\Leftrightarrow 4\cos^3 u - 7\cos u - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos u = -1 \\ \cos u = -\dfrac{1}{2} \\ \cos u = \dfrac{3}{2} \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm là $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Bài toán 8.37: Giải phương trình: $8\cos4x\cos^2 2x + \sqrt{1-\cos3x} + 1 = 0$.

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\cos4x(1 + \cos4x) + \sqrt{1-\cos3x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^2 4x + 4\cos4x + 1) + \sqrt{1-\cos3x} = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos4x + 1)^2 + \sqrt{1-\cos3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos4x + 1 = 0 \\ 1 - \cos3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos4x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = l\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in Z) \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

Bài toán 8.38: Giải phương trình:: $(1 + \sin x)^2 = \cos x$ với $|x| < 10$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \geq 0$.

PT $\Leftrightarrow (1 + \sin x)^4 = \cos^2 x \Leftrightarrow (1 + \sin x)^4 = 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)\,[(1 + \sin x)^3 - (1 - \sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)\,(\sin^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)\,\sin x(\sin^2 x + 3\sin x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin x = -1$

Chọn nghiệm $x = k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Mà $|x| < 10$ nên $x = -\dfrac{5\pi}{2}, -2\pi, -\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Bài toán 8.39: Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình:

$$\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Giải

Ta có: $2\cos 2x\sin x - 2\sqrt{3}\sin 2x\sin x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow (1 + 2\sin x)(\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) = 0$

Xét $1 + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$.

Xét $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó nghiệm: $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Chọn các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là $x = \frac{\pi}{12}; x = -\frac{\pi}{6}; x = -\frac{5\pi}{12}$.

Bài toán 8.40: Tìm nghiệm $x \in [0; \pi]$ của phương trình:

$$2\cos 4x - (\sqrt{3} - 2)\cos 2x = \sin 2x + \sqrt{3}.$$

Giải

Biến đổi phương trình lượng giác đã cho

$2(\cos 4x + \cos 2x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\cos 3x - \sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Chọn các nghiệm $x \in [0, \pi]$ của PT là: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{11\pi}{12}; \frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}\right\}$.

Bài toán 8.41: Tìm các nghiệm của các phương trình:

$\sin^2 2x - \cos^2 3x = \sin(5x + \frac{\pi}{2})$ thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

Giải

Ta có: PT $\sin^2 2x - \cos^2 3x = \sin(5x + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow -\cos 4x - \cos 6x = 2\cos 5x$

Hay: $2\cos 5x + 2\cos 5x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x\,(1 + \cos x) = 0$

Do đó: $\cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Hoặc $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm cần tìm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$ là $x = \frac{\pi}{10}$.

Bài toán 8.42: Tìm nghiệm x thuôc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình:

$$\frac{\sin 2x + 2\cos^2 x + 2\sin x + 2\cos x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}\cos 2x}{\sin x}.$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương dương với

$$\frac{2\cos x(\sin x + \cos x) + 2(\sin x + \cos x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)} = \frac{\sqrt{6}\cos 2x}{\sin x}$$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 2)\sin x = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin x = \sqrt{3}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = -x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - (-x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Chọn nghiệm $x \in (0, \pi)$ là $x = \frac{\pi}{9}, x = \frac{7\pi}{9}$.

Bài toán 8.43: Giải phương trình: $\sin^{2018}x + \cos^{2018}x = 1$.

Giải

Ta có $\cos^{2018}x \leq \cos^2 x$, dấu = xảy ra khi $\cos x = 0$ hoặc $\cos x = \pm 1$ và $\sin^{2018}x \leq \sin^2 x$, dấu = xảy ra khi $\sin x = 0$ hoặc $\sin x = \pm 1$.

Nên $\sin^{2018}x + \cos^{2018}x \le \sin^2x + \cos^2x = 1$.

Do đó, phương trình tương đương với: $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$, k $\in$ **Z**.

Bài toán 8.44: Giải phương trình: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$.

Giải

PT: $2 = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow 2 = \sin(2x - \dfrac{\pi}{6}) + \sin(x + \dfrac{\pi}{6})$.

Vì $\sin(2x - \dfrac{\pi}{6}) \le 1$ và $\sin(x + \dfrac{\pi}{6}) \le 1$ với mọi x nên VP ≤ 2.

Do đó phương trình đề bài tương đương

$$\begin{cases}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1\\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Bài toán 8.45: Giải phương trình hai ẩn:

$$\cos^4x + \sin^4x + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} = 8 + \frac{\sin y}{2}$$

Giải

Điều kiện: $x \ne \dfrac{k\pi}{2}$. Ta có

$$VT = (\cos^4x + \sin^4x)(1 + \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$= (1 - 2\sin^2x\cos^2x)(1 + \frac{16}{(2\sin x\cos x)^4})$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}) \ge (1 - \frac{1}{2})(1 + 16) = \frac{17}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi

$\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

và VP = $8 + \dfrac{\sin y}{2} \le 8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$.

Dấu " = " xảy ra khi siny = 1 $\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + m2\pi$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{\pi}{2} + m2\pi$ với k, m $\in$ **Z**.

BÀI TẬP

Bài tập 8.1: Giải các phương trình sau:

a) cosxcos5x = cos2xcos4x b) sin2x + sin4x = sin6x.

HD-ĐS

a) $x = k\frac{\pi}{3}$ b) $x = k\frac{\pi}{3}$; $x = k\frac{\pi}{2}$.

Bài tập 8.2: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$. b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

HD-ĐS

a) $x = k\frac{\pi}{5}$; $x = k\frac{\pi}{2}$.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$.

Bài tập 8.3: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$ b) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

HD-ĐS

a) Phương trình vô nghiệm.

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Bài tập 8.4: Giải các phương trình:

a) $\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$

b) $1 + \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$.

HD-ĐS

a) $x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, k $\in$ **Z**; b) $x = k\pi$, k $\in$ **Z**.

Bài tập 8.5: Giải các phương trình:

a) 2sin2x + 3sinx = - 3cosx b). $2\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2})$.

HD-ĐS

b) Đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$

Bài tập 8.6: Giải phương trình:

a) $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$

b) $\cos\frac{\pi}{4}(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}) = 1, x \in Z$.

HD-ĐS

b) x = -21 và x = -3

Bài tập 8.7: Giải các phương trình:

a) cosx. cos3x=1 b)$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

HD-ĐS

a) $x = k\pi$

Bài tập 8.8: Giải các phương trình:

a) $2^{2+\sin^2 x} + 2^{2+\cos^2 x} = -16x^2 + 24|x| - 1$

b) $(\sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x})^2 + (\cos^3 x + \frac{1}{\cos^3 x})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 y$.

HD-ĐS

a) Dùng bất đẳng thức Côsi b) VT $\geq \frac{81}{4} \geq$ VP.

Bài tập 8.9: Tìm điều kiện 2 phương trình tương đương:

(1): sin3x + cos2x = 1 + 2sinx. cos2x

(2): sin3x - msinx = (4 - 2|m|) $\sin^2 x$

HD-ĐS

$0 < m < 1$, $m = 3$, $m = 4$, $m > 5$.

9 TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH THEO TANG VÀ COTANG

Sử dụng biến đổi lượng giác, biến đổi đại số để đưa phương trình cho về phương trình lượng giác cơ bản, phương trình theo một hàm số lượng giác tang hay cotang, hoặc tích các phương trình đó với phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx, phương trình thuần nhất (đẳng cấp) đối với sinx và cosx, phương trình đối xứng đối với sinx và cosx.

Chú ý:

1) Định hướng biến đổi theo cung góc lượng giác, theo hàm số lượng giác, theo hệ số đặc biệt của phương trình.

2) Có đơn vị và không có đơn vị của ẩn, kết hợp nghiệm.

3) Điều kiện xác định của tanx là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ của cotx là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ hay đơn vị độ tương ứng.

4) Đánh giá 2 vế dựa trên tập xác định, tập giá trị và các bất đẳng thức cơ bản.

Bài toán 9.1: Giải phương trình: tanx + tan2x = sin3xcosx.

Giải

ĐKXĐ: cosx ≠ 0 và cos2x ≠ 0. Với điều kiện đó, ta có:

$\tan x + \tan 2x = \sin 3x\cos x \Leftrightarrow \dfrac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = \sin 3x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 3x(1 - \cos^2 x.\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0$ hoặc $\cos^2 x.\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0$ hoặc $(1 + \cos 2x)\cos 2x = 2$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0$ hoặc $\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0$ hoặc $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$ hoặc $x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 9.2: Giải phương trình: $\tan^2 x - \tan^2 x\sin^3 x - (1 - \cos^3 x) = 0$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

PT: $\tan^2 x - \tan^2 x.\sin^3 x - (1 - \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1-\sin^3 x) = 1-\cos^3 x \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin^3 x) = \cos^2 x(1 - \cos^3 x)$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x.\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\cos x=0 \\ 1-\sin x=0 \\ \sin x-\cos x=0 \\ \sin x+\cos x+\sin x.\cos x=0 \end{array}\right.$$

Xét: $\left[\begin{array}{l} 1-\cos x=0 \\ 1-\sin x=0 \\ \sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \sin x=1 \\ \tan x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$

Xét: sinx + cosx + sinx. cosx = 0

Đặt: t = sinx + cosx = $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, (t ∈ [$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$]) ⇒ sinx. cosx = $\dfrac{t^2-1}{2}$

Khi đó: t + $\dfrac{t^2-1}{2}$ = 0 ⇔ $t^2+2t-1=0$.

Chọn: t = $\sqrt{2}$ - 1 ⇔ $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\alpha+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}-\alpha+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

So sánh điều kiện, phương trình có nghiệm là: x = $k2\pi$,

$x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}-\alpha+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Bài toán 9.3: Giải phương trình: $3\tan^2x+2\sqrt{2}\cos^2x=(2+3\sqrt{2})\sin x$.

Giải

Điều kiện: cosx ≠ 0.

PT: $3\tan^2x+2\sqrt{2}\cos^2x=(2+3\sqrt{2})\sin x$

⇔ $3(\tan^2x-\sqrt{2}\sin x)+2(\sqrt{2}\cos^2x-\sin x)=0$

⇔ $3\dfrac{\sin x}{\cos^2x}(\sin x-\sqrt{2}\cos^2x)+2(\sqrt{2}\cos^2x-\sin x)=0$

⇔ $(2\cos^2x-3\sin x)(\sqrt{2}\cos^2x-\sin x)=0$

Xét: $2\cos^2x-3\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2x+3\sin x-2=0$

Chọn: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Và $\sqrt{2}\cos^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

Chọn: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.4: Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

Giải

Với điều kiện $\cos x \neq 0$, đặt $t = \tan x$.

$\Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$.

Phương trình: $(1 - t)\frac{(1+t)^2}{1+t^2} = 1 + t \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t)^2 = (1 + t)(1 + t^2)$

$\Leftrightarrow 2t^2(1 + t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -1$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$ (chọn).

Bài toán 9.5: Giải phương trình: $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x$.

Giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Biến đổi phương trình về:

$1 - \cos^2 x.\cos^2 2x = 4\cos^4 x \Leftrightarrow 2 - \cos^2 2x\,(1 + \cos 2x) = 2(1 + \cos 2x)^2$

Đặt: $t = \cos 2x$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó phương trình trên thành:

$t^3 + 3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Vậy $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

So sánh điều kiện, nghiệm của PT: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $(k \in \mathbf{Z})$.

Bài toán 9.6: Giải phương trình $2\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sin^2 x - \tan x$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương

$1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin^2 x - \tan x \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2\sin^2 x - \tan x$

$\Leftrightarrow$ 2sinx. cosx + 2sin^{2}x - tanx - 1 = 0

$\Leftrightarrow$ 2sinx(cosx + sinx) - $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$ (cosx + sinx)(sin2x - 1) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0\\ \sin 2x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

Bài toán 9.7: Giải phương trình: sin3x – cosx. sin2x = sinx. cos2x. tanx.

Giải

ĐK: cosx $\neq$ 0

VT = sin3x - $\dfrac{1}{2}$sin3x - $\dfrac{1}{2}$sinx = $\dfrac{1}{2}$sin3x - $\dfrac{1}{2}$sinx = sinxcos2x

PT $\Leftrightarrow$ sinxcos2x(1 - tanx) = 0 $\Leftrightarrow$ sinx = 0 hoặc cos2x = 0 hoặc tanx = 1

$\Leftrightarrow$ x = kπ hoặc x = $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ hoặc x = $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Vậy nghiệm PT là: x = kπ; x = $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.8: Giải phương trình: sin^{2}x (tanx - 1) = 3sinx(cosx + sinx) – 3.

Giải

Điều kiện: cosx $\neq$ 0. Chia hai vế cho cos^{2}x $\neq$ 0.

Phương trình tương đương với

tan^{2}x(tanx - 1) = 3tanx(1 + tanx) - 3(1 + tan^{2}x)

$\Leftrightarrow$ tan^{3}x - tan^{2}x - 3tanx + 3 = 0 $\Leftrightarrow$ (tanx - 1)(tan^{2}x - 3) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$.

Bài toán 9.9: Giải phương trình: sin3x = cosx. cos2x(tan^{2}x + tan2x).

Giải

Điều kiện: cosx $\neq$ 0, cos2x $\neq$ 0

Phương trình tương đương với:

$$\sin 3x = \cos x\cos 2x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)$$

$\Leftrightarrow \sin 3x\cos x = \sin^2 x\cos 2x + \sin 2x\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x(3 - 4\sin^2 x)\cos x = \sin^2 x\cos 2x + 2\sin x\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \sin x(3 - 4\sin^2 x)\cos x = \sin^2 x\cos 2x + 2\sin x\cos^3 x$

Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$: thỏa mãn

Xét $\sin x \neq 0$ thì $(3 - 4\sin^2 x)\cos x = \sin x\cos 2x + 2\cos^3 x$

$\Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x)\cos x = \sin x\cos 2x \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)\cos x = \sin x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\cos x = \sin x\cos 2x \Leftrightarrow \cos x = \sin x$ (vì $\cos 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (loại).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.10: Giải phương trình lượng giác:

$$(\cot 3x + \cot x)\cot 4x = (\cot 3x - \cot x)\cot 2x.$$

Giải

Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{4}, x \neq \frac{k\pi}{3}$ với k nguyên

PT $(\cot 3x + \cot x)\cot 4x = (\cot 3x - \cot x)\cot 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x\sin x + \cos x\sin 3x}{\sin 3x\sin x}.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos 3x\sin x - \cos x\sin 3x}{\sin 3x\sin x}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x + x).\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -\sin(3x - x).\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos 4x = -\cos 2x$$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{6}$ với n nguyên

Bài toán 9.11: Giải phương trình: $(1 - \cot 2x\tan x)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$.

Giải

ĐK $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Với ĐK này, PT $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(2x - x)}{\sin 2x\cos x}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\cos^2 x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan^2 x)(\sqrt{3}\tan x - 1) = 8$$

Đặt t = tanx ta có:

$$\sqrt{3}t^3 - t^2 + \sqrt{3}t - 9 = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{3})(\sqrt{3}t^2 + 2t + 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$$

Kết hợp nghiệm, nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài toán 9.12: Giải phương trình: $(\tan x \cot 2x - 1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{1}{2}$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

$$PT \Leftrightarrow \frac{\sin x\cos 2x - \cos x\sin 2x}{\cos x\sin x}.\cos 4x = \frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin x}{2\cos^2 x\sin x}.\cos 4x = \frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\cos 4x = \left(\frac{1}{2}\sin^2 2x - 1\right)\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 2x + 1 = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) - 1\right)\frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x - 7\cos^2 2x + \cos 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\cos^2 2x - 6\cos 2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\ (VN)\\ \cos 2x = 3 - \sqrt{14}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi,\ k \in Z$.

Bài toán 9.13: Giải phương trình:

$$(1 - \cot x)\sin^3 x + (\cos x - \sin x)\cos^2 x = \cos x + \sin x.$$

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình tương đương với

$$\sin^3 x + \cos^3 x - (\sin^2 x\cos x + \cos^2 x\sin x) = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\tan x + 1) = 0$ (vì $\sin x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x) = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.14: Giải phương trình: $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$.

Giải

ĐK: $x \neq k\frac{\pi}{2}$. Đặt $t = \tan x + \cot x \Rightarrow |t| = |\tan x| + |\cot x| \geq 2$.

Phương trình: $t^2 - t = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$

Chọn nghiệm $t = 2 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2$.

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Các nghiệm điều thoả điều kiện.

Bài toán 9.15: Giải phương trình: $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$.

Giải

Vì $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x\cos 2x$ nên điều kiện: $\sin 4x \neq 0$.

Ta có: $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{\sin 4x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x\sin 2x + \cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{2\sin 2x\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\cos x} = \frac{\cos 4x}{\cos 2x} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

Nếu $k = 3m$ ($m \in \mathbf{Z}$) thì: $\sin 4x = \sin 4m\pi = 0$: loại.

Nếu $k = 3m \pm 1$ ($m \in \mathbf{Z}$) thì: $\sin 4x = \sin\left(\pm\frac{4\pi}{3} + 4m\pi\right) = \pm\sin\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = (3m \pm 1)\frac{\pi}{3}$ với m nguyên.

Bài toán 9.16: Giải PT: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Điều kiện: $x \neq k\pi$ và $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Biến đổi phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}+\frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}-2\right)=0$$

$\Leftrightarrow$ cosx(sinx + cosx - 2$\sqrt{2}$ sinxcosx) = 0

Với cosx = 0 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ

Với sinx + cosx - 2$\sqrt{2}$ sinxcosx = 0 (1)

Đặt t = sinx + cosx = $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

ĐK: $|t| \le \sqrt{2}$. Khi đó (1) thành:

$$-\sqrt{2}t^2 + t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

So sánh điều kiện, nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ; } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

Bài toán 9.17: Giải phương trình: $\frac{\tan x+1}{\tan x-1}=\frac{1+\sin 2x}{\tan x\sin 2x}$.

Giải

Điều kiện: sin2x ≠ 0, tanx ≠ 1.

Phương trình đã cho tương đương với:

(tanx + 1) tanxsin2x = (tanx - 1)(1 + sin2x)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x}.2\sin x\cos x = \frac{\sin x-\cos x}{\cos x}(\sin x+\cos x)^2$$

$\Leftrightarrow$ 2(sinx + cosx)$\sin^2$x = (sinx - cosx)$(\text{sinx + cosx})^2$

$\Leftrightarrow$ (sinx + cosx)(2$\sin^2$x - (sinx - cosx)(sinx + cosx)) =0

$\Leftrightarrow$ (sinx + cosx)($\sin^2$x + $\cos^2$ x) = 0

$\Leftrightarrow$ sinx + cosx = 0

$\Leftrightarrow$ tanx = -1 $\Leftrightarrow$ x = -$\frac{\pi}{4}$ + kπ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là: x = -$\frac{\pi}{4}$ + kπ, k ∈ **Z**

Bài toán 9.18: Giải phương trình: $2\tan x+\sin\left(\frac{2x+5\pi}{2}\right)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 1$. Phương trình tương đương

$$2\tan x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \Leftrightarrow 2\tan x + \cos x = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$\Leftrightarrow (2\sin x + \cos^2 x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x + \cos^2 x)(1 - \sin x) = 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x + \cos^2 x - 1 - \sin x)(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x + \cos^2 x - 1 - \sin x = 0$ vì $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow \sin x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ vì $\sin x \neq 1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.19: Giải phương trình: $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos x} = 2 - \tan^2 x - \dfrac{2}{\cos x}$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq -1$, $\cos x \neq 0$

Khi đó phương trình tương đương:

$$\frac{2(1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{2(1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} = \frac{3\cos^2 x - 2\cos x - 1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} = \frac{(\cos x - 1)(3\cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x)\cos^2 x = (\cos x - 1)(3\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x + 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$ (vì $\cos x \neq -1$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k2\pi$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.20: Giải phương trình: $\dfrac{1}{2\sin x} + \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\cos 3x - 1}{\sin 2x}$.

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \neq 0, \cos x \neq 0$$

PT tương đương với $\frac{1}{2\sin x} - \cot 2x = \frac{\cos 3x - 1}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow$ cosx - cos2x = cos3x - 1 $\Leftrightarrow$ 1 - cos2x = cos3x - cosx

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = -2\sin 2x \sin x \Leftrightarrow \sin^2 x(1 + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ (do sinx $\neq$ 0) $\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm phương trình là: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in$ **Z.**

Bài toán 9.21: Giải các phương trình: $\frac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2\cos x = 2$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq \sin x \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Phương trình

$\Leftrightarrow$ 3(sinx + tanx) - 2cosx(tanx - sinx) = 2(tanx - sinx)

$\Leftrightarrow \sin x(3 + \frac{3}{\cos x} + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,(2\cos^2 x + 3\cos x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 3 = 0$

Vì $\Delta < 0$ nên phương trình cho vô nghiệm.

Bài toán 9.22: Giải phương trình: $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \tan x + \cot 2x \neq 0 \\ \cot x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Phương trình: $\frac{\cos x \sin 2x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\frac{\cos x - \sin x}{\sin x}}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\,(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ sinx = 0 hoặc $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = k\pi$ (loại) hoặc $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Ta chọn nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in$ **Z.**

Bài toán 9.23: Giải phương trình: $\dfrac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$.

Giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. Phương trình:

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x \cos 2x} = 16(1 + \cos 4x) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = 32\cos^2 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 8\cos^2 2x \sin^2 2x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}.$$

So với điều kiện ta chọn nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$.

Bài toán 9.24: Giải phương trình: $(\sin 3x - 2\sin x)\left(2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 3\tan x$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$(3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x).\cos 2x = 3\sin x \Leftrightarrow (1 - 4\sin^2 x)\sin x.\cos 2x = 3\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x\,[(1 - 4\sin^2 x).\cos 2x - 3] = 0 \Leftrightarrow \sin x\,(2\cos^2 2x - \cos 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $2\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos 2x = -1$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Với $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.25: Giải phương trình: $3(\tan x - \cot x) = 4\sin 2x - \dfrac{6}{\sin 2x}$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3.\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sin^2 2x - 6}{2\sin x \cos x} \Leftrightarrow 3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 2\sin^2 2x - 3$$

$\Leftrightarrow -3\cos 2x = 2(1 - \cos^2 2x) - 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Chọn nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.26: Giải phương trình: $2\sin x(\sin 3x + 2\sin 4x) = \dfrac{\tan x + 2\sqrt{3}\cos 2x}{\tan x + \cot 2x}$.

Giải

Điều kiện: sin2x ≠ 0, tanx + cot2x ≠ 0.

Phương trình tương đương với

$$2\sin x(\sin 3x + 2\sin 4x) = \dfrac{\tan x + 2\sqrt{3}\cos 2x}{\dfrac{\sin x\sin 2x + \cos 2x\cos x}{\cos x\sin 2x}}$$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin 3x + 2\sin 4x) = (\tan x + 2\sqrt{3}\cos 2x)\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + 2\sin 4x = \sin x + 2\sqrt{3}\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + 4\sin 2x\cos 2x = 2\sqrt{3}\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x + 4\sin 2x\cos 2x = 2\sqrt{3}\cos 2x\cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x + 2\sin 2x = \sqrt{3}\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ \sin 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ 2x = \dfrac{\pi}{3} - x + k2\pi\\ 2x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \text{ (thỏa mãn)}\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 9.27: Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x$.

Giải

Điều kiện: sinx ≠ 0, sinx + cosx ≠ 0.

Phương trình trở thành: $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} + \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x} - 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} - \frac{2\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 2x\right) = 0$$

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Với $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{4} + m2\pi \\ 2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + m2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + m2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{m2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}.$$

Chọn nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.28: Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} = \cot x + 2\sin x$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$. Phương trình trở thành

$$\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{1}{2\sin x\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} + \frac{1 - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = 0$$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\ 2\cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\,(2\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.29: Giải phương trình: $(2\cos x - 1)\cot x = \frac{3}{\sin x} + \frac{2\sin x}{\cos x - 1}$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2\cos^2 x - \cos x - 3}{\sin x} = \frac{2\sin x}{\cos x - 1} \Leftrightarrow \frac{(2\cos x - 3)(\cos x + 1)}{\sin x} = \frac{2\sin x}{\cos x - 1}$$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 3)\sin^2 x = -2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos x - 3 = -2$ (vì $\sin x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ (chọn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.30: Giải phương trình: $\dfrac{\cos x + \sin^3 x}{\sin x - \sin^2 x} = 1 + \sin x + \cot x$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$, $\sin x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\cos x + \sin^3 x = (1 - \sin x)(\sin x + \sin^2 x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin^3 x = \sin x\cos^2 x + \cos x - \sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x - \cos x$ (vì $\sin x \neq 0$) $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

Chọn nghiệm của phương trình là: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.31: Giải phương trình: $\tan 2x + \cot x = \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin x - \cos x \neq 0\end{cases}$

Phương trình trở thành: $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x - (\cos x + \sin x)\cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (chọn). Vậy nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.32: Giải phương trình: $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \sin x + \cos x \neq 0\end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$2(1+\cos x)\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}\Leftrightarrow\frac{2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)=(1-\cos x)(\sin x-1)\Leftrightarrow \sin x+\cos x+1+\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(\cos x+1)=0\Leftrightarrow \sin x+1=0$ hay $\cos x+1=0$

Với $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ (thỏa mãn)

Với $\cos x=-1\Leftrightarrow x=-\pi+k2\pi$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 9.33: Giải phương trình: $\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)\tan 2x=2\sqrt{2}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 2x\neq k\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{4}$

$$\text{PT}\Leftrightarrow\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}.\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}.\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x-\sin x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k2\pi;\ x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$$

So sánh điều kiện, vậy nghiệm: $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi;\ x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 9.34: Giải phương trình: $\frac{3(\cos x+\cot x)}{\cot x-\cos x}-2\sin x=2$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cot x\neq\cos x\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

Ta có $\frac{3(\cos x+\cot x)}{\cot x-\cos x}-2\sin x=2\Leftrightarrow(1+\sin x)(1+2\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$$

Vậy nghiệm PT là: $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 9.35: Giải phương trình: $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \dfrac{2}{\sin 4x}$.

Giải

ĐK: $\cos 3x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0$

Phương trình đã cho biến đổi như sau:

$$3\tan 3x = 2\tan x + \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x \sin 2x} \Leftrightarrow 3\tan 3x = \tan 2x + 2\tan x$$

$$\Leftrightarrow (\tan 3x - \tan 2x) + 2(\tan 3x - \tan x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos 3x}\left(\frac{1}{\cos 2x} + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos 2x} + 4 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 9.36: Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$.

Giải

ĐK: $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$: Biến đổi phương trình:

$$\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

So sánh điều kiện, được nghiệm của phương trình là: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9.37: Giải phương trình: $4\sin^2\dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{2\cos 2x}{1-\cot x} = \sqrt{2}(1+\sin x)$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$; $\cot x \neq 1$.

Ta có: $\dfrac{2\cos 2x}{1-\cot x} = -\sin 2x - 2\sin^2 x$

Và $4\sin^2\dfrac{x}{2}.\ \sin x = 2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x - \sin 2x$

Do đó: PT $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$,

Với $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

Kết hợp nghiệm, vậy nghiệm PT là

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in Z)$.

Bài toán 9.38: Giải PT: $\dfrac{2\sin^2\left(x - \frac{25\pi}{4}\right) - 2\cos^2\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) + \tan x}{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right)} = 0$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Biến đổi phương trình:

$$\frac{2\sin^2\left(x - \frac{25\pi}{4}\right) - 2\cos^2\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) + \tan x}{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right)} = 0$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \tan x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x + \tan x = 0$

Đặt $t = \tan x$ thì phương trình trên thành:

$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Chọn $t = 1$ suy ra nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 9.39: Giải phương trình:

$4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$.

Giải

Phương trình tương đương

$4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 + (\sqrt{3}\tan x)^2 - 4\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

BÀI TẬP

Bài tập 9.1: Giải các phương trình sau:

a) $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0$ b) $3 - \tan^2 5x = 0$.

HD-ĐS

a) Đặt $t = \cot x$ thì phương tình: $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = -2 \\ \cot x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arccot}(-2) + k\pi \\ x = \operatorname{arccot} 5 + k\pi \end{array}\right.$$

b) $\tan 5x = -\sqrt{3}$ hay $\tan 5x = \sqrt{3}$.

Bài tập 9.2: Giải các phương trình:

a) $\tan^3 x - 3\tan^2 x - 2\operatorname{tg} x + 4 = 0$ b) $\sin 2x + \tan x = 2$

HD-ĐS

a) Đặt $t = \tan x$ b) Đặt $t = \tan x$.

Bài tập 9.3: Giải các phương trình:

a) $\tan 2x - \tan x = 2\sqrt{3}/3$ b) $\tan^3 (x - \frac{\pi}{4}) = \tan x - 1$.

HD-ĐS

a) Đặt $t = \tan x$

b) Dùng công thức cộng, có thể đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$

Bài tập 9.4: Giải các phương trình:

a) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ b) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$

HD-ĐS

a) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.

Bài tập 9.5: Giải các phương trình:

a) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ b) $3\tan x + 2\cot 3x = \tan 2x$

HD-ĐS

b) Tách hệ số 3 thành 2 và 1 rồi ghép tương ứng

Bài tập 9.6: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x.\cos x}{\tan^2 x - 1}$ b) $y = \sqrt{\tan x}$

HD-ĐS

a) ĐK: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq \pm 1 \end{cases}$. $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b) Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 9.7: Giải các phương trình:

a) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^5(x + \pi/4)$

b) $16\sin^2 x\sin^2 y + \tan^2 x\tan^2 y + 18 = 24\sin x\sin y + 6\tan x\tan y$

HD-ĐS

a) $VT \geq 2 \geq 2$ b) Đưa về tổng các bình phương bằng 0.

Bài tập 9.8: Giải các phương trình:

a) $\tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x\cot^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$

b) $(\tan x + \frac{1}{4}\cot x)^n = \cos^n x + \sin^n x$ với $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$

HD-ĐS

b) Khi $n \geq 3$ thì phương trình vô nghiệm

Bài tập 9.9: Định m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $\sin x.\cos x - \sin x - \cos x + m\tan x.\cot x = 0$

b) $\dfrac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

HD-ĐS

a) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ b) đặt $t = \tan x + \cot x$, $|x| \geq 2$.

§10 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

- Vectơ pháp tuyến (VTPT) của một đường thẳng vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng.

- Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng: vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng đường thẳng.

Dạng tổng quát

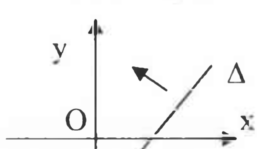
- Tìm một điểm $I(x_o; y_o)$ thuộc đường thẳng

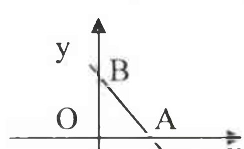
- Tìm một VTPT $\vec{n}(a; b)$ của đường thẳng., $a^2 + b^2 \neq 0$.

- Viết phương trình $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$ rồi suy ra dạng tổng quát:

$$ax + by + c = 0,, a^2 + b^2 \neq 0.$$

- Hoặc, viết dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$, tìm c nhờ đường thẳng cho đi qua điểm I.



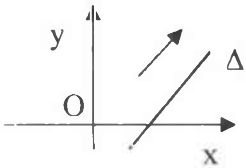


- *Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn: đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) với a, b ≠ 0 là* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đặc biệt: $d' // d: ax + by + c = 0 \Rightarrow d': ax + by + c' = 0, c' \neq c$

$d'' \perp d: ax + by + c = 0 \Rightarrow d'': bx - ay + c'' = 0$

Dạng tham số, chính tắc



- *Tìm một điểm I* $(x_o; y_o)$ *thuộc đường thẳng*
- *Tìm một VTCP* $\vec{u}$ *(a; b) của đường thẳng*
- *Phương trình tham số:* $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$
- *Nếu a, b ≠ 0 thì có dạng chính tắc:* $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

Đặc biệt, d qua A, B thì có VTCP $\vec{u}$ $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

$d' \perp d: ax + by + c = 0$ *thì VTCP* $\vec{u}' = (a; b)$

$d'' // d: ax + by + c = 0$ *thì VTCP* $\vec{u}'' = (-b; a)$ *hay* $(b; -a)$

d có hệ số góc k thì VTCP $\vec{u} = (1; k)$.

Chú ý:

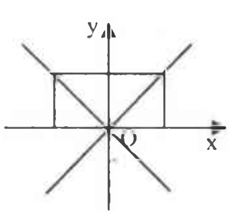
1) Đường thẳng cắt 2 trục toạ độ thì nên chọn dạng phương trình đoạn chắn.

2) Khử và đặt tham số, biến đổi và qui đồng, đổi VTPT và VTCP,... để chuyển thành dạng phương trình khác.

3) Có vô số VTCP, VTPT cùng phương, ta có thể chọn toạ độ tỉ lệ và thoả điều kiện vectơ khác $\vec{0}$.

4) Phương trình đường thẳng theo hệ số góc: đi qua $I(x_o; y_o)$ *và có hệ số góc* $k = \tan(Ox; \Delta)$: $y - y_o = k(x - x_o)$

$\Rightarrow y = kx + m \Rightarrow kx - y + m = 0$.



5) Phương trình tổng quát của các đường phân giác của góc xOy:

$y = (\tan 45^o).\ x = x \Leftrightarrow x - y = 0$

và $y = (\tan 135^o).\ x = -x \Leftrightarrow x + y = 0$.

Bài toán 10.1: Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) d qua M(3; 4) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1)$

b) d qua M(2; -3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; 6)$.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua M(3; 4) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1)$.

Phương trình tổng quát của d có dạng:

$Ax + By + C = 0$ Thay $A = -2$; $B = 1$ vào ta có: $-2x + y + C = 0$

$M \in d \Rightarrow -6 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = 2$

Vậy phương trình tổng quát của d là:

$-2x + y + 2 = 0$ hay $2x - y - 2 = 0$

b) Đường thẳng d đi qua M(2; -3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; 6)$ nên

VTPT $\vec{n} = (6; -4)$ hoặc $(3; -2)$: $3(x - 2) - 2(y + 3) = 0$

Phương trình tổng quát của d là: $3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán 10.2: Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) qua A(2; 0) và B(0; -3) b) qua M(-5; -8) vì có hệ số góc $k = -3$.

Giải

a) Phương trình theo đoạn chắn: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y - 6 = 0$

b) Phương trình theo hệ số góc: $y = kx + m = -3x + m$

Đường thẳng qua M(-5; -8) nên $-8 = 15 + m \Rightarrow m = -23$

Do đó phương trình tổng quát: $y = -3x - 23 \Rightarrow 3x + y + 23 = 0$.

Bài toán 10.3: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d

a) Qua M(-1; -4) và song song với đường thẳng $3x + 5y - 2 = 0$

b) Qua N(1; 1) và vuông góc với đường thẳng $2x + 3y + 7 = 0$.

Giải

a) Vectơ pháp tuyến của d cũng là vectơ pháp tuyến của đường thẳng

$3x + 5y - 2 = 0$ nên phương trình của d là $3x + 5y + c = 0$

Vì d đi qua điểm M(-1; -4) nên $-3 - 20 + c = 0 \Rightarrow c = 23$.

Vậy phương trình tổng quát d: $3x + 5y + 23 = 0$

b) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $2x + 3y + 7 = 0$ nên lấy VTCP (3; -2) làm VTPT của d.

d: $3(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$.

Bài toán 10.4: Lập phương trình tham số của đường thẳng d:

a) đi qua điểm M(2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 7)$

b) đi qua điểm M(5; -2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -3)$.

Giải

a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$.

b) d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -3)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4)$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$.

Bài toán 10.5: Viết phương trình tham số của đường thẳng d

a) đi qua điểm M(5; 1) và có hệ số góc k = 8

b) đi qua điểm A(3; 4) và B(4; 2).

Giải

a) d có hệ số góc k = 8 nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 8)$

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 8t \end{cases}$

b) d đi qua A và B nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -2)$

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$.

Bài toán 10.6: Cho hai điểm P(4; 0) và Q(0; -2). Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Qua điểm A(3;2) và song song với đường thẳng PQ

b) Trung trực của PQ.

Giải

a) Đường thẳng PQ có phương trình theo đoạn chắn:

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ hay x - 2y - 4 = 0

Đường thẳng d song song với PQ có phương trình x - 2y + c = 0 với $c \neq 4$.

Vì d qua A(3;2) nên 3 - 2. 2 + c = 0 $\Rightarrow$ c = 1.

Vậy phương trình d: x - 2y + 1 = 0.

b) Đường trung trực của đoạn PQ đi qua trung điểm I của PQ là I(2; -1) và vuông góc với $\overrightarrow{PQ} = (-4; -2)$. Phương trình đường trung trực của đoạn PQ là:

$-4(x - 2) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$.

Bài toán 10.7: Cho điểm A(-5; 2) và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng d':

a) qua A và song song với d

b) qua A và vuông góc với d.

Giải

a) d có VTCP $\vec{u} = (1; -2)$ cũng là VTCP của d'. Vậy d': $\frac{x+5}{1} = \frac{y-2}{-2}$.

b) d' vuông góc với d nên có VTCP là (2; 1). Vậy d': $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{1}$.

Bài toán 10.8: Một đường thẳng đi qua điểm M(5; -3) cắt trục Ox và Oy tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Giải

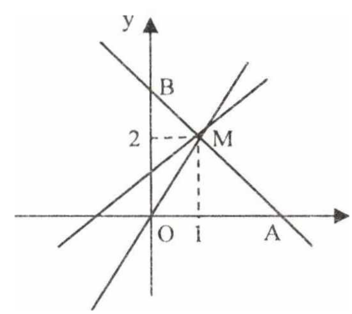
Giả sử A = (a; 0), B = (0; b). Vì M(5; -3) là trung điểm của AB nên:

$$5 = \frac{a+0}{2}; -3 = \frac{0+b}{2} \Rightarrow a = 10, b = -6.$$

Phương trình của đường thẳng đi qua A, B là $\frac{x}{10} + \frac{y}{-6} = 1$ hay 3x - 5y - 30 = 0.

Bài toán 10.9: Cho điểm M(1; 2). Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua M và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

Giải



Xét d qua gốc O thì d: y = kx ⇒ y = 2x.

Xét d không qua gốc O thì a, b ≠ 0

$$d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Theo giả thiết thì $|a| = |b|$

Nếu b = a thì d: x + y = a.

Vì d qua M(1; 2) nên a = 3 do đó d: x + y = 3.

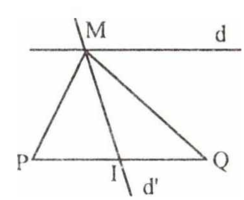
Nếu b = -a thì d: x - y = a

Vì d qua M(1; 2) nên a = -1, do đó x - y = -1.

Vậy có 3 đường thẳng: 2x - y = 0, x + y - 3 = 0, x - y + 1 = 0.

Bài toán 10.10: Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2; 5) và cách đều hai điểm P(-1; 2), Q(5; 4).

Giải



Xét d//PQ thì thoả mãn cách đều P và Q.

VTCP $\overrightarrow{PQ} = (6; 2)$ nên d: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$

Xét d' không song song với PQ, để d cách đều P, Q thì d' đi qua trung điểm I(2; 3) của PQ.

VTCP $\overrightarrow{MI} = (0; -2)$ nên d': $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Bài toán 10.11: Đường thẳng d: 2x - y + 8 = 0 cắt các trục Ox và Oy lần lượt tại các điểm A và B. Gọi M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số -3. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với d.

Giải

Cho x = 0 ⇒ y = 8; y = 0 ⇒ x = -4. Do đó A(-4; 0), B(0; 8)

Gọi $M(x_o; y_o)$ thì $x_o = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} = \dfrac{-4-0}{4} = -1$

$$y_o = \frac{y_1 - ky_2}{1-k} = \frac{0-(-24)}{4} = 6.$$ Vậy M(-1; 6)

Vectơ chỉ phương của d: 2x - y + 8 = 0 là $\vec{u}$ (1; 2). Do đó phương trình đường thẳng d' qua M và vuông góc với d là:

d': 1(x + 1) + 2(y - 6) = 0 hay x + 2y - 11 = 0.

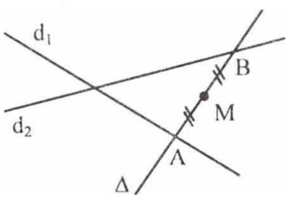
Bài toán 10.12: Cho đường thẳng d_1: 2x - y - 2 = 0; d_2: x + y + 3 = 0 và điểm M(3; 0). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại điểm A và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải

$A(x_A; y_A) \in d_1 \Rightarrow y_A = 2x_A - 2$

$B(x_B; y_B) \in d_2 \Rightarrow y_B = -x_B - 3$

Vì M là trung điểm của AB nên:



$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ 2x_A - 2 - x_B - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_A = \dfrac{11}{3} \Rightarrow y_A = \dfrac{16}{3}$. Vậy $A = (\dfrac{11}{3}; \dfrac{16}{3})$

Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và M. Từ đó ta tìm được phương trình của Δ là: 8x - y - 24 = 0.

Bài toán 10.13: Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua Q(2; 3) và cắt tia Ox, Oy tại 2 điểm M, N khác điểm O sao cho OM + ON nhỏ nhất.

Giải

Gọi M(m; 0), N(0; n) với m, n > 0.

Phương trình của Δ là:

$\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$ $Q \in \Delta \Rightarrow \dfrac{2}{m} + \dfrac{3}{n} = 1 \Rightarrow n = \dfrac{3m}{m-2}$ (dễ thấy $m \neq 2$).

Do n > 0 nên m > 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$OM + ON = m + n = m + \frac{3m}{m-2}$$

$$= m - 2 + \frac{6}{m-2} + 5 \geq 2\sqrt{(m-2).\frac{6}{m-2}} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = \dfrac{6}{m-2}$

Chọn m = 2 + $\sqrt{6}$ (do m > 0). Suy ra n = 3 + $\sqrt{6}$.

Vậy OM + ON nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6} + 5$ khi m = 2 + $\sqrt{6}$ và n = 3 + $\sqrt{6}$.

Khi đó phương trình của Δ là: $\dfrac{x}{2+\sqrt{6}} + \dfrac{y}{3+\sqrt{6}} = 1$.

Bài toán 10.14: Cho hai đường thẳng: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = t' \\ y = -10 + t' \end{cases}$

a) Viết phương trình tổng quát của mỗi đường thẳng trên.

b) Tìm giao điểm của hai đường thẳng.

Giải

a) Khử t trong hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \end{cases}$

Ta được: $\dfrac{x-3}{2} = y + 4$ hay x - 2y - 11 = 0

Tương tự đối với đường thẳng thứ hai ta được x - y - 10 = 0

b) Giao điểm hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 11 = 0 \\ x - y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy giao điểm là I(9; -1)

Cách khác: Xét hệ $\begin{cases} 3 + 2t = t' \\ -4 + t = -10 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = -3 \\ t - t' = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = 9 \end{cases}$.

Bài toán 10.15: Cho đường thẳng có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

a) Tìm điểm M nằm trên đường thẳng đó và cách điểm A(0; 1) một khoảng bằng 5.

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng đó đối với đường thẳng x + y + 1 = 0.

Giải

a) Điểm M thuộc đường thẳng đã cho nên M = (2 + 2t; 3 + t).

Ta có: AM = 5 $\Leftrightarrow \sqrt{(2 + 2t - 0)^2 + (3 + t - 1)^2} = 5$

$\Leftrightarrow (2 + 2t)^2 + (2 + t)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -\dfrac{17}{5}$. Vậy có hai điểm M (4; 4) và M' $\left(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

b) Thế x = 2 + 2t; y = 3 + t vào phương trình: x + y + 1 = 0

2 + 2t + 3 + t + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ t = -2. Do đó x = -2; y = 1

Vậy toạ độ giao điểm N = (-2; 1)

Bài toán 10.16: Lập phương trình của đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $2x - y + 5 = 0$, $3x + 2y - 3 = 0$ và thoả một trong các điều kiện sau:

a) d đi qua điểm A(-3; -2).

b) d cùng phương với đường thẳng $x + y + 9 = 0$.

c) d vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 1 = 0$.

Giải

Toạ độ giao điểm M(x; y) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy ta có giao điểm M(-1; 3).

a) d đi qua hai điểm A(-3; -2) và M(-1; 3) nên có phương trình là:

$$\frac{x+3}{-1+3} = \frac{y+2}{3+2} \Leftrightarrow 5x - 2y + 11 = 0.$$

b) d cùng phương với đường thẳng $x + y + 9 = 0$ nên phương trình của d có dạng: $x + y + C = 0$, d đi qua M(-1; 3) $\Rightarrow C = -2$

Vậy phương trình của đường thẳng d là: $x + y - 2 = 0$.

c) d vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 1 = 0$ nên phương trình của d có dạng: $-3x + y + C = 0$.

d đi qua M(-1; 3) $\Rightarrow C = -6$.

Phương trình của đường thẳng d là: $3x - y + 6 = 0$.

Bài toán 10.17: Cho đường thẳng d: $x - 2y + 4 = 0$ và điểm A(4; 1)

a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên d.

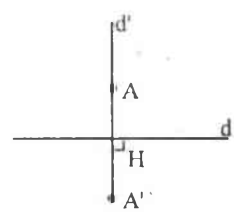
b) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với A qua d.

Giải

a) Phương trình d' qua A, vuông góc với d có dạng: $2x + y + C = 0$

d' qua A(4; 1) nên $8 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -9$

Do đó d': $2x + y - 9 = 0$



Hình chiếu H là giao điểm của d và d':

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{17}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } H\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right).$$

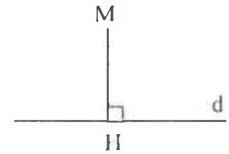
b) A' đối xứng của A qua d khi H là trung điểm của AA'

$$x_A + x_A' = 2x_H,\ y_A + y_A' = 2y_H \Rightarrow x_A' = \frac{8}{5},\ y_A' = \frac{29}{5}$$

Vậy $A'\left(\frac{8}{5}; \frac{29}{5}\right)$.

Bài toán 10.18: Tìm hình chiếu của M(3; 1) lên đường thẳng d: $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$.

Giải



$H \in d \Rightarrow H(-2 - 2t; 1 + 2t)$

d có VTCP $\vec{u} = (-2; 2)$

Điều kiện $MH \in d \Leftrightarrow \overline{MH}.\ \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow -2(-5 - 2t) + 2.\ 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{4}$. Vậy $H\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 10.19: Tìm hình chiếu của điểm P(3; -2) lên mỗi đường thẳng:

a) d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ b) d: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4}$ c) d: $5x - 12y + 10 = 0$

Giải

a) Phương trình d: $y - 1 = 0$

Gọi H là hình chiếu của P trên d thì H là giao điểm của d và d', trong đó d' là đường thẳng đi qua d' $\perp$ d.

Phương trình của d' là: $1(x - 3) + 0(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

Toạ độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy H(3; 1)

b) Viết phương trình của d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}$

Đường thẳng d' đi qua P và vuông góc với d có phương trình:

$3(x - 3) - 4(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 17 = 0.$

Thay vào ta được: $3(1 + 3t) - 4(-4t) - 17 = 0 \Leftrightarrow 25t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{14}{25}$

Vậy toạ độ hình chiếu của P là $\left(\frac{67}{25}; \frac{56}{25}\right)$.

c) Gọi d' là đường thẳng đi qua P và vuông góc với d. Do d' vuông góc với d nên d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -12)$

Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - 12t \end{cases}$

Thay $x = 3 + 5t$ và $y = -2 = 12t$ vào phương trình của d, ta được:

$5(3 + 5t) - 12(-2 - 12t) + 10 = 0 \Leftrightarrow 169t + 49 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-49}{169}$.

Vậy toạ độ hình chiếu của P là $\left(\frac{262}{169}; \frac{250}{169}\right)$.

Bài toán 10.20: Cho đường thẳng Δ: $2x - y + 1 = 0$ và điểm I(1; 2). Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

Giải

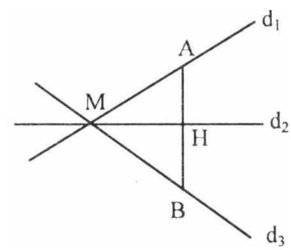
Lấy một điểm M nằm trên đường thẳng Δ: $2x - y + 1 = 0$, chẳng hạn M (0; 1).

Điểm M' đối xứng với M qua điểm I (1; 2) có toạ độ M'(2; 3). Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I là đường thẳng đi qua điểm M' và song song với Δ, tức là có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1)$.

Vậy phương trình của Δ' là $2(x - 2) - 1(y - 3) = 0$ hay $2x - y - 1 = 0$.

Bài toán 10.21: Cho hai đường thẳng d_1: $x + y - 1 = 0$ và d_2: $x - 3y + 3 = 0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2.

Giải



Giao điểm M(x; y) của d_1 và d_2 có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy M(0; 1).

Lấy A(1; 0) thuộc d_1, phương trình đường thẳng AH vuông góc với d_2:

$$3(x - 1) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$$

Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \quad H\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow B\left(\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng d_3 là:

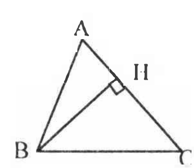
$$(x - 0)\left(\frac{12}{5} - 1\right) - (y - 1)\left(\frac{1}{5} - 0\right) = 0 \Rightarrow 7x - y + 1 = 0.$$

Bài toán 10.22: Cho tam giác ABC có phương trình 3 cạnh:

AB: $2x - 3y - 1 = 0$; BC: $x + 3y + 7 = 0$, CA: $5x - 2y + 1 = 0$.

Viết phương trình đường cao BH.

Giải



Toạ độ của điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } B\left(-2; -\frac{5}{3}\right).$$

Đường thẳng AC có VTPT $\vec{n} = (5; -2) \Rightarrow$ VTCP $\vec{u} = (2; 5)$

BH vuông góc với AC nên có VTPT (2; 5), do đó phương trình

BH: $2(x + 2) + 5(y + \frac{5}{3}) = 0 \Leftrightarrow 6x + 15y + 37 = 0$.

Bài toán 10.23: Cho tam giác ABC, biết phương trình

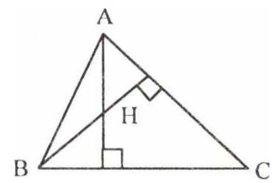
đường thẳng AB: $x - 3y + 11 = 0$,

đường cao AH: $3x + 7y - 15 = 0$,

đường cao BH: $3x - 5y + 13 = 0$.

Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

Giải



Ta có: A là giao điểm của AB và AH.

$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 3x + 7y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy A(-2; 3).

Vì AC $\perp$ BH nên AC có dạng $5x + 3y + c = 0$, ta có:

$A \in AC \Leftrightarrow -10 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh AC: $5x + 3y + 1 = 0$

Ta có B là giao điểm của AB và BH:

$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 3x - 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ Vậy B(4; 5).

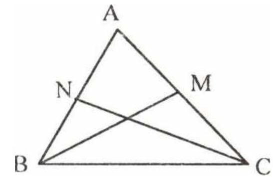
Vì BC $\perp$ AH nên BC có dạng $7x - 3y + c' = 0$ ta có:

$B \in BC \Leftrightarrow 28 - 15 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = -13$.

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $7x - 3y - 13 = 0$.

Bài toán 10.24: Cho tam giác ABC có A(-2; 3) và hai đường trung tuyến: $2x - y + 1 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

Giải



Hai trung tuyến cho không qua A.

Đặt BM: $2x - y + 1 = 0$, CN: $x + y - 4 = 0$.

$B \in BM \Rightarrow B(t; 1 + 2t)$.

Trung điểm của AB là $N(\frac{t-2}{2}; 2 + t)$ thuộc CN

$\frac{t-2}{2} + 2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ nên B(2; 5).

Tương tự $C \in CN \Rightarrow C(t'; 4 - t')$.

Trung điểm M của AC thuộc BM ta tìm được C(3; 1).

Từ 3 đỉnh A(-2; 3), B(2; 5), C(3; 1) ta lập phương trình 3 cạnh AB:

$x - 2y + 8 = 0$, BC: $4x + y - 13 = 0$ và CA: $2x + 5y - 11 = 0$.

Cách khác: Tìm trọng tâm G là giao điểm của BM, CN và từ B(t; 1 + 2t) và C(t'; 4-t') suy ra được t, t'.

Bài toán 10.25: Cho tam giác ABC có trọng tâm G(3; 5) và phương trình AB: $2x - 3y + 1 = 0$; AC: $4x + y - 5 = 0$. Tìm các đỉnh

Giải

Toạ độ A là nghiệm hệ: $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy A(1; 1).

Gọi B = $(x_1; y_1)$, C = $(x_2; y_2)$.

Vì B $\in \Delta_1$ và C $\in \Delta_2$ nên: $2x_1 - 3y_1 + 1 = 0$ và $4x_2 + y_2 - 5 = 0$.

Vì G(3; 5) là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$3 = \frac{1 + x_1 + x_2}{3} \text{ và } 5 = \frac{1 + y_1 + y_2}{3}$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - 8 = 0$ và $y_1 + y_2 - 14 = 0$

Giải hệ bốn phương trình ta được: $B = \left(\frac{61}{7}; \frac{43}{7}\right)$; $C = \left(-\frac{5}{7}; \frac{55}{7}\right)$.

Cách khác: Gọi B (b; $\frac{2b+1}{3}$) và C(c; 5-c).

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra B, C.

Bài toán 10.26: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(-2; -4) và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho OAB là tam giác vuông cân.

Giải

Gọi A = (a; 0), B = (0; b). Vì OA = OB nên $|a| = |b|$ hay $a = \pm b$. Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, đi qua điểm M(-2; -4) nên $-\frac{2}{a} - \frac{4}{b} = 1$.

Nếu a = b thì $-\frac{2}{a} - \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow -\frac{6}{a} = 1$, nên a = b = -6, và ta được phương trình

$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$ hay $x + y + 6 = 0$.

Nếu a = -b thì hay $-\frac{2}{a} - \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow -\frac{2}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = -b = 2$ và ta được phương trình

$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ hay $x - y - 2 = 0$.

Bài toán 10.27: Cho tam giác ABC với A(2; 4), B(4; 8), C(13; 2). Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

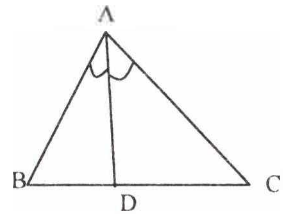
Giải

Ta có $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{20}$

$AC = \sqrt{(13-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{125}$

Chân phân giác trong AD, chia đoạn BC theo tỉ $k = -\dfrac{AB}{AC} = -\dfrac{5}{2}$ nên có toạ độ:

$$x_D = \frac{13 + \frac{5}{2}.4}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{46}{7};\ y_D = \frac{2 + \frac{5}{2}.8}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{44}{7}$$



Đường phân giác AD có phương trình:

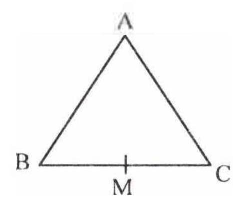
$$\frac{x-2}{\frac{46}{7} - 2} = \frac{y-4}{\frac{44}{7} - 4}$$ hay $x - 2y + 6 = 0$.

Bài toán 10.28: Cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: $2x + 6y + 3 = 0$; AC: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$ và trung điểm của BC là M(-1; 1). Lập phương trình cạnh BC.

Giải

Ta có: $B \in AB \Rightarrow B\left(b; -\dfrac{b}{3} - \dfrac{1}{2}\right)$

$C \in AC \Rightarrow C(2-t; t)$



$M \in$ trung điểm BC nên:

$$\begin{cases} b + 2 - t = -2 \\ -\dfrac{b}{3} - \dfrac{1}{2} + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - t = -4 \\ -2b + 6t = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{9}{4} \\ t = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Do đó $B\left(-\dfrac{9}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$ và $C\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{4}\right)$. Vậy phương trình BC: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{3}$.

Bài toán 10.29: Lập phương trình 3 cạnh tam giác ABC biết đỉnh C(4; 3) và trung tuyến AM: $4x + 13y - 10 = 0$; phân giác AD: $x + 2y - 5 = 0$.

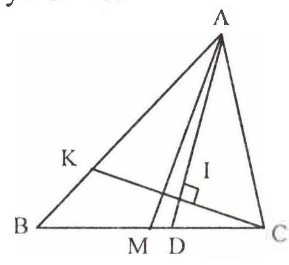
Giải

Ta tìm điểm đối xứng của C qua phân giác AD.

Phương trình CI vuông góc AD

$-2(x - 4) + 1(y - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$



Hình chiếu I có tọa độ: $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Do đó I(3; 1) nên điểm đối xứng K(2; -1)

Toạ độ A là nghiệm hệ: $\begin{cases} 4x+13y-10=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy A(9; -2) nên phương trình AB qua A, K: x + 7y + 5 = 0

Ta có B ∈ AB ⇒ B(-5-7b; b) và trung điểm $M\left(\dfrac{-1-7b}{2}; \dfrac{3+b}{2}\right)$

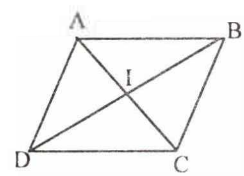
Vì M ∈ AM nên $4.\dfrac{-1-7b}{2}+13\dfrac{3+b}{2}-10=0 \Rightarrow b=1$

Do đó B(-12; 1) nên phương trình BC: x - 8y + 20 = 0

Vậy phương trình BC qua B, C: x + y - 7 = 0.

Bài toán 10.30: Cho hình bình hành có tâm đối xứng I(3; 5) và phương trình 2 cạnh: x + 3y - 6 = 0; 2x - 5y - 1 = 0. Lập phương trình 2 cạnh còn lại.

Giải



Đặt AB: x + 3y - 6 = 0, AD: 2x - 5y - 1 = 0

Toạ độ A là nghiệm hệ:

$\begin{cases} x+3y-6=0 \\ 2x-5y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy A(3; 1).

I là trung điểm của AC nên C(3; 9), cạnh BC qua C, song song AD:

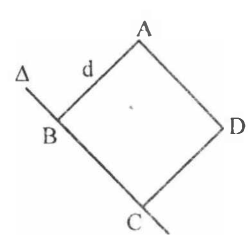
2(x - 3) - 5(y - 9) = 0 ⇔ 2x - 5y + 39 = 0

Cạnh CD qua C, song song AB:

1(x - 3) + 3(y - 9) = 0 ⇔ x + 3y - 30 = 0.

Bài toán 10.31: Cho điểm A(-1; 3) và đường thẳng Δ có phương trình x - 2y + 2 = 0. Dựng hình vuông ABCD sao cho hai đỉnh B, C nằm trên Δ và các toạ độ của đỉnh C đều dương. Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D.

Giải



Đường thẳng d qua A và vuông góc với Δ có phương trình: 2(x + 1) + y - 3 = 0 hay 2x + y - 1 = 0.

Toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy B = (0; 1) và AB = $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ nên CB = $\sqrt{5}$.

Toạ độ của C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{5} \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 2 \end{cases}$.

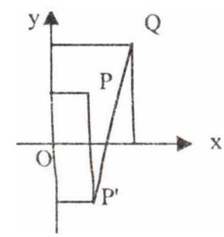
Theo giả thiết, nghiệm đầu bị loại do $y_C = 0$. Vậy C = (2; 2).

Do ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

Suy ra $\begin{cases} x_D - 2 = -1 - 0 \\ y_D - 2 = 3 - 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \end{cases}$. Vậy D = (1; 4).

Bài toán 10.32: Cho điểm P(1; 2) và Q(3; 4).

Tìm điểm M trên trục hoành để MP + MQ bé nhất.



Giải

Ta có P, Q là hai điểm cùng phía đối với trục hoành.

Lấy đối xứng P qua trục hoành là P'(1; -2)

Ta có:

MP + MQ = MP' + MQ ≥ P'Q: Không đổi.

Do đó MP + MQ bé nhất khi M là giao điểm của đường thẳng P'Q với trục hoành.

$\overrightarrow{P'Q} = (2; 6)$ nên phương trình P'Q: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

Cho $y = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$. Vậy $M(\frac{5}{3}; 0)$.

Bài toán 10.33: Cho hai điểm P(1; 6); Q(-3; -4) và đường thẳng Δ: 2x - y - 1 = 0. Tìm toạ độ điểm N trên Δ sao cho |NP - NQ| lớn nhất.

Giải

Ta có |NP - NQ| ≤ PQ. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi N, P, Q thẳng hàng và N ở ngoài đoạn PQ.

VTCP $\overrightarrow{PQ} = (-4; -10)$ hay (2; 5) nên phương PQ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + 5t \end{cases}$.

Thế vào phương trình Δ thì được t = -5.

Vậy giao điểm của đường thẳng PQ và Δ là N = (-9; -19).

Vì $x_N < x_P, x_Q$, nên N là điểm phải tìm.

Bài toán 10.34: Cho điểm M(4; 6). Viết phương trình của đường thẳng đi qua M và cắt các trục Ox, Oy theo thứ tự tại A(a; 0) và B(0; b) với a, b > 0 sao cho:

a) Diện tích tam giác OAB bằng 60

b) Diện tích tam giác OAB bé nhất.

Giải

Phương trình của đường thẳng đi qua A(a; 0), B(0; b) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Đi qua điểm M(4; 6) nên $\frac{4}{a}+\frac{6}{b}=1 \Leftrightarrow 6a+4b=ab$

a) $S_{OAB}=60 \Leftrightarrow ab=120 \Leftrightarrow b=\frac{120}{a}$

Do đó: $6a+4b=120 \Leftrightarrow 3a+2b=60 \Leftrightarrow 3a+2\frac{120}{a}=60$

$\Leftrightarrow 3a^2-60a+240=0 \Leftrightarrow a^2-20a+80=0$

$\Leftrightarrow a_1=2(5+\sqrt{5})$; $a_2=2(5-\sqrt{5})$

Từ đó suy ra: $b_1=3(5-\sqrt{5})$ và $b_2=3(5+\sqrt{5})$

Ta nhận được hai đường thẳng thoả mãn điều kiện:

$d_1: \frac{x}{2(5+\sqrt{5})}+\frac{y}{3(5-\sqrt{5})}=1$; $d_2: \frac{x}{2(5-\sqrt{5})}+\frac{y}{3(5+\sqrt{5})}=1$

b) Ta có $S=\frac{1}{2}ab$. Ta tìm a, b > 0 thoả mãn 6a + 4b = ab sao cho tích ab bé nhất. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$ab=6a+4b \geq 2\sqrt{6a.4b}=4\sqrt{6}.\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq 4\sqrt{6} \Rightarrow ab \geq 96$$

Vậy ab nhỏ nhất bằng $96 \Leftrightarrow 6a=4b=\frac{96}{2}=48 \Leftrightarrow a=8; b=12.$

Vậy diện tích tam giác OAB bé nhất khi M là trung điểm của AB.

BÀI TẬP

Bài tập 10.1: Tam giác ABC với A(1; -2); B(2; 3); C(-3; 1)

a) Lập phương trình chính tắc của trung tuyến AM.

b) Lập phương trình tổng quát của đường cao AH.

HD-ĐS

b) $5x+2y-1=0$

Bài tập 10.2: Lập phương trình đường thẳng qua 2 hình chiếu K(4; -3) lên Ox, Oy.

HD-ĐS

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1.$

Bài tập 10.3: Lập phương trình đường thẳng qua A(2; 4) và cắt Ox, Oy tại M, N trong các trường hợp:

a) A trung điểm MN

b) OM = ON

HD-ĐS

a) $2x+y-8=0$

b) $y=2x$, $y=x+2$, $y=-x+6$

Bài tập 10.4: Cho tam giác ABC với A(-1; 4), B(2; 0), C(0; 4).

a) Tìm chân phân giác trong AD. Lập phương trình AD.

b) Xác định $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ với M(x, y) thuộc AD. Suy ra lại phương trình phân giác trong AD.

HD-ĐS

a) $D(\frac{1}{3}; \frac{10}{3})$, $x + 2y - 7 = 0$.

Bài tập 10.5: Tìm 3 đỉnh tam giác ABC và phương trình BC biết phương trình AB: $5x - 2y + 6 = 0$, AC: $4x + 7y - 21 = 0$ và trực tâm là gốc O.

HD-ĐS

$A(0; 3)$, $B(-4; -7)$, $C(\frac{35}{2}; -7)$.

Bài tập 10.6: Lập phương trình đường thẳng đối xứng của:

a) d: $4x - 3y + 6 = 0$ qua Δ: $27x - 99y + 28 = 0$

b) d: $x - 2y - 5 = 0$ qua Δ: $3x + y + 4 = 0$.

HD-ĐS

a) $5x + 12y + 10 = 0$.

Bài tập 10.7: Cho hình chữ nhật ABCD với A(5; 1), C(0; 6) và 1 cạnh $x + 2y - 12 = 0$. Lập phương trình các cạnh còn lại.

HD-ĐS

$x + 2y - 7 = 0$, $2x - y - 9 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.

Bài tập 10.8: Cho A(-1; 3), B(2; 5), C(4; -3).

Tìm quỹ tích các điểm M mà $MA^2 - MB^2 = BC^2$.

HD-ĐS

Đường thẳng $6x + 4y - 87 = 0$.

Bài tập 10.9: Cho A (0; 6); B(2; 5); d: $x - 2y + 2 = 0$

a) Tìm $N \in d$ để NA + NB bé nhất.

b) Tìm $K \in d$ để $|KA - KB|$ lớn nhất.

HD-ĐS

a) $N(\frac{11}{4}; \frac{19}{8})$.

11 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Yếu tố của đường tròn

- Đưa về phương trình: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = k$, nếu $k > 0$ thì đó là phương trình đường tròn (C) tâm $I(x_o; y_o)$, bán kính $R = \sqrt{k}$

- Đưa về phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì đó là phương trình đường tròn (C) tâm $I(-a; -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Phương trình đường tròn

- Đường tròn tâm $I(x_o; y_o)$, bán kính R có phương trình:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

- Phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(-a; -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

- Để tìm quỹ tích tâm I của họ các đường tròn, ta phải tìm điều kiện xác định đường tròn, tìm toạ độ tâm, khử tham số giữa x và y. Chuyển điều kiện của tham số nếu có về điều kiện của x (hoặc y).

- Để tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm M, ta gọi M(x; y) rồi dùng quan hệ cho để lập phương trình đường tròn.

Chú ý:

1) Phương trình đường tròn (C) có 2 dạng nên có 2 hướng:

- Tìm tâm $I(x_o; y_o)$ và bán kính R: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$.

- Tìm các hệ số a, b, c: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

2) Các quan hệ thường dùng với đường tròn (C).

- Đi qua 1 điểm A: toạ độ A thoả mãn phương trình.

- Đi qua 2 điểm A, B: toạ độ A, B thoả mãn phương trình và tâm I thuộc đường trung trực của AB.

- Đi qua 3 điểm A, B, C: toạ độ A, B, C thoả mãn phương trình và

$$IA = IB = IC,\ R = IA.$$

- Đường kính PQ: Tâm I là trung điểm của PQ, $R = \dfrac{PQ}{2}$.

- Tâm I thuộc đường thẳng d: toạ độ I thoả mãn phương trình d.

- Đường tròn tiếp xúc với trục hoành: tâm $I(x_o; y_o)$ và $R = |y_o|$.

- Đường tròn tiếp xúc với trục tung: tâm $I(x_o; y_o)$ và $R = |x_o|$.

- Đường tròn tiếp xúc với đường thẳng Δ: $d(I, \Delta) = R$

- Đường tròn ngoại tiếp với tam giác vuông: tâm I là trung điểm của cạnh huyền.

Tương giao và tiếp tuyến

- Tương giao của đường tròn (C) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ: $d(I, \Delta) > R$: không có điểm chung; $d(I, \Delta) = R$: tiếp xúc (tiếp tuyến); $d(I, \Delta) < R$: đường thẳng cắt đường tròn theo một dây.

- Tương giao của đường tròn (C) tâm I, bán kính R và (C') tâm I', bán kính R': $II' > R + R'$: ngoài nhau; $II' = R + R'$: tiếp xúc ngoài; $|R - R'| < II' < R + R'$: cắt nhau; $II' = |R - R'|$: tiếp xúc trong; $II' < |R - R'|$: đựng nhau.

- Đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ là tiếp tuyến đường tròn (C) tâm I, bán kính R khi $d(I, \Delta) = R$.

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I tại điểm A: đường thẳng tiếp tuyến qua A, có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AI}$.

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I bán kính R đi qua điểm B: Lập phương trình đường thẳng qua B có VTPT $\vec{n} = (a; b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Từ điều kiện tiếp xúc để tìm a và b.

- Tiếp tuyến chung Δ với 2 đường tròn (C), (C'): $\begin{cases} d(I,\Delta) = R \\ d(I',\Delta') = R' \end{cases}$

Bài toán 11.1: Tìm tâm và bán kính của đường tròn:

a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ b) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y = 11$.

Giải

a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ là đường tròn tâm $I(1; -2)$, $R = \sqrt{5}$

b) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y = 11 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$ có $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{-1}{4}$; $c = -\frac{11}{16} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = 1 > 0$ nên là phương trình đường tròn tâm $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $R = 1$.

Bài toán 11.2: Cho $(\mathscr{C}_m)$: $x^2 + y^2 + mx - 2(m + 1)y + 1 = 0$.

a) Với m nào thì $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn.

b) Tìm tập hợp các tâm khi m thay đổi.

Giải

a) $(\mathscr{C}_m)$ là phương trình đường tròn khi

$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} + (m + 1)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$.

b) Tâm đường tròn có toạ độ: $\begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = m + 1 \end{cases}$

Khử m từ hệ trên ta được $2x + y - 1 = 0$.

Giới hạn: $m < -\frac{8}{5} \Rightarrow -2x < -\frac{8}{5} \Rightarrow x > \frac{4}{5}$

$m > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0.$

Vậy tập hợp tâm của các đường tròn là phần đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có hoành độ $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{5}$.

Bài toán 11.3: Cho đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình:

$$x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m + 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng $(\mathscr{C}_m)$ luôn là đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải

a) Phương trình $(\mathscr{C}_m)$ có dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

với $a = \frac{m+2}{2}$, $b = -\frac{m+4}{2}$, $c = m + 1$.

Ta có: $a^2 + b^2 - c = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - (m+1) = \frac{m^2+4m+8}{2} > 0$, với mọi m.

Vậy $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định mà họ $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2 + y_o^2 + (m + 2)x_o - (m + 4)y_o + m + 1 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_o - y_o + 1)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - y_o + 1 = 0 & (1) \\ x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x_o = y_o - 1$, thay vào (2), ta được:

$(y_o - 1)^2 + y_o^2 + 2(y_o - 1) - 4y_o + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y_o^2 - 4y_0 = 0$

$\Leftrightarrow 2y_o(y_o - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_o = 0 \\ y_o = 2 \end{array}\right.$

Với $y_o = 0$ thì $x_o = -1$. Ta được điểm $M_1(-1; 0)$

Với $y_o = 2$ thì $x_o = 1$. Ta được điểm $M_2(1; 2)$

Vậy họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định là $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$.

Bài toán 11.4: Cho hai điểm A(1; 1) và B(9; 7). Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$, trong đó k là một số cho trước.

Giải

Gọi M = (x; y) ta có:

$2MA^2 - 3MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 - 3(x-9)^2 - 3(y-7)^2 = k^2$

$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 50x + 38y - 386 - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 50x - 38y + 386 + k^2 = 0 \Leftrightarrow (x-25)^2 + (y-19)^2 = 600 - k^2$

Biện luận:

- Nếu $k^2 < 600$, quỹ tích M là đường tròn có tâm I (25; 19)

và bán kính $R = \sqrt{600 - k^2}$.

- Nếu $k^2 = 600$, quỹ tích M là một điểm I (25; 19).
- Nếu $k^2 > 600$, quỹ tích M là tập rỗng.

Bài toán 11.5: Lập phương trình đường tròn:

a) Tâm I(1; 3) và đi qua A(3; 1).

b) Tâm I(-2; 0) và tiếp xúc với Δ: $2x + y - 1 = 0$.

Giải

a) Đường tròn tâm I(1; 3) và đi qua A(3; 1)

nên bán kính đường tròn là $R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$.

b) Đường tròn tâm I(-2; 0) và tiếp xúc với Δ: $2x + y - 1 = 0$

nên bán kính đường tròn là $R = d(I; \Delta) = \dfrac{|2.(-2) - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x+2)^2 + y^2 = 5$.

Bài toán 11.6: Lập phương trình đường tròn:

a) Đường kính AB với A(-1; 1) và B(5; 3).

b) Tâm I(4; -7) và tiếp xúc với trục hoành.

Giải

a) Đường tròn đường kính AB có tâm I là trung điểm AB:

I(2; 2), $R = IA = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

b) Đường tròn tâm I(4; -7) và tiếp xúc với trục hoành nên $R = |y_I| = |-7| = 7$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-4)^2 + (y+7)^2 = 49$.

Bài toán 11.7: Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm

a) M(1; -2), N(1; 2), P(5; 2) b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3).

Giải

a) Ta có: $MN = \sqrt{0+16} = 4; NP = \sqrt{16+0} = 4, PM = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

Nên $PM^2 = MN^2 + NP^2$, do đó tam giác vuông tại N.

Tâm I là trung điểm của PM: I(3; 0) và bán kính $R = \dfrac{PM}{2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn: $(x-3)^2 + y^2 = 8$.

b) Đường tròn có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C nên:

$$\begin{cases} 1 + 4 + 2a + 4b + c = 0 \\ 25 + 4 + 10a + 4b + c = 0 \\ 1 + 9 + 2a - 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + c = -5 \\ 10a + 4b + c = -29 \\ 2a - 6b + c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

Chú ý: Đường tròn đi qua điểm A, B, C là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài toán 11.8: Lập phương trình đường tròn:

a) Qua hai điểm A(- 1; 2), B(-2; 3) và có tâm ở trên đường thẳng Δ: $3x - y + 10 = 0$.

b) Tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm M(2; 1).

Giải

a) Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn, ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ I \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2 \\ 3a - b + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -8 \\ 3a - b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$. Vậy I(-3; 1).

$$R = IA = \sqrt{(-1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

Vậy phương trình đường tròn là $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

b) Đường tròn tâm I(a; b) bán kính R tiếp xúc với cả hai trục khi và chỉ khi khoảng cách từ I tới hai trục đều bằng R, tức là: $|a| = |b| = R$.

Vì đường tròn đi qua M (2; 1) nên IM = R hay

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = R \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 = R^2$$

Mà $a^2 = b^2 = R^2$ nên $R^2 - 4a - 2b + 5 = 0$

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu a = b = R, thì $R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow R = 1$ hoặc $R = 5$

Nên a = b = R = 1 hoặc a = b = R = 5.

Ta được hai đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ và $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Nếu a = R, b = -R thì $R^2 - 2R + 5 = 0$ vô nghiệm.

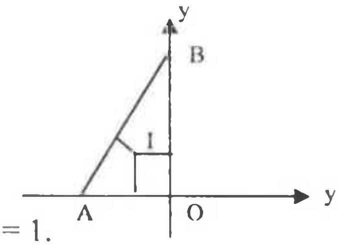
Nếu a = -R, b = R thì $R^2 + 2R + 5 = 0$ vô nghiệm.

Nếu a = -R, b = -R thì $R^2 + 6R + 5 = 0$ phương trình này có hai nghiệm âm R = -1, R = -5 nên đều bị loại.

Nếu nhận xét điểm M(2; 1) thuộc góc phần tư I thì tâm I(R; R)

Bài toán 11.9: Cho điểm A(- 3; 0) và B(0; 4). Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Giải



Gọi I và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác vuông OAB thì I(-r; r).

OA = 3; OB = 4; ⇒ AB = 5.

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}OA.OB}{\frac{1}{2}(OA + OB + AB)} = \frac{\frac{1}{2}.3.4}{\frac{1}{2}(3+4+5)} = 1.$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Bài toán 11.10: Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình các cạnh: AB: 3x + 4y - 6 = 0; AC: 4x + 3y - 1 = 0; BC: y = 0.

Giải

Toạ độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+4y-6=0 \\ 4x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A=(-2;3)$

Tương tự, ta tính được B(2; 0), C($\frac{1}{4}$; 0)

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là:

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{4x+3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-y+5=0 & (1) \\ x+y-1=0 & (2) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B, C vào vế trái của (1), ta được: $2 + 5 = 7 > 0$; $\frac{1}{4} + 5 > 0$

Vậy (2) là phương trình đường phân giác trong của góc A.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc B là:

$$\frac{3x+4y-6}{5} = \pm y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x-y-6=0 & (3) \\ x+3y-2=0 & (4) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của A, C vào vế trái của (4), ta được:

$-2 + 3.3 - 2 = 5 > 0$; $\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0$.

Vậy (4) là phương trình đường phân giác trong của góc B.

Gọi I(x; y) và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ nên } r = d(I;BC) = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Bài toán 11.11: Lập phương trình đường tròn đi qua A(1; 1), B(1; 4) và tiếp xúc với trục Ox.

Giải

Phương trình đường tròn tiếp xúc với trục Ox có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

Đường tròn qua A, B nên: $\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2\\(1-a)^2+(4-b)^2=b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2\\(1-b)^2-(4-b)^2=0\end{cases}$

Do đó $b=\frac{5}{2} \Rightarrow a^2-2a-3=0 \Rightarrow a=-1, a=3$.

Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4};\ (x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Bài toán 11.12: Lập phương trình đường tròn có tâm I thuộc d: $2x-y-4=0$ và tiếp xúc với 2 trục toạ độ.

Giải

Phương trình đường tròn tiếp xúc với 2 trục có dạng:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ với $R=|a|=|b|$

Nên $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

Tâm I (a; b) thuộc d: $2x-y-4=0$ nên $2a-b-4=0$

Với $a=b$ thì $b-4=0 \Rightarrow b=4$

Với $a=-b$ thì $-3b-4=0 \Rightarrow b=-\frac{4}{3}$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9};\ (x-4)^2+(y-4)^2=16.$$

Bài toán 11.13: Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm A(6; 0) và đi qua điểm B(9; 9).

Giải

Đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R có phương trình:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1)

(C) tiếp xúc với Ox tại A(6; 0) nên $a=6$, $|b|=R$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x-6)^2+(y-b)^2=b^2$

$B(9; 9) \in (C) \Rightarrow (9-6)^2+(9-b)^2=b^2 \Leftrightarrow b=5 \Rightarrow R=5$

Phương trình của (C) là $(x-6)^2+(y-5)^2=25$.

Bài toán 11.14: Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(-1; 0) B(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng x - y - 1 = 0

Giải:

Gọi I(a; b) và R là tâm và bán kính của đường tròn (C) cần tìm. Phương trình của (C) là $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

(C) tiếp xúc với Δ: x - y - 1 = 0 khi và chỉ khi:

$$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} = R,$$

$$A, B \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases}(-1-a)^2 + b^2 = R^2\\(1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)^2 + b^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (1)\\[2ex](a-1)^2 + (b-2)^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a + 1)^2 + b^2 = (a - 1)^2 + (b - 2)^2 \Leftrightarrow a = 1 - b$

Thay a = 1 - b vào (2) ta có: $b^2 + (b - 2)^2 = 2b^2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 0, R = \sqrt{2}$

Phương trình của (C) là $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Bài toán 11.15: Lập phương trình của đường tròn đi qua gốc toạ độ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1: 2x + y – 1 = 0, d_2: 2x – y + 2 = 0.

Giải

Gọi I(a, b) là tâm của đường tròn (C), ta có:

(C) qua O và (C) và tiếp xúc với d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}d(I,d_1) = d(I,d_2)\\d(I,d_1) = IO\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{|2a+b-1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2a-b+2|}{\sqrt{5}} & (1)\\[2ex]\dfrac{|2a+b-1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{a^2+b^2} & (2)\end{cases}$$

Giải (1): Xét: $2a + b - 1 = 2a - b + 2 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

Thay vào (2) ta có:

$$\left|2a + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{5(a^2 + \frac{9}{4})} \Leftrightarrow 4a^2 + 2a + \frac{1}{4} = 5a^2 + \frac{45}{4} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 11 = 0 \text{ (VN)}$$

Xét $2a + b - 1 = -2a + b - 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Thay vào (2) ta có:

$$\left|b-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{5\left(\frac{1}{16}+b^2\right)} \Leftrightarrow b^2-3b+\frac{9}{4}=5b^2+\frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow 64b^2+48b-31=0 \quad \Leftrightarrow b_{1,2}=\frac{-3\pm 2\sqrt{10}}{8}$$

Vậy phương trình của đường tròn là: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{3\pm 2\sqrt{10}}{4}\right)y=0.$$

Bài toán 11.16: Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng $4x - 3y = 0$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(2; 0) và bán kính R = 1.

Đường tròn (C') có bán kính bằng 1 và có tâm I' là điểm đối xứng với I qua đường thẳng d: $4x - 3y = 0$.

Giả sử $I' = (x; y)$ thì vectơ $\overrightarrow{II'} = (x - 2; y)$ phải vuông góc với vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u} = (3; 4)$, tức là $3(x - 2) + 4y = 0$ hay $3x + 4y - 6 = 0$ (1)

Ngoài ra trung điểm của II' là $P=\left(\frac{x+2}{2};\frac{y}{2}\right)$ phải nằm trên d, tức là

$$\frac{4(x+2)}{2}-\frac{3y}{2}=0 \text{ hay } 4x-3y+8=0 \text{ (2)}$$

Giải hệ hai phương trình (1) và (2) ta được toạ độ I' là: $x=-\frac{14}{25};y=\frac{48}{25}$.

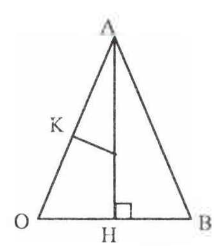
Vậy phương trình đường tròn (C') là $\left(x+\frac{14}{25}\right)^2+\left(y-\frac{48}{25}\right)^2=1$.

Bài toán 11.17: Cho A(3; 4) và B(6; 0).

a) Chứng minh tam giác OAB cân.

b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Giải



a) $AB=\sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2}=5;$

$OA=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5;$

$OC=\sqrt{(6-0)^2+(0-0)^2}=6;$

Tam giác OAB là tam giác cân tại đỉnh A.

b) Gọi H là trung điểm OB thì H(3; 0)

Vì $x_A = x_H = 3$ nên phương trình trung trực AH: x = 3

K là trung điểm OA thì K($\frac{3}{2}$; 2), nên phương trình trung trực của OA là

$6x + 8y - 25 = 0$

Toạ độ tâm ngoại tiếp E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 6x + 8y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{7}{8} \end{cases}. \text{ E } (3; \frac{7}{8})$$

Và $R = EO = \frac{25}{8}$. Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}.$$

Phương trình các đường thẳng OA: $4x - 3y = 0$, OB: $y = 0$.

Hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó có phương trình:

$$\frac{4x - 3y}{5} = y \text{ và } \frac{4x - 3y}{5} = -y.$$

Hay $x - 2y = 0$ và $2x + y = 0$.

Thay toạ độ của A và B vào vế trái của các phương trình, ta nhận được phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB có phương trình: $x - 2y = 0$.

Toạ độ tâm nội tiếp I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. I(3; $\frac{3}{2}$)

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = d(I; OB) = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là:

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Bài toán 11.18: Tìm giao điểm của đường thẳng

d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ với đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Giải

Thay x, y từ phương trình tham số của Δ vào phương trình đường tròn, ta được

$$(2t)^2 + (t - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hay } t = \frac{8}{5}$$

Vậy có hai giao điểm A(1; - 2) và $B\left(\frac{21}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Bài toán 11.19: Tìm toạ độ giao điểm của hai đường tròn:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0;\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

Giải

Toạ độ giao điểm của hai đường tròn (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được 4x + 6 = 0.

Suy ra: $x = -\frac{3}{2}$. Thay $x = -\frac{3}{2}$ vào phương trình sau thì có:

$$y^2 + 2y - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

Vậy có hai giao điểm: $M\left(-\frac{3}{2};\frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)$ và $N\left(-\frac{3}{2};-\frac{2+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Bài toán 11.20: Chứng minh các đường thẳng:

$$\Delta: x\cos 2m + y\sin 2m + 4\cos^2 m - 5 = 0$$

luôn luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định với mọi m.

Giải

Gọi $I(x_0; y_0)$ và R là tâm và bán kính của đường tròn cố định.

Ta có: $d(I, \Delta) = R, \forall m \Leftrightarrow \frac{|x_0\cos 2m + y_0\sin 2m + 4\cos^2 m - 5|}{\sqrt{\cos^2 2m + \sin^2 2m}} = R,\ \forall m$

$$\Leftrightarrow |x_0\cos 2m + y_0\sin 2m + 2(1 + \cos 2m) - 5| = R,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow |(x_0 + 2)\cos 2m + y_0\sin 2m - 3| = R,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ y_0 = 0 \\ R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \\ R = 3 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với đường tròn cố định có tâm I (-2; 0) và có bán kính là R = 3.

Bài toán 11.21: Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ tại M(2; 1)

b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ đi qua gốc O.

Giải

a) Đường tròn có tâm I(-2; -2), bán kính R = 5

b) Đường tròn có tâm I(4; 3) đi qua gốc O nên tiếp tuyến đi qua gốc O là tiếp tuyến tại gốc O.

Tiếp tuyến d tại M có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (4; 3)$ nên

d: $4(x - 2) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 11 = 0$

VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{OI} = (4; 3)$. Vậy phương trình tiếp tuyến:

$4(x - 0) + 3(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 0.$

Bài toán 11.22: Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn:

$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ và đi qua N(2; 0).

Giải

Đường tròn có tâm I(-1; -1), bán kính R = 1.

Gọi phương trình tiếp tuyến là $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

Tiếp tuyến đi qua điểm N(2; 0) nên $2A + C = 0$ vậy $C = -2A$

Do đó Δ: $Ax + By - 2A = 0$

Điều kiện tiếp xúc: $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|-3A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow A^2 + B^2 = (-3A - B)^2$

$\Leftrightarrow 8A^2 + 6AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $4A + 3B = 0$.

Với A = 0, chọn B = 1 ta có tiếp tuyến y = 0.

Với 4A + 3B = 0, chọn A = 3 và B = -4 ta có tiếp tuyến $3x - 4y + 6 = 0$.

Bài toán 11.23: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng d: $2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ song song với d. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Giải

(C) có tâm I(1; -3), bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2 - 5} = \sqrt{5}$

Δ // d $\Rightarrow \Delta$ có phương trình: $2x + y + m = 0$ ($m \neq -1$).

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2 - 3 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4 \end{array}\right.$

Có hai tiếp tuyến cần tìm là Δ_1: $2x + y + 6 = 0$ và Δ_2: $2x + y - 4 = 0$.

Toạ độ tiếp điểm T của Δ_1 với (C) là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$. Vậy T = (-1; -4)

Toạ độ tiếp điểm T' của Δ_2 với (C) là nghiệm của hệ:

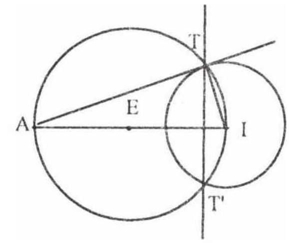
$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy T' (3; -2).

Bài toán 11.24: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ và điểm A(2; 1)

a) Chứng minh qua điểm A vẽ được hai tiếp tuyến đến (C).

b) Lập phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm.

Giải



a) (C) có tâm I = (-4; -2), R = 5.

$\mathscr{P}_{A/(C)} = 4 + 1 + 16 + 4 - 5 > 0$ nên A ở ngoài (C), do đó qua A vẽ được 2 tiếp tuyến đến (C).

b) Đường thẳng qua 2 tiếp điểm T, T' là đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đường tròn (C) với đường tròn (C') đường kính IA.

Trung điểm của IA là $E(-1; -\frac{1}{2})$. Bán kính $r = \frac{IA}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2}$

Nên có phương trình (C'): $(x + 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + y - 10 = 0$.

Các điểm M(x; y) thuộc đường thẳng TT' có toạ độ thoả mãn:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

Do đó: $8x - 2x + 4y - y - 5 + 10 = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 5 = 0$.

Vậy đường thẳng TT': $6x + 3y + 5 = 0$.

Bài toán 11.25: Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 - 1 = 0$; (C'): $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

Giải

Đường tròn (C) tâm O = (0; 0), bán kính R = 1.

Đường tròn (C') tâm I = (8; 6), bán kính R' = 4

Gọi tiếp tuyến chung là $Ax + By + C = 0$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Ta có: $$\begin{cases} d(O,\Delta) = R \\ d(I,\Delta) = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 & (1) \\ \dfrac{|8A + 6B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4 & (2) \end{cases}$$

Từ đó suy ra $|8A + 6B + C| = 4|C|$ hay $8A + 6B + C = \pm 4C$

Trường hợp 1: Với $8A + 6B + C = 4C \Leftrightarrow C = \frac{8}{3}A + 2B$

$(1) \Leftrightarrow \left|\frac{8}{3}A + 2B\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\Leftrightarrow 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 9A^2 + 9B^2 \Leftrightarrow 55A^2 + 96AB + 27B^2 = 0$

Giải phương trình đó với ẩn là A ta được: $A = \dfrac{-48B \pm 3B\sqrt{91}}{55}$

Ta chọn B = 55 thì $A = -48 \pm 3\sqrt{91}$ và $C = -18 \pm 8\sqrt{91}$

Vậy ta được hai tiếp tuyến chung là:

$(-48 + 3\sqrt{91})x + 55y - 18 + 8\sqrt{91} = 0$ và

$(-48 - 3\sqrt{91})x + 55y - 18 - 8\sqrt{91} = 0$

Trường hợp 2: Với $8A + 6B + C = -4C \Leftrightarrow C = -\dfrac{8}{5}A - \dfrac{6}{5}B$

$(1) \Leftrightarrow \left|-\dfrac{8}{5}A - \dfrac{6}{5}B\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\Leftrightarrow 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 25A^2 + 25B^2$

$\Leftrightarrow 39A^2 + 96AB + 11B^2 = 0$

Giải phương trình trên với ẩn là A ta có: $A = \dfrac{\left(-48 \pm 25\sqrt{3}\right)B}{39}$

Ta chọn B = 39 thì $A = -48 \pm 25\sqrt{3}$ và $C = 30 \mp 40\sqrt{3}$.

Vậy ta có hai tiếp tuyến chung là:

$(-48 + 25\sqrt{3})x + 39y + 30 - 40\sqrt{3} = 0$

và $(-48 - 25\sqrt{3})x + 39y + 30 + 40\sqrt{3} = 0$.

BÀI TẬP

Bài tập 11.1: Tìm tâm và bán kính của đường tròn:

a) $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 20$ b) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 1 = 0$.

HD-ĐS

a) $I(4; -6)$, $R = 2\sqrt{5}$ b) $I(2; -\dfrac{5}{4})$, $R = \dfrac{\sqrt{97}}{4}$.

Bài tập 11.2: Cho (C_m): $x^2 + y^2 - 2(m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$

a)Tìm m để (C_m) là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm.

b) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành.

HD-ĐS

a) $m < 1$, $m > 2$; $y = -2x + 4$ với $x < 3$, $x > 4$.

Bài tập 11.3: Lập phương trình đường tròn:

a) Đường kính MN với M (2; 7) và N(-4; 1)

b) Qua P(0; 1), Q(1; -1); R(2; 0).

HD-ĐS

b) $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = 0$.

Bài tập 11.4: Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với A(1; -5); B(-4; 5) và C(4; 1).

HD-ĐS

$(x-1)^2 + y^2 = 5$.

Bài tập 11.5: Cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$, (C_2): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

a)Xét vị trí tương đối. Lập phương trình các tiếp tuyến chung

b)Lập phương trình đường thẳng qua A(2, 1) và cắt (C_1) theo dây lớn nhất.

HD-ĐS

a) $x = 1 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$.

Bài tập 11.6: Cho (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

a) Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm của hai tiếp tuyến từ A(3; 4).

b) Tìm quỹ tích các điểm mà từ đó vẽ 2 tiếp tuyến với (C) và chúng hợp nhau góc 60^0.

HD-ĐS

a) $x + 3y - 1 = 0$.

Bài tập 11.7: Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến:

a) Qua B (3; -11)

b) Vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.

HD-ĐS

a) $4x - 3y - 45 = 0$, $3x + 4y + 35 = 0$.

Bài tập 11.8: Cho 2 đường tròn: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$.

a) Chứng minh 2 đường tròn tiếp xúc ngoài tại H.

b) Tiếp tuyến chung ngoài cắt đường nối tâm tại K. Lập phương trình đường tròn qua K và tiếp xúc với 2 đường tròn đó.

HD-ĐS

b) $(x - \frac{37}{5})^2 + (y - \frac{31}{5})^2 = 36$.

Bài tập 11.9: Chứng minh họ các đường thẳng: $(1-m^2)x + 2my + m^2 - 4m + 3 = 0$ luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

HD-ĐS

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

§12 TỌA ĐỘ, GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

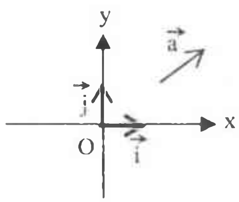
Tọa độ vectơ và điểm

- Hệ trục Oxy hay (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) với hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ nên Ox và $\vec{j}$ trên Oy. Toạ độ vectơ $\vec{a}$ trên Oxy: $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$.

$\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

$\vec{i} = (1; 0)$

$\vec{j} = (0; 1)$



Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a}(x; y) = \vec{b}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Phép toán vectơ

Cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ *thì:*

$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

$k\vec{a} = (kx; ky)$ *với* $k \in \mathbf{R}$

$\vec{b}$ *cùng phương với* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *khi có số* $k \in \mathbf{R}$: $x' = kx, y' = ky$

- Toạ độ trung điểm M: M(x; y) hay M = (x; y): $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

- Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$

- Toạ độ điểm I của đoạn AB: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

- Biểu diễn một vectơ theo 2 vectơ không cùng phương là giải hệ phương trình để tìm 2 hệ số k, m: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.

- Tích vô hướng hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *và* $\vec{b} = (b_1; b_2)$,

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}; \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$.

- Trực tâm H: $\begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$

- *Chân đường cao AK:* $\begin{cases} \overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$

- *Chân phân giác AD:* $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$.

Khoảng cách và góc

- *Độ dài vectơ* $\vec{u} = (u_1; u_2)$ *là* $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
- *Khoảng cách* $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- *Khoảng cách từ điểm $M_o(x_o; y_o)$ đến đường thẳng Δ:*

  $ax + by + c = 0$ được cho bởi công thức $d(M_o; \Delta) = \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- *Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau*

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là:

  $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

- *Vị trí của 2 điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N, y_N)$ đối với đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:*

  M, N cùng phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$,

  M, N khác phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

Để tìm phân giác trong AD của tam giác ABC, ta lập phương trình 2 cạnh AB, AC rồi tìm phương trình 2 phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC. Chọn phân giác trong tương ứng với 2 điểm B, C khác phía.

- *Góc giữa hai vectơ* $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *và* $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

- *Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến* $\vec{n_1}$ *và* $\vec{n_2}$:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Bài toán 12.1: Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

b) Tìm các số k, m để $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.

Giải

a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (4; 2) - (9; 12) + (7; 2) = (2; -8)$.

b) $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 7m \\ 2 = k + 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{22}{5} \\ m = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$. Vậy $\vec{c} = \dfrac{22}{5}\vec{a} - \dfrac{3}{5}\vec{b}$.

Bài toán 12.2: Xét xem các cặp vectơ sau có cùng phương không? Trong trường hợp cùng phương thì xét xem cùng hướng hay ngược hướng?

a) $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-10; -15)$ b) $\vec{u} = (0; 5)$, $\vec{v} = (0; 8)$

c) $\vec{m} = (-2; 1)$, $\vec{n} = (-6; 3)$ d) $\vec{c} = (3; 4)$, $\vec{d} = (6; 9)$.

Giải

a) $\vec{b} = (-10; -15) = -5\vec{a}$ nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương, ngược hướng.

b) $\vec{v} = (0, 8) = \dfrac{8}{5}\vec{u}$ nên $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương, cùng hướng.

c) $\vec{n} = (-6; 3) = 3\vec{m}$ nên $\vec{m}$, $\vec{n}$ cùng phương, cùng hướng.

d) Vì $\dfrac{3}{6} \neq \dfrac{4}{9}$ nên $\vec{c}$, $\vec{d}$ không cùng phương.

Bài toán 12.3: Trên mặt phẳng Oxy cho 2 điểm A(-2; -2) và B(5; -4)

a) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác OAB.

b) Tìm toạ độ C sao cho tam giác ABC có trọng tâm là G(2; 0).

Giải

a) Trọng tâm G: $x = \dfrac{x_O + x_A + x_B}{3} = 1$; $y = \dfrac{y_O + y_A + y_B}{3} = -2$. Vậy G(1; -2)

b) Gọi (x_C; y_C) là toạ độ điểm C thì ta phải có:

$\dfrac{x_C - 2 + 5}{3} = 2$, $\dfrac{y_C - 2 - 4}{3} = 0$ suy ra $x_C = 3$, $y_C = 6$. Vậy C(3; 6).

Bài toán 12.4: Cho A(-4; 1). B(2; 4); C(2; -2)

a) Tìm điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD.

b) Tìm điểm E sao cho ABCE là hình bình hành.

Giải

a) Giả sử D = (x; y). Điểm C là trọng tâm tam giác ABD khi và chỉ khi

$$2 = \frac{-4 + 2 + x}{3} \text{ và } -2 = \frac{1 + 4 + y}{3}.$$

Suy ra x = 8, y = 11 nên D = (8; -11). = (2-x; -2-y).

Tứ giác ABCE là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 6 \\ -2 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$. Vậy E(-4; -5).

Bài toán 12.5: Cho ba điểm A(1; 0), B(0; 3), C(-3; -5). Tìm điểm M thuộc trục Ox mà T = $|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ bé nhất.

Giải

Gọi I(x, y) là điểm thoả mãn: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x)-3(-x)+2(-3-x)=0 \\ 2(-y)-3(3-y)+2(-5-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{19}{3} \end{cases}$$

Ta có T = $|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$

$= |2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})|$

$= |\overrightarrow{MI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC})| = |\overrightarrow{MI}| = MI.$

Vì I cố định và M thuộc trục Ox nên T bé nhất khi M là hình chiếu I lên Ox.

Vậy M(4; 0).

Bài toán 12.6: Cho $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng

a) $\vec{a}.\vec{b}$ b) $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$ c) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$.

Giải

a) $\vec{a}.\vec{b} = 1.2 + (-3).5 = 2 - 15 = -13$.

b) $\vec{a} + 2\vec{b} = (1; -3) + (4, 10) = (5, 7) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) = 1.5 + (-3).7 = -16$.

c) $\vec{a} + \vec{b} = (1; -3) + (2; 5) = (3; 2)$.

$\vec{a} - \vec{b} = (1; -3) - (2; 5) = (-1; -8)$.

$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 3(-1) + 2(-8) = -19$.

Cách khác: $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Bài toán 12.7: Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để:

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ b) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Giải

Ta có: $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{v} = (k; -4)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$; $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$

Do đó $|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2+16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4}$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Bài toán 12.8: Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp:

a) $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6)$ b) $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$.

Giải

a) Áp dụng công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1(-2)+(-2).(-6)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{4+36}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^o$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = \frac{-29}{29\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^o$.

Bài toán 12.9: Cho điểm A(1; 3) và B(4; 2). Phân giác trong của góc AOB cắt AB tại E. Tìm toạ độ điểm E.

Giải

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì điểm E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$, vậy điểm E chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Toạ độ của điểm E là: $x_E = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}.4}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2+3\sqrt{2}$; $y_E = \frac{3+\frac{\sqrt{2}}{2}.3}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4-\sqrt{2}$

Vậy E = $(-2 + 3\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$.

Bài toán 12.10: Cho tam giác ABC có 3 đỉnh A(-3; 0), B(3; 0), C(2; 6). Tìm toạ độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Giải

Trọng tâm G có toạ độ: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2$.

Vậy $G(\frac{2}{3}; 2)$

Gọi H(x; y) là trực tâm ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-3)+(y-0)(6-0)=0 \\ (x-3)(-3-2)+(y-0)(0-6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=3 \\ -5x-6y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{5}{6} \end{cases}. \text{ Vậy } H(2; \dfrac{5}{6}).$$

Bài toán 12.11: Biết A(1; -1) và B(3; 0) là hai đỉnh của hình vuông ABCD. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.

Giải

Gọi C(x; y). Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 3; y)$.

Điều kiện ABCD là hình vuông ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)+1.y=0 \\ (x-3)^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ 5(x-3)^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ (x-3)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $C_1(4; -2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2; -3)$.

Với $C_2(2; 2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0; 1)$.

Bài toán 12.12: Cho bốn điểm A(-8; 0), B(0; 4), C(2; 0), D(-3; -5). Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (5; -5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2; 4)$; $\overrightarrow{CD} = (-5; -5)$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{8.5+4.(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{(-2).(-5)+4.(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$$

Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp

Cách khác: Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC rồi chứng minh IA = ID.

Bài toán 12.13: Cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$.

Chứng minh diện tích $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Giải

Dùng công thức

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Bài toán 12.14: Tìm góc giữa hai đường thẳng:

a) $4x - 2y + 6 = 0$ và $x - 3y + 1 = 0$ b) $3x - 2y - 1 = 0$ và $2x + 3y - 8 = 0$.

Giải

a) Đường thẳng $4x - 2y + 6 = 0$ có VTPT $(4; -2)$

Đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có VTPT $(1; -3)$

$$\cos\varphi = \frac{|4.1 + (-2)(-3)|}{\sqrt{16+4}.\sqrt{1+9}} = \frac{10}{\sqrt{20}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0$$

b) Đường thẳng $3x - 2y - 1 = 0$ có VTPT $(3; -2)$

Đường thẳng $2x + 3y - 8 = 0$ có VTPT $(2; 3)$

$$\cos\varphi = \frac{|3.2 + (-2).3|}{\sqrt{9+4}.\sqrt{4+9}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^o.$$

Bài toán 12.15: Xác định các giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng:

$$\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases} \text{ và } 3x + 4y + 12 = 0 \text{ bằng } 45^o.$$

Giải

Đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}\,(a; -2)$

Đường thẳng Δ_2: $3x + 4y + 12 = 0$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v}\,(4; -3)$.

Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45^o khi và chỉ khi:

$$\cos 45^o = \frac{|4a + 6|}{\sqrt{a^2 + 2^2}.\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a + 6|}{5\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2 + 4) = 2(4a + 6)^2 \Leftrightarrow 7a^2 + 96a - 28 = 0.$$

Từ đó có hai giá trị cần tìm là $a = \frac{2}{7}$ và $a = -14$.

Bài toán 12.16: Tìm các khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng tương ứng sau đây:

a) A(3; 5), Δ: 4x + 3y + 1 = 0 b) M(4; -5), Δ: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

Giải

a) $d(A, \Delta) = \dfrac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{28}{5}$.

b) Khử t, ta có phương trình tổng quát của 3x - 4y + 8 = 0 nên

$$d(M; \Delta) = \frac{|3.4 + 4.5 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8.$$

Bài toán 12.17: Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Δ_1: 48x + 14y - 21 = 0; Δ_2: 24x + 7y - 28 = 0.

Giải

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm của đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Δ_2: 24x + 7y - 28 = 0

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0; 4) \in \Delta_2$

$$d(\Delta_1; \Delta_2) = d(A; \Delta_1) = \frac{|48.0 + 14.4 - 21|}{\sqrt{48^2 + 14^2}} = \frac{7}{10}.$$

Bài toán 12.18: Cho hai điểm A(1; 1) và B(3; 6). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng 2.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua A(1; 1) có phương trình:

$a(x - 1) + b(y - 1) = 0$ hay $ax + by - a - b = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Ta có $d(B; \Delta) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3a + 6b - a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (2a + 5b)^2 = 4(a^2 + b^2)$

$$\Leftrightarrow b(21b + 20a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 21b + 20a = 0 \end{array}\right.$$

Với b = 0, chọn a = 1, ta được đường thẳng Δ_1: x - 1 = 0

Với 21b + 20a = 0, chọn a = 21, b = -20 ta được đường thẳng Δ_2: 21x - 20y - 1 = 0.

Bài toán 12.19: Lập phương trình đường thẳng cách đường thẳng d: -2x + 5y - 1 = 0 một khoảng cách bằng 3.

Giải

Điều kiện điểm M(x; y) cách đường thẳng d: -2x + 5y - 1 = 0 một khoảng bằng 3:

$$\frac{|-2x+5y-1|}{\sqrt{2^2+5^2}}=3 \Leftrightarrow |-2x+5y-1|=3\sqrt{29}$$

$\Leftrightarrow$ $-2x + 5y - 1 = 3\sqrt{29}$; $-2x + 5y - 1 = -3\sqrt{29}$

Vậy có hai đường thẳng song song:

$-2x + 5y - 1 - 3\sqrt{29} = 0$ và $-2x + 5y - 1 + 3\sqrt{29} = 0$.

Bài toán 12.20: Lập phương trình đường thẳng qua P(10; 2) và cách đều hai điểm A(3; 0) và B(-5; 4).

Giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua P và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$

Thì: Δ: $a(x - 1) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 10a - 2b = 0$.

$$d(A;\Delta) = d(B;\Delta) = \frac{|-7a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-15a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |7a+2b| = |15a-2b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7a+2b = 15a-2b \\ 7a+2b = -15a+2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-b=0 \\ a=0 \end{array}\right.$$

Với $2a - b = 0$, chọn $a = 1$, $b = 2$ thì Δ: $x + 2y - 14 = 0$

Với $a = 0$, chọn $b = 1$ thi Δ': $y - 2 = 0$.

Bài toán 12.21: Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng Δ_1: $2x + 4y + 7 = 0$ và Δ_2: $x - 2y - 3 = 0$.

Giải

Phương trình hai đường phân giác của các góc giữa Δ_1 và Δ_2 là:

$$\frac{2x+4y+7}{\sqrt{4+16}} \pm \frac{x-2y-3}{\sqrt{1+4}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4y+7-2(x-2y-3)=0 \\ 2x+4y+7+2(x-2y-3)=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ $8y + 13 = 0$ hay $4x + 1 = 0$.

Bài toán 12.22: Cho các cạnh của tam giác ABC có phương trình:

AB: $x - y + 4 = 0$; BC: $3x + 5y + 4 = 0$; AC: $7x + y - 12 = 0$.

a) Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

b) Gốc toạ độ O nằm trong hay nằm ngoài tam giác ABC?

Giải

a) Giải các hệ phương trình, ta tìm được toạ độ các đỉnh của tam giác ABC là: A(1; 5), B(-3; 1), C(2; -2).

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là:

$$\frac{x-y+4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x+y-12}{\sqrt{49+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x-y+4) = 7x+y-12 \\ 5(x-y+4) = -(7x+y-12) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3y-16=0 & (1) \\ 3x-y+2=0 & (2) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B và C vào vế trái của phương trình (1) ta được:

-3 + 3 - 16 = -16; 2 - 6 - 16 = -20

Suy ra B và C ở cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1).

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là: 3x - y + 2 = 0

b) Thay lần lượt toạ độ của gốc O vào vế trái phương trình của BC, AC, AB ta được: 4 > 0 ; - 12 < 0 ; 4 > 0

Thay toạ độ A, B, C lần lượt vào vế trái phương trình của BC, AC, AB ta được:

3 + 5. 5 + 4 = 32 > 0; 7(-3) + 1 - 12 = -32 < 0; 2 + 2 + 4 = 8 > 0.

Như vậy: O và A nằm cùng phía đối với BC; O và B nằm cùng phía đối với AC; O và C nằm cùng phía đối với AB. Vậy O nằm trong tam giác ABC.

Bài toán 12.23: Viết phương trình phân giác d của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng d_1: x - 2y - 5 = 0, d_2: 2x - y + 2 = 0.

Giải

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

Do đó I(-3; -4). Lấy A(5; 0) $\in d_1$, B(-1; 0) $\in d_2$

Ta có: $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 8.2 + 4.4 = 32 > 0$ nên góc AIB nhọn

M(x; y) thuộc phân giác d của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2

$$\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}) = \cos(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IM}) \Leftrightarrow \frac{8(x+3)+4(y+4)}{4\sqrt{5}} = \frac{2(x+3)+4(y+4)}{2\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow$ x - y - 1 = 0. Vậy d: x - y - 1 = 0.

Chú ý: Nếu góc AIB tù thì M $\in$ d khi: $\cos(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IM}) = -\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$.

Bài toán 12.24: Viết phương trình đường thẳng d đi qua P(3; 1) cắt 2 đường thẳng Δ_1: x + 2y - 3 = 0, Δ_2: 3x - y + 2 = 0 tại A, B sao cho d tạo với Δ_1, Δ_2 thành tam giác cân có đường thẳng AB.

Giải

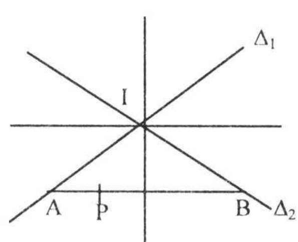
Giả sử đường thẳng d cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B. Gọi I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 thì tam giác IAB là tam giác cân tại đỉnh I khi Δ vuông góc với đường phân giác trong của góc AIB.

Phương trình hai đường phân giác là:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} \pm \frac{3x-y+2}{\sqrt{10}} = 0$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 3)x + (2\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0,$

$(\sqrt{2} + 3)x + (2\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0.$



Vậy hai đường thẳng cần tìm qua P và lần lượt vuông góc với phân giác, có phương trình chính tắc:

$$\frac{x-3}{\sqrt{2}-3}=\frac{y-1}{2\sqrt{2}+1};\ \frac{x-3}{\sqrt{2}+3}=\frac{y-1}{2\sqrt{2}-1}$$

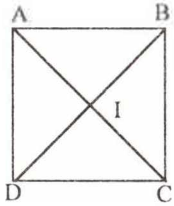
Cách khác: dùng góc $\cos(d; \Delta_1) = \cos(d; \Delta_2)$.

Bài toán 12.25: Cho hình vuông ABCD có tâm I(4; -1) và phương trình cạnh AB là x + 2y - 1 = 0. Lập phương trình hai đường chéo của hình vuông.

Giải

Hai đường chéo AC, BD là hai đường thẳng qua I hợp với AB một góc 45^o.

Phương trình 2 đường chéo: $a(x - 4) + b(y + 1) = 0$



Với $\vec{u} = (a; b)$ là VTCP, $a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng AB: $x + 2y - 2 = 0$ có VTCP $\vec{v} = (2; -1)$

Ta có: $|\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \cos 45^o \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{4+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 2(2a - b)^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0$

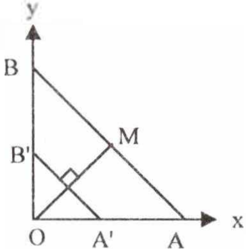
$\Leftrightarrow (a - 3b)(3a + b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$ hay $b = -3a$

Với $a = 3b$, chọn $b = 1$, $a = 3$ ta có d: $3x + y - 11 = 0$

Với $b = -3a$, chọn $a = 1$, $b = -3$, ta có d': $x - 3y - 7 = 0$.

Bài toán 12.26: Trên hai cạnh của góc vuông xOy lần lượt lấy hai cặp điểm A, A' và B, B' sao cho OA. OA' = OB. OB'. Chứng minh rằng đường trung tuyến của tam giác ABO cũng là đường cao của tam giác A'B'O.

Giải



Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.

Đặt A = (a; 0), A' = (a'; 0),

B(0; b), B'= (0; b')

Ta có OA. OA' = OB. OB' $\Rightarrow aa' = bb'$

Gọi M là trung điểm AB thì:

$$M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right) \Rightarrow \overline{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right) \text{ và } \overline{A'B'} = (-a';b')$$

nên $\overline{OM}.\overline{A'B'} = \dfrac{-aa'}{2} + \dfrac{bb'}{2} = 0 \Rightarrow OM \perp A'B'$ (đpcm).

Bài toán 12.27: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi N là trung điểm của CD và lấy điểm M trên đường chéo AC sao cho $AM = \dfrac{1}{4}AC$.

a) Chứng minh tam giác BMN vuông cân. Tính diện tích BMN.

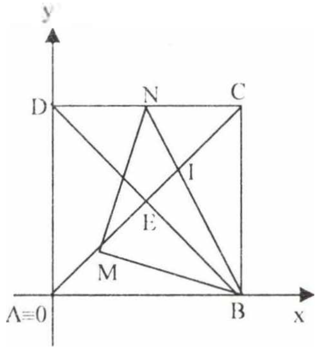
b) Gọi I là giao điểm của BN và AC. Tính đoạn CI

Giải

Ta đưa toạ độ vào để giải toán

Lập hệ trục toạ độ vuông góc với gốc O trùng với điểm A sao cho

$B = (a; 0)$, $D = (0; a)$



a) Ta có $M = \left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$, $N = \left(\frac{a}{2}; a\right)$

$$BM = \sqrt{\left(\frac{a}{4} - a\right)^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$BN = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Do đó $BM = MN$, $BM^2 + MN^2 = BN^2$

Vậy tam giác BMN vuông cân tại M

$$S_{BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{5a^2}{16}$$

b) Ta có I là trọng tâm tam giác BCD nên: $CI = \frac{2}{3}CE = \frac{1}{3}CA = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

BÀI TẬP

Bài tập 12.1: Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

HD-ĐS

$\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$.

Bài tập 12.2: Cho ba điểm A(2; 5) B(1; 1), C(3; 3)

a) Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

b) Tìm toạ độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm toạ độ tâm hình bình hành đó.

HD-ĐS

a) D(-3; -3) b) E (4; 7); tâm $I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Bài tập 12.3: Cho tam giác ABC có A(-1; 1), B(5; -3), đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm toạ độ đỉnh C.

HD-ĐS

$G = (\frac{4}{3}; 0)$, $C = (0; 2)$.

Bài tập 12.4: Cho các vectơ $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$.

a) Tìm k và m sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a} + \vec{b}$.

b) Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$.

HD-ĐS

a) $2k + 3m = 0$ b) $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

Bài tập 12.5: Tìm giá trị của m để đường thẳng $mx + y + 1 = 0$ hợp với đường thẳng $2x - y + 9 = 0$ góc 30^o.

HD-ĐS

$m = 8 \pm 3\sqrt{5}$.

Bài tập 12.6: Đường thẳng Δ: $2x - 5y + 9 = 0$ cắt 2 trục toạ độ tại A, B. Tính chiều cao OH của tam giác OAB.

HD-ĐS

$$OH = d(O; \Delta) = \frac{|2.0 - 5.0 + 9|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{9}{\sqrt{29}}.$$

Bài tập 12.7: Tìm giá trị m để khoảng cách từ A(1; 1) đến đường thẳng $mx + (2m - 1)y - 3 = 0$ bằng 2.

HD-ĐS

$$m = \frac{-4 \pm 2\sqrt{37}}{11}.$$

Bài tập 12.8: Viết phương trình của đường thẳng d đi qua gốc toạ độ và cách đều hai điểm A(2; 2) và B(4; 0)

HD-ĐS

d: $x + y = 0$, d': $x - 3y = 0$.

Bài tập 12.9: Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng đường thẳng AC đi qua điểm M(1; -3)

HD-ĐS

AC: $2x + 11y + 31 = 0$.

13 TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

- Dạng tổng quát: Phương trình đường thẳng qua điểm $I(x_o; y_o)$ và có VTPT $\overrightarrow{n}(a; b)$

Viết phương trình $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$ rồi suy ra dạng tổng quát:

$ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0.$

- Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn: đi qua hai điểm $A(a; 0)$, $B(0; b)$ với $a, b \neq 0$ là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- Dạng tham số, chính tắc: Phương trình đường thẳng qua điểm $I(x_o; y_o)$ thuộc đường thẳng và có VTCP $\overrightarrow{u}(a; b)$ thì:

Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Nếu $a, b \neq 0$ thì có dạng chính tắc: $\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}$.

- Khoảng cách $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- Khoảng cách từ điểm $M_o(x_o; y_o)$ đến đường thẳng Δ

$ax + by + c = 0$ được cho bởi công thức $d(M_o; \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

- Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

- Vị trí của 2 điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N, y_N)$ đối với đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:

M, N cùng phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$,

M, N khác phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

- Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Bài toán 13.1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC có phương trình x + y + 1 = 0. Phương trình đường cao vẽ từ B là x - 2y - 2 = 0. Điểm M(2; 1) thuộc đường cao vẽ từ C. Viết phương trình các cạnh AB và AC.

Giải

Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C

Ta có B(0; -1) và $\overrightarrow{BM}=(2;2)$. Suy ra $MB \perp BC$.

Kẻ MN // BC cắt BD tại N vì ΔABC cân tại A nên BCNM là hình chữ nhật.

Phương trình đường thẳng MN là x + y - 3 = 0.

Vì $N = MN \cap BD$ nên $N\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Do $NC \perp BC$ nên phương trình của đường thẳng NC là $x - y - \frac{7}{3} = 0$.

Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y - \frac{7}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right).$$

Khi đó $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$ nên phương trình AB là x + 2y + 2 = 0.

Vì $\overrightarrow{BN} = \left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$ nên phương trình cạnh AC là: $2x + y + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 1 = 0$.

Bài toán 13.2: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho ABC có A(2; -3), trực tâm H(-1; -2) và B thuộc đường thẳng d: x + y + 9 = 0, C thuộc đường thẳng d': 5x + y + 5 = 0. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết rằng đỉnh C có tung độ dương.

Giải

Vì $B \in d \Rightarrow B(b; -b - 9)$ và $C \in d' \Rightarrow C(c; -5c -5)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3(c - b) + (-5c + b + 4) = 0 \Leftrightarrow b = 2c - 1$.

Suy ra B(2c - 1; -2c - 8).

Mặt khác $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2c(c - 2) + (6 + 2c)(-5 - 2c) = 0$

$$\Leftrightarrow 12c^2 + 30c + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì C có tung độ dương nên ta chọn c = -2.

Suy ra B(-5; -4), C(-2; 5).

Do đó BC: $3x - y + 11 = 0$, CA: $2x + y - 1$, AB: $x - 7y - 23 = 0$.

Bài toán 13.3: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, viết phương trình các cạnh của tam giác ABC có trực tâm H(-1; -2), B(2; -3). Biết rằng C thuộc đường thẳng d: $x + y + 9 = 0$, A thuộc đường thẳng d': $5x + y + 5 = 0$ và đỉnh A có tung độ dương.

Giải

Vì $C \in d \Rightarrow C(c; -c - 9)$ và $A \in d' \Rightarrow A(a; -5a - 5)$, $a < -1$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3(a - c) + (-5a + c + 4) = 0 \Leftrightarrow c = 2a - 1.$$

Suy ra C(2a - 1; -2a - 8).

Và $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) + (6 + 2a)(-5 - 2a) = 0$

$$\Leftrightarrow 12a^2 + 30a + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì A có tung độ dương nên ta chọn a = -2 do đó A(-2; 5).

Suy ra C(-5; -4),

Do đó AC: $3x - y + 11 = 0$, AB: $2x + y - 1 = 0$, BC: $x - 7y - 23 = 0$.

Bài toán 13.4: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là M(3; 2), trọng tâm $G\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(1; -2). Xác định tọa độ đỉnh C.

Giải

Ta có M(3; 2), trọng tâm $G\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Từ $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ suy ra A(-4;-2).

Đường thẳng BC đi qua M nhận vectơ $\overrightarrow{IM}$ làm VTPT nên có phương trình BC: $x + 2y - 7 = 0$.

Gọi C(x; y). Vì $C \in BC \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$

Mặt khác $IC = IA \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm C(5; 1) và C(1; 3).

Bài toán 13.5: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3; 2), B(4; 5), góc $\widehat{CAB} = 135^o$. Tìm tọa độ điểm C ở bên phải đường thẳng x = 3 và biết đường cao $CH = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Giải

Tam giác CAH vuông cân tại H nên $CA = \sqrt{5}$.

Gọi C(x; y), theo giả thiết thì x > 3. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 135^o \\ AC = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)+3(y-2)}{\sqrt{10}\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (x-3)^2+(y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=4 \\ (x-3)^2+(y-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=4, y=0 \end{array}\right.$$

Chọn điểm C(4; 0).

Bài toán 13.6: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B($-\sqrt{3}$; 0), C($\sqrt{3}$; 0), góc giữa hai đường thẳng BC và AB bằng 30^o, góc giữa hai đường thẳng BC và CA bằng 60^o. Tìm tọa độ đỉnh A biết hoành độ A bé hơn 1.

Giải

Gọi A(x; y) với x <1.

Khi đó $\overrightarrow{BA} = (x+\sqrt{3}; y)$, $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{3}; 0)$, $\overrightarrow{CA} = (x-\sqrt{3}; y)$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \left|\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right| = \cos 30^0 \\ \left|\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})\right| = \cos 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|2\sqrt{3}(x+\sqrt{3})\right|}{2\sqrt{3}\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\left|2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})\right|}{2\sqrt{3}\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\sqrt{3})^2 = 3y^2 \\ 3(x-\sqrt{3})^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1 \end{array}\right. \\ (x+\sqrt{3})^2 = 3y^2 \end{cases}$$

Chọn $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ta có hai điểm $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 13.7: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(0; 1), B(4; 5). Đường phân giác trong của góc B song song với trục tung, $\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Đường thẳng BC đi qua B(4; 5) có dạng: a(x - 4) + b(y - 5) = 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Đường phân giác trong góc B đi qua B(4; 5) và song song với Oy: x = 0 nên có phương trình Δ: x = 4.

Đường thẳng AB có phương trình AB: x - y + 1 = 0

Vì Δ là đường phân giác trong góc B nên:

$$\cos(\Delta, AB) = \cos(\Delta, BC) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

Với a = -b, chọn a = 1, b = -1 thì BC: x - y + 9 = 0 trùng với AB: loại.

Với a = b, chọn a = b = 1 thì BC: x + y - 9 = 0.

Do đó C(c; 9 - c). Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{c(c-4) + (c-4)(c-8)}{\sqrt{c^2 + (c-8)^2}.\sqrt{(c-4)^2 + (c-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(c-4)^2}{\sqrt{c^2 + (c-8)^2}.\sqrt{2}|c-4|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}|c-4|}{\sqrt{c^2 + (c-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 64c + 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = 6 \end{array}\right.. \text{ Do đó } C(2;7); C(6;3).$$

Điểm C(2; 7) bị loại do nằm cùng phía với A đối với đường thẳng Δ.

Vậy chọn C(6; 3).

Bài toán 13.8: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có M(2; 3) là trung điểm AB, chân đường cao hạ từ C và B lần lượt là H(1; 5), K(5; 9). Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C biết đỉnh B có hoành độ dương.

Giải

Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và H nên AB: 2x + y - 7 = 0.

Suy ra CH: x - 2y + 9 = 0.

Vì B ∈ AB ⇒ B(b; 7 - 2b). Tam giác AKB vuông tại K nên

$$MB = KM \Leftrightarrow (b-2)^2 + (4-2b)^2 = 45 \Leftrightarrow 5b^2 - 20b - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Vì đỉnh B có hoành độ dương nên chọn B(5; -3)

đỉnh A đối xứng với B qua M nên A(-1; 9)

Đường thẳng AC đi qua A(-1; 9) và K(5; 9) nên AC: y = 9.

Từ đó suy ra C(9; 9).

Bài toán 13.9: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 8, cạnh BC: x - y = 0. Tìm tọa độ trung điểm N của AC biết rằng M(5; 3) là trung điểm của AB.

Giải

Ta có MN: x - y - 2 = 0

$$d(A, BC) = 2d(M, BC) = 2\frac{|5-3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Theo giả thiết: $S_{ABC} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}$ BC. d(A,BC) = 8

$$\Rightarrow BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1 \\ x = 7, y = 5 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra N(3; 1), N(7; 5).

Bài toán 13.10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là I(5; 3), chân đường cao hạ từ C xuống AB là H(4; 2), trung điểm của BC là M(3; 4). Tìm tọa độ điểm A.

Giải

Đường thẳng BC đi qua M(3; 4) và nhận $\overrightarrow{MI}$ =(2; -1) làm VTPT nên BC: 2x - y - 2 = 0. Ta có B(b; 2b - 2).

Tam giác BHC vuông tại H có trung tuyến HM nên

$$MH = MB \Leftrightarrow 5 = (b-3)^2 + (2b-6)^2 \Leftrightarrow 5b^2 - 30b + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = 2 \end{array}\right..$$

Với b = 4 ta có B(4; 6).

Đường thẳng AB đi qua B(4; 6) và H(4; 2) nên AB: x = 4. Do đó A(4; a).

$$\text{Ta có } IA = IB \Leftrightarrow 1 + (a-3)^2 = 10 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = 0 \end{array}\right..$$

Chọn A(4; 0) khác B.

Với b = 2 ta có B(2; 2).

Đường thẳng AB đi qua B(2; 2) và H(4; 2) nên AB: x = 2. Do đó A(a; 2).

$$\text{Ta có } IA = IB \Leftrightarrow (a-5)^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow (a-5)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 8 \end{array}\right.$$

Chọn A(8; 2) khác B.

Bài toán 13.11: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung tuyến BP: $2x + y - 3 = 0$ và phân giác trong BD: $x + y - 2 = 0$. Điểm M(2; 1) thuộc đường thẳng AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

Từ phương trình của đường trung tuyến BP và đường phân giác BD suy ra B(1;1).

Gọi N là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong góc B thì đó N nằm trên đường thẳng BC. Ta có: MN: $x - y - 1 = 0$.

Giao điểm của MN và đường phân giác trong góc B là $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Do đó N(1;0). Đường thẳng BC: $x = 1$. Ta có C(1;c)

Đường thẳng AB: $y = 1$. Ta có A(a;1).

Trung điểm $P\left(\frac{a+1}{2};\frac{c+1}{2}\right)$ của AC thuộc d_1 nên $2a + c - 3 = 0 \Rightarrow c = 3 - 2a$.

Đường thẳng BC: $x = 1$ và AB: $y = 1$ nên tam giác ABC vuông tại B do đó:

$$R = PB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 = 20$$

Do đó $(a - 1)^2 + (2 - 2a)^2 = 20$ Hay $5a^2 - 10a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ hay $a = -1$.

Vậy A(3;1), C(1;-3) hay A(-1;1), C(1;5).

Bài toán 13.12: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(1; 2), C thuộc trục tung, phân giác trong AD: $2x + y - 1 = 0$, khoảng cách từ C đến đường thẳng AD bằng 2 lần khoảng cách từ B đến đường thẳng AD. Tìm tọa độ của A và C.

Giải

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua đường phân giác trong góc A thì B' nằm trên AC. Ta có BB': $x - 2y + 3 = 0$

Giao điểm của BB' và AD là $I\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

B(1;2) và I là trung điểm của BB' nên $B'\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Vì $C \in Oy \Rightarrow C(0;c)$

Theo giả thiết d(C, AD) = 2d(B, AD) nên B' là trung điểm của AC suy ra

$A\left(-\frac{14}{5};\frac{8}{5}-c\right)$. Mà $A \in AD \Rightarrow c = -5$.

Vậy đỉnh $A\left(-\frac{14}{5};\frac{33}{5}\right)$, C(0; -5).

Bài toán 13.13: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(5; 2), phương trình đường trung trực cạnh BC là d: x + y - 6 = 0; đường trung tuyến CC'là d': 2x - y + 3 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Giải

Vì C, C' $\in$ d' $\Rightarrow$ C(c; 2c + 3), C'(c'; 2c' + 3)

Vì B đối xứng với A qua C' nên B(2c'-5; 4c' + 4).

Do đó $\overrightarrow{BC}$ = (c - 2c' + 5; 2c – 4c'-1).

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}$ (1; -1).

Gọi trung điểm của BC là $M\left(\frac{c+2c'-5}{2};\frac{2c+4c'+7}{2}\right)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} M \in d \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c+2c'-5}{2} + \dfrac{2c+4'+7}{2} - 6 = 0 \\ (c-2c'+5)-(2c-4c'-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{14}{3} \\ c' = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$, $B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Bài toán 13.14: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AA': 2x - y + 1 = 0, trung tuyến BM: y + 3 = 0, đường trung trực của AB là Δ: x + y + 2 = 0. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Giải

Vì A $\in$ AA' $\Rightarrow$ A(a; 2a + 1). Vì B $\in$ BM $\Rightarrow$ B(b; -3)

Gọi N là trung điểm của AB thì $N\left(\frac{a+b}{2};a-1\right)$.

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}$ =(1; -1).

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \\ N \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)-(-4-2a) = 0 \\ \dfrac{a+b}{2} + (a-1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$

Từ đó suy ra A(1; 3), B(-5; -3) ,

Đường thẳng BC có phương trình x + 2y + 11 = 0.

Do đó C(-2c - 11; c). Vì M $\in$ BM $\Rightarrow$ M(m; -3)

Ta có M là trung điểm của AC nên $\begin{cases} 1-2c-11 = 2m \\ 3+c = -6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ c = -9 $\Rightarrow$ C(7; -9).

Đường cao vẽ từ B có phương trình x - 2y - 1 = 0

Trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$. Vậy H(-1; -1).

Bài toán 13.15: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong BD: x - y + 2 = 0, đường cao CH: 4x + 3y + 6 = 0. Biết rằng gốc O là chân đường vuông góc với A lên BC. Tìm tọa độ đỉnh A.

Giải

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua phân giác trong góc B.

Khi đó O' $\in$ AB. Ta có: OO': x + y = 0.

Gọi I là giao điểm của BD và OO' thì I(-1; 1) và O'(-2; 2)

Đường thẳng AB đi qua O' và vuông góc với CH nên AB: 3x - 4y + 14 = 0.

B là giao điểm của hai đường thẳng AB và BD nên B(6; 8)

Đường thẳng AO đi qua O và nhận $\overrightarrow{OB} = (6;\ 8)$ hay (3;4) làm VTPT nên AO: 3x + 4y = 0.

Do đó suy ra $A\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{4}\right)$.

Bài toán 13.16: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có A(-2; -3), đường cao CH và đường trung tuyến BM lần lượt có phương trình là x + 3y - 1 = 0 và 5x + y - 3 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Giải

Đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với CH nên AB: 3x - y + 3 = 0.

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ 5x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(0;3).$$

Vì M $\in$ BM $\Rightarrow$ M(m; 3 -5m), vì C $\in$ CH $\Rightarrow$ C(1-3c; c).

Do M là trung điểm của AC nên: $\begin{cases} -2 + 1 - 3c = 2m \\ -3 + c = 6 - 10m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow C(4;-1)$.

Vậy B(0; 3), C(4; -1).

Bài toán 13.17: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đường cao CH: x + y - 5 = 0, trung tuyến AM: 2x - y - 4 = 0. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C biết rằng E(2; 3) là trung điểm của AC.

Giải

Vì A, C lần lượt thuộc trung tuyến AM và đường cao CH nên A(a; 2a - 4), C(c; 5 - c).

E là trung điểm của AC nên $\begin{cases} a + c = 4 \\ 2a - 4 + 5 - c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

Suy ra A(3; 2), C(1; 4).

Đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với CH

nên có phương trình AB: x - y - 1 = 0.

Vì B, M lần lượt thuộc đường thẳng AB và trung tuyến AM nên

B(b; b - 1), M(m; 2m - 4).

Vì M là trung điểm BC nên: $\begin{cases} b+1=2m \\ b-1+4=4m-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=9 \\ m=5 \end{cases}$

Từ đó suy ra B(9; 8).

Bài toán 13.18: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đường cao BH: 7x - y - 19 = 0, phân giác trong AD: x + 2y - 2 = 0, M(13; -8) thuộc tia đối của tia AB thỏa mãn AC = 3AM. Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C.

Giải

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua phân giác AD thì M' $\in$ AC

Ta có MM': 2x - y - 34 = 0.

Gọi I là giao điểm của AD và MM' thì I(14; -6).

Vì M' đối xứng với M qua I nên M'(15; -4).

Đường thẳng AC đi qua M' và vuông góc với BH nên AC: x + 7y + 13 = 0.

Từ đó suy ra A(8; -3).

Ta có AC = 3AM nên

$$\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 8 = -3(15-8) \\ y_C + 3 = -3(-4+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -13 \\ y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-13;0).$$

Đường thẳng AB đi qua A và M nên AB: x + y - 5 = 0.

Suy ra B(3; 2). Vậy A(8; -3), B(3; 2), C(-13; 0).

Bài toán 13.19: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 16, đường cao AH: x + y - 4 = 0, phân giác trong CD: x + 3y + 2 = 0, cạnh AC đi qua M(0; -14). Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C.

Giải

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong CD thì M ' $\in$ BC nên MM': 3x - y - 14 = 0

Gọi I là giao điểm của CD và MM' thì I(4; -2) và M'(8; 10)

Đường thẳng BC đi qua M' và vuông góc với AH nên BC: x - y + 2 = 0. Từ đó suy ra C(-2; 0)

Đường thẳng AC đi qua M và C nên AC: 7x + y + 14 = 0

Do đó suy ra A(-3; 7). Vì B $\in$ BC $\Rightarrow$ B(b; b + 2).

Ta có: $S_{ABC} = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AC.\ d(B, AC) = 16 \Leftrightarrow d(B, AC) = \frac{32}{AC} = \frac{32}{\sqrt{50}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|8b+16|}{\sqrt{50}} = \frac{32}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow |8b+16| = 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-6 \end{array}\right.$$

Với b = 2 $\Rightarrow$ B(2; 4). Vì A và B nằm một phía đối với đường phân giác trong CD nên không thỏa mãn.

Với b = -6 $\Rightarrow$ B(-6; -4). Ta có A và B nằm hai phía đối với đường phân giác trong CD nên trường hợp này thỏa mãn.

Vậy A(-3; 7), B(-6; 4), C(-2; 0).

Bài toán 13.20: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-6; 0), đường trung tuyến AM: 13x - 6y - 2 = 0 và đường cao AH: x - 2y - 14 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y-14=0 \\ 13x-6y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-9 \end{cases} \text{ nên A(-4;-9).}$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua I thì A'(-8; 9) nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi K là trực tâm của tam giác ABC.

Tứ giác BKCCA' có hai cặp cạnh đối diện song song nên là hình bình hành nên KA' và BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

Ta có K thuộc AH nên K(2k + 14; k), M thuộc AM nên $M\left(m; \frac{13m-2}{6}\right)$.

Vì M là trung điểm của KA' nên

$$\begin{cases} 2k+14-8=2.m \\ k+9=2.\frac{13m-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ m=2 \end{cases} \text{ nên K(12;-1), M(2;4).}$$

Đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT nên BC:

2x + y - 8 = 0. Ta có B(b; 8 - 2b).

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên:

$$IA = IB \Leftrightarrow 4 + 81 = (b+6)^2 + (2b-8)^2 \Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=1 \end{array}\right.$$

Với b = 3 ta có B(3; 2) và suy ra C(1; 6).

Với b = 1 ta có B(1; 6) và suy ra C(3; 2).

Bài toán 13.21: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Trung tuyến AM: y - 1 = 0 đường cao BK: x + y - 6 = 0, trung tuyến CM: 2x - y - 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Giải

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y-1=0\\ y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Rightarrow G(1;1).$$

Vì A, B, C lần lượt nằm trên ba đường thẳng: y - 1 = 0; x + y - 6 = 0; 2x - y -1 = 0 nên A(a; 1), B(b; 6 - b), C(c; 2c - 1).

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases}a+b+c=3\\ 1+6-b+2c-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3c\\ b=2c+3\end{cases}$$

Suy ra A(-3c; 1), B(2c + 3; 3 - 2c), C(c; 2c - 1).

Ta có $\overrightarrow{AC}$ = (4c; 2c-2), đường cao BK có VTCP là $\vec{u}$ =(1; -1)

$\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4c-2c+2=0\Leftrightarrow c=-1.$

Suy ra: A(3, 1), B(1; 5), C(-1; -3).

Bài toán 13.22: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G(4; 3), trung điểm của AC là M(3; 3), phương trình đường cao CH: x + y - 21 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Giải

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GM}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_B=2(3-4)\\ 3-y_B=2(3-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=6\\ y_B=3\end{cases}\Rightarrow B(6;3)$$

Đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với đường cao CH nên AB: x - y - 3 = 0.

Ta có A(a; a-3) và C $\in$ CH nên C(c; 21 - c)

Vì M là trung điểm của AC nên $\begin{cases}a+c=6\\ (a-3)+(21-c)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ c=9\end{cases}$

Suy ra A(-3; -6), C(9; 12).

Bài toán 13.23: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh C(1; 2), phân giác trong góc B có phương trình Δ: 2x + y - 1 = 0, khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ bằng 2 lần khoảng cách từ C đến đường thẳng Δ. Tìm tọa độ của A và B biết rằng A thuộc trục tung.

Giải

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua đường phân giác trong góc B thì C' nằm trên AB.

Ta có CC': x - 2y + 3 = 0. Gọi I là giao điểm của CC' và Δ

Khi đó $I\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$ nên $C'\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$. Vì A $\in$ Oy $\Rightarrow$ A(0; a).

Ta có d(A, Δ) = 2d(C, Δ) nên C' là trung điểm của AB suy ra $B\left(-\frac{14}{5}; \frac{8}{5} - a\right)$.

Mà B ∈ Δ ⇒ a = -5. Từ đó suy ra A(0; -5), $B\left(-\frac{14}{5}; \frac{33}{5}\right)$.

Bài toán 13.24: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có A(-4; -1), đường thẳng BC đi qua điểm M(-1; 1), độ dài cạnh BC bằng 4. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng I(-3; 1) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính R = IA = $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm của BC thì IH ⊥ BC

Tam giác IBH vuông tại H: d(I, BC) = IH = $\sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = 1$.

Đường thẳng BC đi qua M(-1; 1) nên có dạng:

$a(x + 1) + b(y - 1) = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0)$

$d(I, BC) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \Leftrightarrow 3a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}a$.

Với $b = a\sqrt{3}$, chọn a = 1, $b = \sqrt{3}$.

Khi đó BC: $x + \sqrt{3}y + 1 - \sqrt{3} = 0$.

nên $d(A, BC) = \frac{|-4-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}|}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.\ d(A, BC) = \frac{1}{2}.4.\frac{3+2\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$.

Với $b = -a\sqrt{3}$, chọn a = 1, $b = -\sqrt{3}$.

Khi đó BC: $x - \sqrt{3}y + 1 + \sqrt{3} = 0$.

nên $d(A, BC) = \frac{|-4+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}|}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.\ d(A, BC) = \frac{1}{2}.4.\frac{2\sqrt{3}-3}{2} = 2\sqrt{3} - 3$.

Bài toán 13.25: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC cân tại B có phương trình cạnh AB là 2x - y + 3 = 0. Tìm tọa độ điểm B biết rằng M(1; 0) là trung điểm của AC và $AC = \frac{2\sqrt{5}}{5}BC$.

Giải

Gọi E là hình chiếu của M lên đường thẳng AB

$$ME = d(M, BA) = \frac{|2+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Đặt MA = t thì AC = 2t, AB = BC = $t\sqrt{5}$.

Tam giác AMB vuông tại M nên BM = 2t.

Tam giác vuông AMB ta có:

$$\frac{1}{ME^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{4t^2} = \frac{5}{t^2} \Rightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Do đó AC = 5.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 5 \\ x = -3, y = -3 \end{array}\right.$$

Vậy điểm B(1; 5), B(-3; -3).

Bài toán 13.26: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại B, đường thẳng AB đi qua điểm M(-3; -1), điểm B nằm trên đường thẳng Δ: x - 4y = 0, đường thẳng AC: 2x - y - 5 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh B có hoành độ là một số nguyên.

Giải

Đường thẳng AB đi qua M nên có dạng: a(x + 3) + b(y + 1) = 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^0$.

$$\cos(AB, AC) = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a + b) = 0.$$

Với a - 3b = 0 chọn a = 3, b = 1.

Khi đó AB: 3x + y + 10 = 0.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x + y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{40}{13} \\ y = -\dfrac{10}{13} \end{cases} \text{(loại vì không nguyên)}$$

Với 3a + b = 0, chọn a = 1, b = -3. Khi đó AB: x - 3y = 0.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Do đó } B(0; 0).$$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Do đó A(3; 1).}$$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB nên BC: $3x + y = 0$. Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}. \text{ Do đó C(1; -3).}$$

Vậy A(3; 1), B(0; 0) và C(1; -3).

Bài toán 13.27: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm M(2; 6) nằm trên đường thẳng AB, điểm I(7; 3) là trung điểm của BC. Điểm đối xứng với trung điểm của AB qua I là N nằm trên đường thẳng Δ: $x + y - 7 = 0$. Viết phương trình cạnh AB.

Giải

Từ giả thiết suy ra đường trung bình CN song song với AB.

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua I thì M'(12; 0) $\in$ CN

Gọi N(n;7-n). Vì N đối xứng với trung điểm của AB qua I nên M'N $\perp$ IN.

Do đó $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{M'N} = 0 \Leftrightarrow (n - 7)(n - 12) + (4 - n)(7 - n) = 0$

$$\Leftrightarrow n^2 - 15n + 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = 7 \end{array}\right.$$

Với n = 8 thì N(8; -1).

Đường thẳng AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{IN}$ làm VTPT nên AB: $x - 4y + 22 = 0$.

Với n = 7 thì N(7; 0).

Đường thẳng AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{IN}$ làm VTPT nên AB: $y - 6 = 0$.

Bài toán 13.28: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thoi ABCD diện tích hình thoi bằng 20, biết phương trình của một đường chéo là $3x + y - 7 = 0$, điểm B(0; -3). Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Giải

Vì B không thuộc đường thẳng $3x + y - 7 = 0$ nên phương trình đường thẳng AC là $3x + y - 7 = 0$. Khi đó ta có phương trình BD là $x - 3y - 9 = 0$.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo thì ta có I(3; -2).

Do I là trung điểm BD nên D(6; -1) $\Rightarrow$ BD = $2\sqrt{10}$.

Gọi A(a; 7-3a) $\in$ AC. Vì diện tích của hình thoi bằng 20 nên

$$S_{ABD} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(A, BD).\, BD = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{1^2+3^2}}.2\sqrt{10}=10 \Leftrightarrow a^2-6a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right.$$

Vậy $A(2;1)$, $C(4;-5)$; $A(4;-5)$, $C(2;1)$.

Bài toán 13.29: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(1; -2) và AC = 2BD. Điểm M(-5; -4) thuộc đường thẳng AB, điểm N(-5; 16) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B.

Giải

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua I thì M'(7; 0) thuộc CD.

Suy ra CD: 4x + 3y - 28 = 0, AB: 4x + 3y + 32 = 0.

Gọi H là hình chiếu của I xuống AB. Ta có IH = d(I; AB) = 6.

Tam giác IAB vuông tại I có đường cao IH:

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{36}=\frac{1}{4IB^2}+\frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow IB=3\sqrt{5}.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x+3y+32=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+32=0 \\ 25x^2+190x+280=0 \end{cases}$$

Suy ra x = -2 hoặc x = $-\frac{28}{5}$. Vậy điểm B(-2; -8), B$\left(-\frac{28}{5};-\frac{16}{5}\right)$.

Bài toán 13.30: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD có $\widehat{ABC}=120^\circ$, biết các đỉnh B và D thuộc đường thẳng d_1: x - 2 = 0, A thuộc d_2: x + y - 4 = 0 và C thuộc d_3: 3x - y - 2 = 0.

Giải

Đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BD nên AC: y = m.

Gọi A(4 - m; m), $C\left(\frac{m+2}{3};m\right)$ thì giao điểm của hai đường chéo I(2; m).

Vì I là trung điểm của AC nên:

$$4-m+\frac{m+2}{3}=4 \Rightarrow m=1.$$

Suy ra A(3; 1), C(1; 1), I(2; 1)

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều.

$$IB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}.\frac{2AI}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $B\left(2;1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(2;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $B\left(2;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(2;1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài toán 13.31: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình thoi ABCD có A(5; 5), đường thẳng đi qua hai trung điểm của BC và CD có phương trình Δ: x + y + 14 = 0, điểm E(0; -4) nằm trên đường thẳng đi qua D và vuông góc với AB. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Giải

Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với Δ nên AC: x - y = 0.

Gọi I là giao điểm của AC và Δ ta có I(-7; -7)

Gọi H là giao điểm của hai đường chéo thì:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 5 = \frac{2}{3}(-7;-5) \\ y_M - 5 = \frac{2}{3}(-7;-5) \end{cases} \Rightarrow H(-3;-3).$$

Vì C đối xứng với A qua H nên C(-11; -11).

Đường thẳng BD đi qua H và song song với Δ nên BD: x + y + 6 = 0.

Do đó B(b; - 6 - b). Vì D đối xứng với B qua H nên D(-6 - b; b).

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = 0$

$$\Leftrightarrow (b - 5)(6 + b) + (-11 - b)(-4 - b) = 0 \Leftrightarrow b^2 + 8b + 7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -7 \end{array}\right.$$

Suy ra B(-1; 7) hoặc B(-7; 1). Do đó D(-7; 1) hoặc D(1; -7).

Bài toán 13.32: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình vuông ABCD có BD: x + 2y = 0, đỉnh A thuộc đường thẳng d: x - y - 2 = 0, đường thẳng CD đi qua điểm M(6; -8). Tìm tọa độ tâm I của hình vuông.

Giải

Vì I ∈ BD ⇒ I(-2m; m)

Đường thẳng AC đi qua I và vuông góc với BD nên AC: 2x - y + 5m = 0.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + 5m = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5m - 2 \\ y = -5m - 4 \end{cases}$$

Vì C đối xứng với A qua I nên C(m + 2; 7m + 4).

Ta có ABCD là hình vuông nên

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{u_{BD}}\right)\right| = \cos 45^0 \Leftrightarrow \frac{|5m+20|}{\sqrt{5}.\sqrt{50m^2+160m+160}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm I(0; 0), I(4; -2).

Bài toán 13.33: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình vuông ABCD có A(2; -4), đỉnh C thuộc đường thẳng d: $3x + y + 2 = 0$. Đường thẳng DM: $x - y - 2 = 0$ với M là trung điểm của AB. Xác định tọa độ các đỉnh B, C, D biết rằng đỉnh C có hoành độ âm.

Giải

C thuộc đường thẳng d: $3x + y + 2 = 0$ nên $C(c; -3c - 2)$, $c < 0$.

Vì M là trung điểm của AB nên

$$d(A, DM) = \frac{1}{2}d(C, DM) \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.\frac{|4c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |c| = 2.$$

Vì C có hoành độ âm nên chọn $c = -2 \Rightarrow C(-2; 4)$.

D thuộc đường thẳng DM: $x - y - 2 = 0$ nên $D(d; d - 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (d - 2)(d + 2) + (d + 2)(d - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow d^2 - 2d - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 4 \\ d = -2 \end{array}\right.$$

Do đó D(4;2) hay D(-2;-4). Vì ABCD là hình vuông nên điểm D phải thỏa mãn DA = DC nên chọn D(4; 2).

Vì ABCD hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ suy ra B(-4; -2).

Vậy B(-4; -2), C(-2; 4), D(4; 2).

Bài toán 13.34: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình các cạnh BC và CD của hình chữ nhật ABCD. Biết rằng AB = 2BC, đường thẳng AB đi qua M(-4; 3), đường thẳng BC đi qua N(0; 9), đường thẳng AD đi qua P(12; -1), đường thẳng CD đi qua Q(18; 6).

Giải

Giả sử BC: $ax + b(y - 9) = 0$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$ thì đường vuông góc

CD: $b(x - 18) - a(y - 6) = 0$.

Vì AB = 2BC nên d(P, BC) = 2d(M, CD)

$$\Leftrightarrow |12a - 10b| = 2|-22b + 3a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = -17b \\ a = 3b \end{array}\right.$$

Với $3a = -17b$, chọn $a = 17$, $b = -3$.

Ta có BC: $17x - 3y + 27 = 0$, CD: $3x + 17y - 156 = 0$.

Với $a = 3b$, chọn $a = 3$, $b = 1$.

Ta có BC: $3x + y - 9 = 0$, CD: $x - 3y = 0$.

Bài toán 13.35: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB: $x - 2y - 1 = 0$, đường chéo BD: $x - 7y + 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho biết rằng đường chéo AC qua điểm M(2; 1).

Giải

Đường thẳng AC đi qua M(2;1) có phương trình

$a(x - 2) + b(y - 1) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Ta có: $\cos(AB, AC) = \cos(AB, BD) \Leftrightarrow \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{15}{5\sqrt{2}.\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 2(a - 2b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(7a + b) = 0.$

Với $a + b = 0$, chọn $a = 1$, $b = -1$.

Phương trình đường thẳng AC: $x - y - 1 = 0$.

Từ đó ta tìm được A(1;0), B(11;5), C(6;5), D(-4;0).

Với $7a + b = 0$, chọn $a = 1$, $b = -7$.

Phương trình đường thẳng AC là AC: $x - 7y + 5 = 0$: đường thẳng này song song với BD (loại).

Bài toán 13.36: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có BC: $4x - 3y - 3 = 0$, AD: $4x - 3y - 17 = 0$, tâm I nằm trên đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$. Viết phương trình cạnh AB biết rằng BC = 3CD.

Giải

Ta có M(0;-1) thuộc BC nên: $d(BC, AD) = d(M, AD) = \dfrac{|-3+17|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{14}{5}$

Suy ra $d(I, BC) = \dfrac{1}{2}d(BC, AD) = \dfrac{7}{5}$.

Do đó $d(I, AB) = 3d(I, BC) = \dfrac{21}{5}$.

Tâm I của hình chữ nhật ABCD nằm trên đường thẳng Δ song song và cách đều hai đường thẳng BC và AD. Ta có Δ: $4x - 3y - 10 = 0$.

Khi đó tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1;-2).$$

Đường thẳng AB vuông góc với BC nên có dạng AB: $3x + 4y + m = 0$.

$$\text{Ta có } d(I; AB) = \frac{21}{5} \Leftrightarrow \frac{|3 - 8 + m|}{5} = \frac{21}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 26 \\ m = -16 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn: AB: $3x + 4y + 26 = 0$, AB: $3x + 4y - 16 = 0$.

Bài toán 13.37: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCO có phương trình đường phân giác trong góc A là Δ: $x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm B biết điểm A có hoành độ âm và diện tích của tam giác ABC bằng 3.

Giải

Gọi I là điểm đối xứng với O qua đường phân giác trong góc A.

Ta có OI: x + y = 0.

Gọi H = OI $\cap$ Δ thì H(-1; 1) nên I(-2; 2).

Điểm A nằm trên đường tròn tâm H, bán kính HO = $\sqrt{2}$

Do đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, y = 0 \\ x = 0, y = 2 \end{array}\right.$$

Vì điểm A có hoành độ âm nên chọn A(-2; 0).

Đường thẳng AB đi qua A và I: x = -2 nên B(-2; b).

Ta có ABCO là hình chữ nhật nên:

$$S_{ABC} = S_{OAB} = \frac{1}{2}.OA.AB = \frac{1}{2}.2.|b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3.$$

Do đó B(-2;3) , B(-2;-3).

Vì Δ là phân giác trong của góc A nên B và O phải nằm hai phía đối với đường thẳng Δ nên loại điểm B(-2; -3). Vậy B(-2; 3).

Bài toán 13.38: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích của hình chữ nhật bằng 6, đường chéo AC: x + 2y - 9 = 0. Điểm M(0; 4) nằm trên cạnh BC. Xác định tọa độ của các đỉnh hình chữ nhật, biết đường thẳng CD đi qua N(2; 8) và đỉnh C có tung độ là một số nguyên.

Giải

Vì C $\in$ AC: x + 2y - 9 = 0 $\Rightarrow$ C(9 - 2c; c) , c nguyên

nên $\overrightarrow{NC}$ =(7 - 2c; c - 8), $\overrightarrow{MC}$ =(9 - 2c; c - 4).

Ta có: $\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow (7 - 2c)(9 - 2c) + (c-8)(c - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 5c^2 - 44c + 95 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 5 \\ c = \dfrac{19}{5} \end{array}\right..$$

Vì C có tung độ là một số nguyên nên chọn C(-1; 5).

Từ M vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại A' thì

MA': x - y + 4 = 0 nên có A'$\left(\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right)$; $S_{A'MC} = \frac{1}{2}.MA'.MC = \frac{1}{3}$

Hai tam giác ABC và A'MC đồng dạng nên

$$\left(\frac{CB}{CM}\right)^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A'MC}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9.$$

Do đó $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CM} \Rightarrow \begin{cases} x_B + 1 = 3.1 \\ y_B - 5 = 3(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow$ B(2; 2)

Tương tự $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA'} \Rightarrow$ A(3; 3)

Và ABCD hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ D(0; 6).

Bài toán 13.39: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có B và C thuộc trục tung, đường chéo AC: 3x + 4y - 16 = 0. Xác định tọa độ đỉnh A, B, C, D biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1.

Giải

C là giao điểm của trục tung và đường thẳng AC nên C(0; 4). Vì ABCD hình chữ nhật nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC cũng bằng 1.

B và C nằm trên trục tung nên B(0; b) và có AB: y = b.

A là giao điểm của AB và AC nên $A\left(\frac{16-4b}{3}; b\right)$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{\frac{4}{3}|b-4|^2}{|b-4| + \frac{4}{3}|b-4| + \frac{5}{3}|b-4|} = \frac{1}{3}|b-4|$$

Mà r = 1 nên |b -4| = 3 do đó b = 1 hoặc b = 7.

Với b = 1 ta có A(4; 1), B(0; 1). Suy ra D(4; 4)

Với b = 7 ta có A(-4; 7), B(0; -7). Suy ra D(-4; 4).

Bài toán 13.40: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 48, đỉnh D(-3; 2), đường phân giác trong của góc A có phương trình Δ: x + y - 7 = 0. Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh A có hoành độ dương.

Giải

Gọi E là điểm đối xứng của D qua dường thẳng Δ thì E ∈ AB.

Ta có DE: x - y + 5 = 0.

Gọi I là giao điểm của DE và đường thẳng Δ thì I(1; 6). Vì E đối xứng với D qua I nên E(5; 10). Vì E ∈ Δ ⇒ A(a; 7 - a), a>0.

Tam giác ADE vuông cân tại A nên:

$$AE = \frac{DE}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a-5)^2 + (a+3)^2 = 64 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -3 \end{array}\right.$$

Vì đỉnh A có hoành dộ dương nên ta chọn a = 5 ⇒ A(5; 2).

Đường thẳng AB đi qua A(5; 2) và E(5; 10) nên AB: x = 5 ⇒ B(5; b).

Ta có $S_{ABCD} = 48 \Leftrightarrow AB.\ AD = 48 \Leftrightarrow 8\,|b - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 8 \\ b = -4 \end{array}\right.$

Nên B(5;8) hay B(5;-4).

Vì B,D nằm hai phía so với Δ nên ta chọn B(5; 8).

BÀI TẬP

Bài tập 13.1: Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết M(-1; 1); N(1; 9); P(9; 1) là các trung điểm của ba cạnh tam giác.

HD-ĐS

$x + 4y - 13 = 0$; $x - y + 2 = 0$, $x - 1 = 0$.

Bài tập 13.2: Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:

d_1: $2x + y - 4 = 0$; d_2: $5x - 2y + 3 = 0$; d_3: $mx + 3y - 2 = 0$.

HD-ĐS

$m = -12$.

Bài tập 13.3: Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \end{cases}$ và B(2; 1).

Tìm trên d điểm M sao cho đoạn BM ngắn nhất.

HD-ĐS

BM ngắn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{u}$, điểm $M\left(\frac{17}{10}; \frac{1}{10}\right)$.

Bài tập 13.4: Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng

d: $Ax + By + C = 0$ qua điểm $I(x_o; y_o)$

HD-ĐS

d': $A(x - 2x_o - \frac{C}{A}) + B(y - 2y_o) = 0$.

Bài tập 13.5: Lập phương trình các đường thẳng chứa bốn cạnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A(-1; 2) và phương trình của một đường chéo là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases}$

HD-ĐS

$x + 1 = 0$; $y = 0$; $x + 3 = 0$; $y - 2 = 0$.

Bài tập 13.6: Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(1; 1) và toạ độ trọng tâm G(1; 2). Cạnh AC và đường trung trực của nó lần lượt có phương trình là $x + y - 2 = 0$ và $-x + y - 2 = 0$. Viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh AB và BC.

HD-ĐS

AB: $x - 2y + 1 = 0$; BC: $x + 4y - 11 = 0$.

Bài tập 13.7: Cho tam giác ABC với A(-2; 0), B(2; 4), C(4; 0). Xác định toạ độ tâm Iđường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; trực tâm H và trọng tâm G của giác ABC. Chứng tỏ rằng ba điểm H, I, G thẳng hàng.

HD-ĐS

$I(1;1), H(2;2), G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ đều thuộc đường thẳng y = x.

Bài tập 13.8: Cho hình bình hành ABCD có A(4; -1) và phương trình 2 cạnh BC: x - 3y = 0, CD: 2x + 5y + 6 = 0. Tìm các đỉnh còn lại.

HD-ĐS

$B\left(\frac{9}{11};\frac{3}{11}\right)$; $D\left(\frac{17}{11};-\frac{20}{11}\right)$; $C\left(-\frac{18}{11};-\frac{6}{11}\right)$.

Bài tập 13.9: Cho đường thẳng Δ_m: (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0 và điểm A(2; 3). Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ_m là lớn nhất.

HD-ĐS

$m = \frac{11}{5}$.

14 TỔNG HỢP ĐƯỜNG TRÒN VÀ ELIP

Phương trình đường tròn

- Đường tròn tâm I (x_o ; y_o), bán kính R có phương trình: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$

- Phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ *với điều kiện* $a^2 + b^2 - c > 0$ *là phương trình đường tròn tâm I(-a ; -b), bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Tương giao và tiếp tuyến

- Tương giao của đường tròn (C) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ: d(I , Δ) > R: không có điểm chung; d(I , Δ) = R: tiếp xúc (tiếp tuyến); d(I , Δ) < R: đường thẳng cắt đường tròn theo một dây.

- Đường thẳng Δ: ax + by + c = 0 là tiếp tuyến đường tròn (C) tâm I, bán kính R khi d(I , Δ) = R.

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I tại điểm A: đường thẳng tiếp tuyến qua A, có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AI}$.

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I bán kính R đi qua điểm B: Lập phương trình đường thẳng qua B có VTPT $\vec{n} = (a ; b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. *Từ điều kiện tiếp xúc để tìm a và b.*

- Tiếp tuyến chung Δ với 2 đường tròn (C) , (C'): $\begin{cases} d(I,\Delta) = R \\ d(I,\Delta') = R' \end{cases}$

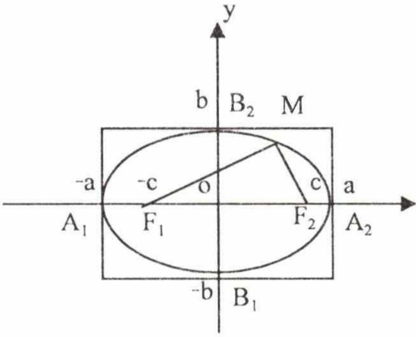
Đường elip

- Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$. Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ $(a > 0)$ được gọi là đường elip.

F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

- Cho đường thẳng Δ và điểm F không nằm trên nó, cho số $0 < e < 1$. Tập hợp những điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M tới F và tới Δ luôn bằng e là một đường elip.



- Phương trình chính tắc: (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với $a > b > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$.

Tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

Trục lớn 2a, trục nhỏ 2b

Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} < 1$

Bán kính qua tiêu điểm: $r_1 = MF_1 = a + ex$, $r_2 = MF_2 = a - ex$.

Hai đường chuẩn:

Δ_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ *ứng với tiêu điểm* $F_1(-c;\ 0)$

Δ_2: $x = \dfrac{a}{e}$ *ứng với tiêu điểm* $F_2(c;\ 0)$.

Bài toán 14.1: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 14 = 0.$$

Viết phương trình đường tròn (K) có tâm K(3; -1) và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài $AB = \sqrt{3}$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(-1; -4) có bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi H là giao điểm của KI với AB.

Ta có $IA = IB = AB = \sqrt{3}$ nên tam giác IAB đều.

Do đó đường cao $IH = \dfrac{3}{2}$ và $IK = 5IH$.

Xét trường hợp H nằm giữa K và I. Khi đó đường tròn (K) có bán kính là:

$$R' = KA = \sqrt{KH^2 + HA^2} = \sqrt{(KI - IH)^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{13}.$$

Vậy đường tròn (K): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$

Xét trường hợp I nằm giữa K và H. Khi đó đường tròn (K) có bán kính là:

$$R'' = KA = \sqrt{KH^2 + HA^2} = \sqrt{(KI + IH)^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(5 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{43}.$$

Vậy đường tròn (K): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 43$.

Bài toán 14.2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm A(-6; 5) và hai đường thẳng Δ: $3x + y + 8 = 0$, Δ': $4x - 3y - 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ'. Biết rằng tâm của đường tròn có các tọa độ là những số nguyên.

Giải

Gọi I là tâm của đường tròn cần tìm, vì I thuộc đường thẳng Δ nên I(m; -3m -8).

Theo giả thiết, đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng Δ' nên

$$IA = d(I, \Delta') \Leftrightarrow (m + 6)^2 + (3m + 13)^2 = \frac{(13m + 14)^2}{25}$$

$$\Leftrightarrow 81m^2 + 1886m + 4929 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -\dfrac{1643}{81} \end{array}\right.$$

Vì tâm của đường tròn có tọa độ nguyên nên ta nhận giá trị m = -3

Khi đó đường tròn có tâm I(-3;1), bán kính R = IA = 5.

Vậy (C): $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Bài toán 14.3: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1: $3x + y + 5 = 0$, Δ_2: $x - 2y - 3 = 0$ và đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$. Tìm điểm M thuộc (C), điểm N thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho M và N đối xứng qua đường thẳng Δ_2.

Giải

Vì M và N đối xứng qua đường thẳng Δ_2 nên phép đối xứng trục qua Δ_2 biến M thành N. Vì M $\in$ (C) nên N $\in$ (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Δ_2

Theo giả thiết N $\in \Delta_1$ nên N là giao điểm của đường tròn (C') và đường thẳng Δ_1.

Đường tròn (C) có tâm I(3; -5) và bán kính R = 5 nên đường tròn (C') có tâm I(-1; 3) và có bán kính R = 5.

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$. Ta được $N_1(-1; -2)$ và $N_2(-4; 7)$.

Từ đó suy ra điểm $M_1(-1; -2)$ và $M_1\left(\frac{22}{5}; -\frac{49}{5}\right)$.

Bài toán 14.4: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho đường tròn

$$(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Tìm các đỉnh tam giác ABC nằm trên đường tròn (C), cân tại đỉnh B có hoành độ dương, biết rằng M(0; -1) là trung điểm cạnh BC.

Giải

Đường tròn tâm I(1;-2), R = 2.

Đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{MI} = (1; -1)$ làm VTPT nên BC: x - y - 1 = 0.

Vì $B \in BC \Rightarrow B(b; b - 1)$ với b > 0.

$$IB = R \Leftrightarrow (b - 1)^2 + (b + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right..$$

Chọn b = 1 thì B(1; 0) nên C(-1; -2).

Ta có VTPT của đường thẳng AC là $\overrightarrow{IB} = (0; 2)$ và đường thẳng AC đi qua C nên AC: y + 2 = 0

Gọi E là giao điểm của AC và BI. Ta có E(1; -2)

Vì A đối xứng với C qua E nên A(3; -2).

Bài toán 14.5: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$, đỉnh B thuộc tia Ox, đường cao AH: 5x + y = 0. Tìm tọa độ A, B, C biết rằng điểm A có tung độ là một số nguyên.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1; 2), có bán kính $R = \sqrt{13}$.

Vì B thuộc tia Ox $\Rightarrow$ B(b; 0), b > 0.

Vì A thuộc AH: 5x + y = 0 nên A(a; -5a) với 5a nguyên.

$$\text{Ta có: } IA = R \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (5a + 2)^2 = 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{4}{13} \\ a = -1 \end{array}\right.$$

Vì điểm A có tung độ nguyên nên ta chọn a = -1 nên A(-1; 5)

$$\text{Ta có } IB = R \Leftrightarrow (b - 1)^2 + 4 = 13 \Leftrightarrow (b - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = -2 \end{array}\right.$$

Với b = 4 $\Rightarrow$ B(4; 0) nên đường thẳng BC: x - 5y - 4 = 0

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 5y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = 4, y = 0 \end{array}\right..$$

Chọn điểm C(-1;-1).

Với b = -2 $\Rightarrow$ B(-2; 0) nên đường thẳng BC: x - 5y + 2 = 0

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 5y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{59}{13}, y = \dfrac{17}{13} \\ x = -2, y = 0 \end{array}\right.$$. Chọn điểm $C(\frac{59}{13};\frac{17}{13})$.

Bài toán 14.6: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai điểm A(1; 0), B(3; 0). Điểm H thay đổi trên trục tung, AH và BH cắt đường tròn đường kính AB tại D và E. Chứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Đường tròn đường kính AB có phương trình (C): $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Gọi H(0, m) ∈ Oy thì phương trình AH là mx + y - m = 0.

Đường thẳng BD đi qua B và vuông góc với AH có phương trình x - my - 3 = 0.

Gọi I là giao điểm của BD và Oy thì $I\left(0;\dfrac{-3}{m}\right)$

Đường tròn đường kính HI có phương trình:

$$(C'):\ x^2 + \left(y - \frac{m^2 - 3}{2m}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 3}{2m}\right)^2.$$

Hai giao điểm D và E cùng thỏa mãn phương trình (C) và (C') nên cũng thỏa mãn hiệu 2 phương trình

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1 \text{ và } x^2 + \left(y - \frac{m^2 - 3}{2m}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 3}{2m}\right)^2 \text{ là } 4x - \frac{m^2 - 3}{m}y - 6 = 0.$$

Do đó đường thẳng DE: $4x - \dfrac{m^2 - 3}{m}y - 6 = 0$

Suy ra DE luôn đi qua điểm cố định có tọa độ $K\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

Bài toán 14.7: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm M(4; -3) và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ tâm là I. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt P, Q sao cho tam giác IPQ vuông.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính R = 2.

Đường thẳng d qua M(4; 3) có phương trình:

$a(x - 4) + b(y + 3) = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0.$

Vì IP = IQ = R nên ΔIPQ cân tại I, do đó ΔIPQ vuông tại I.

Hạ IH ⊥ PQ thì ΔIHP vuông cân tại H.

Do đó $IH = \dfrac{IP}{\sqrt{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Từ đó suy ra: $d(I, d) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2a + b - 4a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a - 7b) = 0$$

Với a = b, chọn a = 1, b = 1 thì d: $x + y - 1 = 0$

Với a = 7b, chọn a = 7, b = 1 thì d: $7x + y - 25 = 0$.

Bài toán 14.8: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho đường tròn (C):

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(5; 1) và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A và B sao cho: MA = 3MB.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(-1; -3), bán kính R = 5.

Ta có phương tích: $P_{M/(C)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MI^2 - R^2$

$\Rightarrow MA.\ MB = 27 \Rightarrow 3MB^2 = 27 \Rightarrow MB = 3 \Rightarrow AB = 6.$

Gọi H là hình chiếu của I lên AB thì

$$d(I, AB) = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = 4$$

Đường thẳng AB đi qua M(5; 1) nên có dạng

AB: $a(x - 5) + b(y - 1) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

nên: $d(I, AB) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{|6a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 5a^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow a(5a + 12b) = 0$

Với a = 0 chọn b = 1. Khi đó AB: $y - 1 = 0$.

Với $5a + 12b = 0$ chọn a = 12, b = -5. Khi đó AB: $12x - 5y - 55 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán $y - 1 = 0$, $12x - 5y - 55 = 0$.

Bài toán 14.9: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng d: $x - 2y + 2 = 0$ và đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Lập phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), có bán kính $R = \sqrt{10}$.

Gọi $\vec{n} = (a, b)$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là VTPT của đường thẳng Δ

Ta có: $\cos(\Delta; d) = \cos 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a + b)(a - 3b) = 0.$$

Với 3a - b = 0 chọn a = 1, b = 3 thì Δ: $x + 3y + m = 0$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) nên

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|1+3+m|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |m+4| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -14 \end{array}\right.$$

Do đó có hai đường thẳng Δ: x + 3y + 6 = 0 và x + 3y - 14 = 0

Với a + 3b = 0 chọn a = 3, b = -1 thì Δ: 3x - y + m = 0.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) nên:

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3-1+m|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |m+2| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = -12 \end{array}\right.$$

Do đó có hai đường thẳng Δ: 3x - y + 8 = 0 và 3x - y - 12 = 0.

Bài toán 14.10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn

(C): $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$.

Từ một điểm M bất kỳ trên đường thẳng Δ: x - y = 0, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C). Tìm M để 2 tiếp điểm A, B và điểm E(0; -1) thẳng hàng.

Giải

Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ có tâm I(-1; 3), bán kính R = 2.

Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(m; m)$.

Ta có: $MA^2 = MI^2 - IA^2 = (m + 1)^2 + (m - 3)^2 - 4 = 2m^2 - 4m + 6$

Đường tròn tâm M bán kính MA có phương trình

(C'): $(x - m)^2 + (y - m)^2 = 2m^2 - 4m + 6$

Hay $x^2 + y^2 - 2mx - 2my + 4m - 6$

Vì tọa độ 2 giao điểm A, B thỏa mãn 2 phương trình đường tròn (C) và đường tròn (C') nên cũng thỏa mãn hiệu 2 phương trình

$(1 + m)x_A + (m - 3)y_A - 2m + 6 = 0$

Tương tự $(1 + m)x_B + (m - 3)y_B - 2m + 6 = 0$

Nên phương trình đường thẳng AB là: (1 + m)x + (m - 3)y - 2m + 6 = 0

Vì $E(0; -1) \in AB \Rightarrow m = 3$. Vậy M(3; 3).

Cách khác:

Đường tròn (V) đường kính IM có tâm J($\frac{m-1}{2}; \frac{m+3}{2}$) là

$$(x - \frac{m-1}{2})^2 + (y - \frac{m+3}{2}m)^2 = (m + 1)^2 + (m - 3)^2.$$

Bài toán 14.11: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.

Tìm điểm M nằm trên đường thẳng Δ: 2x - 5y + 16 = 0 và sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) và độ dài đoạn thẳng nối hai tiếp điểm bằng $\sqrt{10}$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(0; 1), bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi A, B là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ M tới đường tròn (C) và H là trung điểm của AB thì $AH = \frac{1}{2}AB.\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Tam giác MAI vuông tại A, với đường cao AH:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{5} \Rightarrow AM = \sqrt{5} \text{ nên } MI = \frac{AM.AI}{AH} = \sqrt{10}$$

Vì $M \in \Delta: 2x - 5y + 16 = 0 \Rightarrow M(5t - 8; 2t)$.

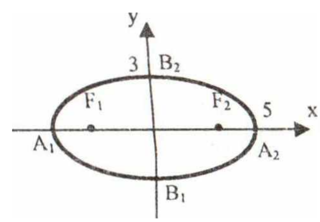
Ta có: $MI = \sqrt{10} \Leftrightarrow (5t - 8)^2 + (2t - 1)^2 = 10 \Leftrightarrow 29t^2 - 84t + 55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{55}{29} \end{array}\right.$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn bài toán M(-3; 2), $M\left(\frac{43}{29}; \frac{110}{29}\right)$.

Bài toán 14.12: Xác định độ dài các trục, toạ độ các tiêu điểm , toạ độ các đỉnh và vẽ elip (E):

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $x^2 + 3y^2 = 9$

Giải



a) Phương trình (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Do đó $a^2 = 25$; $b^2 = 9 \Rightarrow a = 5$; $b = 3$

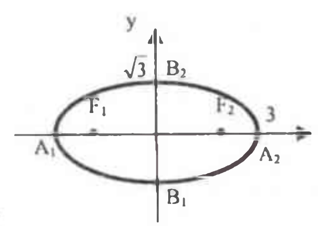
Và $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

Elip có: Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 10$

Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b = 10$

Hai tiêu điểm: F_1 (-4 ; 0) , F_2 (4 ; 0)

Bốn đỉnh: A_1 (-5 ; 0) , A_2 (5 ; 0) , B_1 (0 ; -3) , B_2 (0 ; 3)



b) (E): $x^2 + 3y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Ta có: $a^2 = 9$; $b^2 = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 6$

Nên $a = 3$; $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{6}$

Elip có:

Độ dài trục lớn: 2a = 6. Độ dài trục nhỏ: $2b = 2\sqrt{3}$

Hai tiêu điểm: F_1 ($-\sqrt{6}$; 0) , F_2 ($\sqrt{6}$; 0)

Bốn đỉnh: A_1 (-3 ; 0) , A_2 (3 ; 0) ,B_1 (0 ; $-\sqrt{3}$) , B_2 (0 ; $\sqrt{3}$).

Bài toán 14.13: Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp:

a) Độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4.

Giải

Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

a) Độ dài trục lớn $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Ta có $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae = 2\sqrt{3}$, $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) Độ dài trục bé: $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

Tiêu cự $2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 20$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài toán 14.14: Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp:

a) Có một tiêu điểm $F(\sqrt{3}; 0)$ và đi qua $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$

b) Các cạnh hình chữ nhật cơ sở có phương trình: $x = \pm 7$; $y = \pm 2$.

Giải

Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

a) Theo giả thiết thì: $c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 3 + b^2$

(E) qua M nên $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2$

Do đó: $4b^2 + 3(3 + b^2) = 4(3 + b^2)\,b^2 \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0$

Chọn $b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) Theo giả thiết thì: $a = 7$, $b = 2$

nên phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài toán 14.15: Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp:

a) Đi qua hai điểm $M(4;\ \frac{9}{5})$ và $N(3;\ \frac{12}{5})$.

b) Đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Giải

a) (E) đi qua $M(4;\ \frac{9}{5})$ và $N(3;\ \frac{12}{5})$ nên có: $\begin{cases} \frac{16}{a^2}+\frac{81}{25b^2}=1 \\ \frac{9}{a^2}+\frac{144}{25b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=9 \end{cases}$

Vậy phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

b) Vì $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in (E)$ nên $\frac{9}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1$

Ta có: $\widehat{F_1MF_2}=90° \Rightarrow OM=\frac{F_1F_2}{2}=c$

$\Rightarrow c^2=OM^2=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5 \Rightarrow a^2=b^2+c^2=b^2+5$

Do đó: $\frac{9}{5(b^2+5)}+\frac{16}{5b^2}=1 \Leftrightarrow 9b^2+16(b^2+5)=5b^2(b^2+5)$

$\Leftrightarrow b^4=16 \Leftrightarrow b^2=4$. Suy ra $a^2=9$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Bài toán 14.16: Tìm tâm sai của elip trong các trường hợp sau:

a) Các đỉnh trên trục bé nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

b) Độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục bé ($k>1$)

c) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn tới một đỉnh nằm trên trục bé bằng tiêu cự.

Giải

a) Giả sử B là một đỉnh trên trục bé. Nếu F_1BF_2 là tam giác vuông tại B thì vuông cân nên $OB=OF_2$ hay $b=c$.

Do đó: $a^2=b^2+c^2=2c^2$ hay $a=c\sqrt{2}$. Vậy tâm sai: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Vì $a=kb$ nên $c^2=a^2-b^2=a^2-\frac{a^2}{k^2}=a^2\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$. Vậy $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$

c) Giả sử hai đỉnh là A =(a ; 0) , B =(0 ; b).

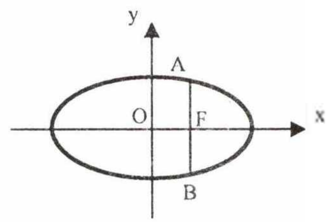
Khi đó: $AB = \sqrt{a^2+b^2} = 2c \Rightarrow a^2+b^2 = 4c^2 \Rightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4c^2 \Rightarrow 2a^2 = 5c^2$

Vậy $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Bài toán 14.17: Qua tiêu điểm của elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ vẽ đường thẳng vuông góc với trục Ox, cắt elip tại hai điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

Giải

Đường thẳng vuông góc với Ox tại tiêu điểm F = (c ; 0) có phương trình x = c.



Thay vào phương trình của elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Ta được:

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}$$

Do đó hai giao điểm là $A = \left(c; -\dfrac{b^2}{a}\right)$ và $B = \left(c; \dfrac{b^2}{a}\right)$

Vậy dây $AB = \dfrac{2b^2}{a}$.

Bài toán 14.18: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho elip (E) có độ dài trục bé bằng 6 và tâm sai bằng $\dfrac{4}{5}$. Viết phương trình đường thẳng song song với trục tung và cắt elip theo một dây AB có độ dài bằng 4.

Elip (E) có phương trình chính tắc (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$.

Vì elip có độ dài trục bé bằng 6 và tâm sai bằng $\dfrac{4}{5}$ nên (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Gọi đường thẳng song song với trục tung là d: x = m

Khi đó tung độ của A và B là nghiệm của phương trình

$$\frac{m^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25-m^2}$$

Suy ra $AB = 4 \Leftrightarrow \dfrac{6}{5}\sqrt{25-m^2} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Vậy, phương trình đường thẳng cần tìm: $x = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}, x = -\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Bài toán 14.19: Cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ có 2 tiêu điểm F_1 , F_2. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

Giải

Giả sử M = (x ; y) thuộc (E), ta có:

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow 3ex = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Thay giá trị x vào phương trình elip, ta được

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Vậy 2 điểm thoả mãn: $M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$;$M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Bài toán 14.20: Cho elip (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông.

Giải

(E): $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Ta có: $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow a = 5$, $b = 3$ và $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi M(x ; y) là điểm cần tìm, ta có:

$$\begin{cases} M \in (E) \\ \widehat{F_1MF_2} = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (E) \\ OM = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm\frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm M thoả mãn điều kiện là:

$$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right);\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right);\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right);\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right).$$

Bài toán 14.21: Một elip có độ dài trục lớn bằng 6, tâm sai bằng $\frac{1}{2}$ và khoảng cách từ một điểm M của elip đến tiêu điểm F_1 bằng 7.

a) Tìm khoảng cách từ M đến tiêu điểm F_2.

b) Viết phương trình chính tắc của elip và tìm toạ độ của M

Giải

a) Theo định nghĩa: $MF_1 + MF_2 = 2a = 12$

Mà $MF_1 = 7 \Rightarrow MF_2 = 12 - 7 = 5$

b) Ta có a = 6

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a^2 = 4c^2 = 4(a^2 - b^2) \Rightarrow 4b^2 = 3a^2 \Rightarrow b^2 = 27$

Vậy (E): $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

Ta có: $MF_1 = 7 \Leftrightarrow a + ex = 7 \Leftrightarrow 6 + \frac{1}{2}x = 7$ nên $x = 2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{6}$

Vậy có hai điểm: $M_1(2\,;\,-2\sqrt{6})$ và $M_2(2\,;\,2\sqrt{6})$.

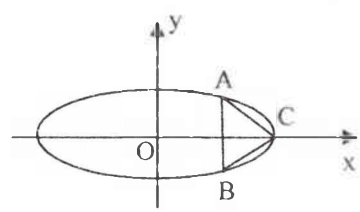
Bài toán 14.22: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). Tìm toạ dộ các điểm A, B nằm trên elip (E) sao cho tam giác ABC đều.

Giải

Tam giác ABC đều có đỉnh C thuộc Ox nên A, B dối xứng nhau qua Ox.

Gọi $A(x_0; y_0)$ và $B(x_0; -y_0)$ thuộc (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ thì $AC = AB = 2|y_0|$ nên ta có:

$$\begin{cases} y_0^2 + (2 - x_0)^2 = 4y_0^2 \\ \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{2}{7}; y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{array}\right.$$



Với $x_0 = 2$; $y_0 = 0$ khi đó $C \equiv A$ hoặc $C \equiv B$ (loại).
Vậy hai điểm A, B là:

$$A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

Bài toán 14.23: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M ở trên elip (E): $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ và tích các khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm của (E) bằng $\frac{65}{9}$. Hãy tìm toạ độ điểm M, biết điểm M ở góc phần tư thứ hai.

Giải

Ta có (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4$

Do đó: $MF_1 . MF_2 = \frac{65}{9} \Leftrightarrow (a + \frac{c}{a}x_M)(a - \frac{c}{a}x_M) = \frac{65}{9} \Leftrightarrow 9 = \frac{4}{9}x_M^2 = \frac{65}{9}$

nên $x_M^2 = 4 \Leftrightarrow x_M = -2$ (thích hợp) hoặc $x_M = 2$ (loại)

Suy ra $20 + 9y^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow y = \pm\frac{5}{3}$. Chọn $M(-2; \frac{5}{3})$.

Bài toán 14.24: Cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng Δ thay đổi có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$ luôn thoả mãn $25A^2 + 9B^2 = C^2$. Tính tích khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E) đến đường thẳng Δ.

Giải

(E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có: $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

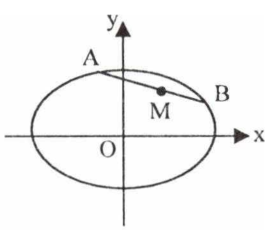
Vậy (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$. Ta có:

$$d(F_1, \Delta).\, d(F_2, \Delta) = \frac{|-4A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\frac{|4A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C^2-16A^2|}{A^2+B^2}$$

$$= \frac{|25A^2+9B^2-16A^2|}{A^2+B^2} = \frac{9(A^2+B^2)}{A^2+B^2} = 9.$$

Bài toán 14.25: Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua M(1; 1) và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải



Δ có VTCP $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

I(1; 1) là trung điểm đoạn AB:

$x_A + x_B = 2$; $y_A + y_B = 2$

Nên $x_A^2 = (2-x_B)^2$, $y_A^2 = (2-y_B)^2$

Vì A, B $\in$ (E): $\frac{x_A^2}{9}+\frac{y_A^2}{4}=1=\frac{(2-x_B)^2}{9}+\frac{(2-y_B)^2}{4}$

Suy ra $4x_B + 9y_B = 13$, tương tự: $4x_A + 9y_A = 13$

Vậy phương trình cần tìm là: $4x + 9y - 13 = 0$.

Bài toán 14.26: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$ $(a > b > 0)$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tuỳ ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng:

a) $MF_1.\, MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$ b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

Giải

$M(x; y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$MF_1 = a + ex$, $MF_2 = a - ex$

a) $MF_1 . MF_2 + OM^2 = (a + ex)(a - ex) + x^2 + y^2$

$$= a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2 = a^2 + y^2 + x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$= a^2 + y^2 + b^2\frac{x^2}{a^2} = a^2 + y^2 + b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$$

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4e^2x^2$

$4(OM^2 - b^2) = 4(x^2 + y^2 - b^2)$

$$= 4.\left[x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) - b^2\right] = 4x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 4e^2x^2$$

Từ đó suy ra $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

Bài toán 14.27: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, đường thẳng (d): $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$; d cắt (E) tại B, C. Tìm điểm $A \in (E)$ để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Giả sử $A(x_o; y_o) \in (E)$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ A đến d là $AH = \frac{|x_o - \sqrt{2}y_o + 2|}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $|x_o - \sqrt{2}y_o + 2| \le |x_o - \sqrt{2}y_o| + 2 = \left|\frac{x_o}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} + (-\frac{y_o}{2}).2\sqrt{2}\right| + 2$

$$\le \sqrt{16(\frac{x_o^2}{8} + \frac{y_o^2}{4})} + 2 \Rightarrow AH \le 2\sqrt{3}$$

Và $AH = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_o}{2\sqrt{2}} = -\frac{y_o}{2} \\ x_o - \sqrt{2}y_o \ge 0 \\ \frac{x_o^2}{8} + \frac{y_o^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 2 \\ y_o = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(2; -\sqrt{2})$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $A(2; -\sqrt{2})$.

Bài toán 14.28: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E): $x^2 + 4y^2 = 25$ và đường thẳng (Δ): $3x + 4y - 30 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên elip (E) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) là lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E)$ nên $x_0^2 + 4y_0^2 = 25$ và $d(M; \Delta) = \dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 30|}{5}$.

Ta có: $|3x_0 + 4y_0| \le \sqrt{(x_0^2 + 4y_0^2)(3^2 + 2^2)} = 5\sqrt{13}$

$\Rightarrow 30 - 5\sqrt{13} \le |3x_0 + 4y_0 - 30| \le 30 + 5\sqrt{13}$

Vậy $\max d(M ; \Delta) = 6 + \sqrt{13}$ đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{3} = y_0 < 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{15}{\sqrt{13}} \\ y_0 = -\dfrac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{15}{\sqrt{13}}; -\dfrac{5}{\sqrt{13}}\right)$$

Và $\min d(M ; \Delta) = 6 - \sqrt{13}$ đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{3} = y_0 > 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{15}{\sqrt{13}} \\ y_0 = \dfrac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{15}{\sqrt{13}}; \dfrac{5}{\sqrt{13}}\right).$$

Bài toán 14.29: Quỹ đạo một vệ tinh là đường elip nhận tâm trái đất là một tiếp điểm. Biết vệ tinh cách bề mặt trái đất ở vị trí gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm. Tính tâm sai, biết bán kính trái đất 4000 dặm.

Giải

Gọi tâm trái đất là F_2 và giả sử quỹ đạo chuyển động của vệ tinh có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Khi đó khoảng cách từ vệ tinh đến tâm trái đất là bán kính qua tiêu điểm

$$d = a - \frac{c}{a}x.$$

Vì $-a \le x \le a$ nên $a - c \le d \le a + c$.

Gọi R là bán kính trái đất, theo giả thiết thì:

$$\begin{cases} a - c = 583 + R \\ a + c = 1342 + R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 759 \\ 2a = 1925 + 2R \end{cases}.$$

Tâm sai quỹ đạo là:

$$x = \frac{c}{a} = \frac{759}{1925 + 2R} = \frac{759}{1925 + 8000} \approx 0{,}07647.$$

BÀI TẬP

Bài tập 14.1: Cho đường cong ($\mathscr{C}_m$): $x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0$, $m \neq \frac{1}{2}$.

a) Chứng minh rằng ($\mathscr{C}_m$) là đường tròn với mọi m.

b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn ($\mathscr{C}_m$) khi m thay đổi.

HD-ĐS

b) Đường thẳng $y = 1$, bỏ điểm $A(1 ; 1)$.

Bài tập 14.2: Chứng minh các đường tròn có phương trình:

$x^2 + y^2 - 2mx - 2(m - 1)y + 4m = 0$ luôn đi qua hai điểm cố định.

HD-ĐS

Hai điểm cố định $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$.

Bài tập 14.3: Chứng minh rằng có hai đường tròn trong các đường tròn

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$$

Tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

HD-ĐS

2 đường tròn ứng với $m = -1$ hay $m = \frac{3}{5}$.

Bài tập 14.4: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2 ; 3)$.

a) Chứng minh A ở ngoài đường tròn. Lập phương trình 2 tiếp tuyến kẻ từ A.

b) Tính khoảng cách từ A đến 2 tiếp tuyến trên và khoảng cách giữa hai tiếp điểm T, T'

HD-ĐS

a) 2 tiếp tuyến $x + 2 = 0$; $5x + 12y - 26 = 0$.

b) $AT = AT' = 3$; $TT' = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Bài tập 14.5: Cho hai đường tròn:

$$(C): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0,\ (C'): x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$$

a) Chứng minh hai đường tròn ngoài nhau.

b) Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

HD-ĐS

a) $II' = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} > R + R'$

b) Δ: $x = 5$; $y = 2$; $y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}x + 6 - 9\frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$.

Bài tập 14.6: Tìm tâm sai của elip trong trường hợp độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục bé ($k > 1$)

HD-ĐS

Vì a = kb nên $c^2 = a^2 - b^2 = a^2\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$.

Bài tập 14.7: Tìm giao điểm của đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1+t \end{cases}$ với elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

HD-ĐS

Hai giao điểm: A(2 ; 0) và $B\left(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Bài tập 14.8: Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm I(1 ; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của AB.

HD-ĐS

9x + 32y – 73 = 0.

Bài tập 14.9: Lập phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp:

a) $F_1(-2; 0)$ và trục lớn bằng 10. b) Qua M(1;0) và N($\frac{\sqrt{3}}{2}$;1).

HD-ĐS

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.

MỤC LỤC

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

★HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN CTC GIA LAI TRÊN TOÀN QUỐC

★HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA PHƯƠNG NAM TRÊN TOÀN QUỐC

★Website: hongantructuyen.vn

CÔNG TY CP SÁCH THIẾT BỊ GIÁO DỤC BÌNH DƯƠNG
88 Trần Bình Trọng - Phường Phú Thọ Hoà - TP. Thủ Dầu Một

HÀ NỘI: **NS TIẾN THỌ** – 828 Đường Láng
THANH HOÁ: **NS VIỆT LÝ** – 25 Lê Lợi – TP Thanh Hoá
NGHỆ AN: **NS YẾN CÔNG** – 259 Lê Duẩn – TP. Vinh
QUẢNG TRỊ: **NS GIÁO DỤC** – 283 Trần Hưng Đạo – TP Quảng Trị
HUẾ: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH HUẾ** – 76 Hàn Thuyên – TP. Huế
ĐÀ NẴNG: **NS PHƯƠNG** – 04 Lý Thái Tổ
QUẢNG NAM: **NS GIÁO KHOA** – 341 Phan Chu Trinh – Tam Kỳ
QUẢNG NGÃI: **NS TRẦN QUỐC TUẤN** – 526 Quang Trung
BÌNH ĐỊNH: **NS MINH TRÍ** – 278 Lê Hồng Phong – TP Quy Nhơn
PHÚ YÊN: **CÔNG TY SÁCH & TBTH** – 14 Trần Phú – TP Tuy Hoà
KHÁNH HOÀ: **CÔNG TY CP PHS** – 34-36 Thống Nhất – TP Nha Trang
NS NHÃ TRANG – 2202 Hùng Vương – Ba Ngòi – Cam Ranh
NINH THUẬN: **NS HÙNG VƯƠNG** – 58D Đường 21/8 – Phan Rang
BÌNH THUẬN: **CÔNG TY SÁCH & TBTH** – 70 Nguyễn Văn Trỗi – TP. Phan Thiết
BIÊN HOÀ: **NS KIM NGÂN** – 15/1 Huỳnh Văn Nghệ – TP. Biên Hòa
VŨNG TÀU: **NS ĐÔNG HẢI** – 36-38 Lý Thường Kiệt – TP Vũng Tàu
BÌNH DƯƠNG: **NS 277** – 518 Cách Mạng Tháng 8 – TX Thủ Dầu Một
BÌNH PHƯỚC: **NS HUY NAM** – QL14 Xã Tiến Thành – Đồng Xoài
TÂY NINH: **NS VĂN NGHỆ** – 295 Đường 30/4
GIA LAI: **CÔNG TY SÁCH & TBTH** – 40B Hùng Vương – TP Pleiku
DAKLAK: **CÔNG TY SÁCH & TBTH** – 19 Trường Chinh
KONTUM: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH** – 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH** – 18 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
DĂK NÔNG: **NS GIÁO DỤC GIA NGHĨA** – 60 Huỳnh Thúc Kháng – Gia Nghĩa
LONG AN: **CÔNG TY PHS** – 04 Võ Văn Tần – TP. Tân An
TIỀN GIANG: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH** – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
VĨNH LONG: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH** – 23 Lê Văn Tám – Phường I
TRÀ VINH: **CÔNG TY SÁCH & TBTH** – 3A Trưng Nữ Vương
ĐỒNG THÁP: **NS VIỆT HƯNG** – 196 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE: **CÔNG TY CP SÁCH & TBTH** – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG: **NS THANH TÂM** – 146 Quốc lộ 1A – Phú Lộc

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC

Mời bạn tìm đọc:

Bộ sách được biên soạn với mục đích giúp các em học sinh lớp 12 củng cố kiến thức và phương pháp giải toán từ căn bản đến nâng cao, kết hợp ôn tập Toán lớp 10 và 11, luyện tập thêm Toán khó, Toán tổng hợp, các em rèn luyện kĩ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán trong kiểm tra và đạt được điểm cao trong kì thi THPT Quốc gia.

ISBN: 978-604-62-3086-1
8 935092 768403
Giá: 55.000đ