Bài toán 6: Cho hai đường thẳng: $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ và $d': \begin{cases} x = 7+3t \\ y = 2+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng đó.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1+2s \\ y = -2-3s \\ z = 5+4s \end{cases}$

Để tìm giao điểm của hai đường thẳng ta giải hệ: $\begin{cases} 1+2s = 7+3t \\ -2-3s = 2+2t \\ 5+4s = -1-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = -2 \end{cases}$.

Suy ra có giao điểm A(1; -2; 5) nên d và d' cắt nhau.

b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) chứa d và d' là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}'] = (1; 18; 13)$.

Mặt phẳng (P) chứa d nên đi qua M(1;-2;5).

Vậy phương trình mặt phẳng chứa d và d' là:

$$1(x - 1) + 18(y + 2) + 13(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 18y + 13z - 30 = 0.$$

Bài toán 7: Cho điểm A(1; -1; 1) và hai đường thẳng:

$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -1-2t \\ z = 3t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = t' \\ y = 1+2t' \\ z = 4+5t' \end{cases}.$

Chứng minh (d_1), (d_2) và A cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải

(d_2) qua B(0; 1; 4) và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 5)$

Mp(A, d_2) qua B và có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{AB}] = (-4; -8; -4)$ hay (1; 2; -1) nên có phương trình:

$$1(x - 1) + 2(y + 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$$

Ta có (d_1) qua M(0; -1; 0) và N(-1; 1; 3)

Vì M, N thuộc mp(A, d_2) nên d_1 thuộc mp(A, d_2)

Vậy A, (d_1), (d_2) cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài toán 8: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$.

Gọi d' là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(α): 3y - z - 7 = 0 và (α'): 3x + 3y - 2z - 17 = 0.

a) Chứng minh d, d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d' và vuông góc với d. Tìm toạ độ giao điểm H của d và (P).

Giải

a) Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ = (0; 3; -1) và $\vec{n}'$ = (3; 3; -2) nên d' có một vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{u_{d'}} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-3; -3; -3) \text{ hay } (1; 1; 3)$$

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d là $\overrightarrow{u_d}$ = (2; 1; -1)

Ta có $\overrightarrow{u_d} . \overrightarrow{u_{d'}} = 0$ nên d $\perp$ d'.

Hệ $\begin{cases} 3(-1+t)-(2-t)-7=0 \\ 3(1+2t)+3(-1+t)-2(2-t)-17=0 \end{cases}$ vô nghiệm nên d và d' không có điểm chung. Vậy chúng chéo nhau.

b) Cho y = 0 thì z = -7, x = 1, ta có A(1; 0; -7) $\in$ d'. Vì d $\perp$ d' nên mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d sẽ đi qua d'. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x - 1) + (y - 0) - (z + 7) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0.$$

Toạ độ giao diểm H(x; y; z) của d và (P) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \\ 2x+y-z-9=0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow H\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Bài toán 9: Xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

a) d: $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, (P): 3x + 5y - z - 2 = 0.

b) d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, (P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0.

c) d: $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$, (P): x + 2y - 4z + 1 = 0.

Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (4; 3; 1).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (3; 5; -1).

Ta có $\vec{u}, \vec{n}$ = 12 + 15 - 1 = 26 $\neq$ 0. Vậy đường thẳng d cắt (P).

b) d qua A(-1; 3; 0) và có VTCP $\vec{u} = (2; 4; 3)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -3; 2)$.

Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 6 - 12 + 6 = 0$ nên hoặc d song song (P) hoặc d thuộc (P).

Mà $A \notin (P)$ nên d // (P).

c) d qua M(13; 1; 4) và có VTCP $\vec{u} = (8; 2; 3)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -4)$.

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 0$ mà $M \in (P)$ nên đường thẳng d nằm trên (P).

Bài toán 10: Chứng minh đường thẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 5t \\ y = \dfrac{7}{5} + 9t \\ z = \dfrac{2}{5} + t \end{cases}$ thuộc mặt phẳng (P): $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

b) d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ cắt mặt phẳng (P): $4x - y + 5z - 1 = 0$.

Giải

a) Đường thẳng d qua $A(0; -\frac{7}{5}; \frac{2}{5})$ và có VTCP $\vec{u} = (5; 9; 1)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -3; 7)$.

Ta có: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ và $A \in (P)$ nên d nằm trên (P).

b) Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 4)$,

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -1; 5)$.

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 8 - 3 + 20 = 25 \neq 0$ nên d cắt mp(P).

Bài toán 11: Tìm k để đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2kx + y - z + 1 = 0$, (Q): $x - ky + z - 1 = 0$ nằm trong mặt phẳng (Oyz).

Giải

Giao tuyến d có VTCP: $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -k & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} \right) = (1-k; -1-2k; -2k^2-1)$

Mp(Oyz) có VTPT $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Để d nằm trong mặt phẳng (Oyz) thì cần có:

$\vec{i}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (1 - k)1 + (-1 - 2k).0 + (-2k^2 - 1).0 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Thay k = 1 vào phương trình của 2 mặt phẳng chứa d:

(P): $2x + y - z + 1 = 0$, (Q): $x - y + z - 1 = 0$.

Ta có điểm M(0; 0; 1) thuộc d và cùng thuộc mặt phẳng (Oyz) nên thoả mãn.

Vậy để d nằm trong mặt phẳng (Oyz) thì cần và đủ là: k = 1.

Bài toán 12: Trong không gian có hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 20 = 0$.

Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$, phương trình AB: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

D thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow$ D(2-t; 1+t; 2t) $\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1-t; t; 2t)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; 1; 1)$

Vì C không thuộc mặt phẳng (P) nên:

$$CD \,//\, (P) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 1.(1 - t) + 1.t + 1.2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $D(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1)$.

Bài toán 13: Chứng minh các mặt phẳng

$$(P_m): (2 + m)x + (1 + m)y + (1 + m)z + m - 1 = 0$$

Luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Giải

(P_m): $2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0$.

Mặt phẳng (P_m) đi qua các điểm M(x; y; z) có toạ độ không phụ thuộc m khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Cho y = 0 thì x = 2, z = -3: A(2; 0; -3)

Cho z = 0 thì x = 2, y = -3: B(2; -3; 0).

Vậy các mặt phẳng (P_m) đi qua đường thẳng cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $2x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ tức là đường thẳng AB cố định.

Bài toán 14: Chứng minh các đường thẳng d_k là giao tuyến của 2 mặt phẳng:

$x + kz - k = 0$, $(1 - k)x - ky = 0$, $k \neq 0$ luôn nằm trên mặt phẳng cố định.

Giải

Giao tuyến d_k chứa các điểm M(x; y; z) có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1-k)x - ky = 0 \end{cases}; k \neq 0.$$

Suy ra: $x - (1 - k)x + kz - k + ky = 0$.

$\Rightarrow k(x + y + z - 1) = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$, vì $k \neq 0$.

Vậy các đường thẳng d_k luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố định

(P): $x + y + z - 1 = 0$.

Bài toán 15: Trong không gian Oxyz cho tập hợp các mặt phẳng (α_m) có phương trình là: $mx - 2(m - 1)y + (m + 1)z - 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 - t \end{cases}.$$

a) Chứng tỏ rằng các mặt phẳng (α_m) đi qua một đường thẳng cố định Δ.

b) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

Giải

a) Phương trình các mặt phẳng (α_m) có thể viết thành:

$$2y + z - 1 + m(x - 2y + z) = 0$$

Đăng thức này đúng với mọi m nên ta suy ra: $\begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình này xác định một dường thẳng Δ cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng $2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z = 0$.

Δ có VTCP $\vec{n} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (4; 1; -2)$ và đi qua B(-1; 0; 1).

Vậy các mặt phẳng (α_m) đi qua đường thẳng cố định Δ: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

b) d qua A(1; 0; -2) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$ nên d và Δ chéo nhau.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài tập 1: Lập phương trình tham số của đường thẳng:

a) đi qua A(2;1;-3) và B(3;-1;2).

b) đi qua M(2;1;9) và vuông góc với mp(P): $3x - 4y - z + 9 = 0$

HD-ĐS

a) Kết quả $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$ b) Kết quả $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 9 - t \end{cases}$

Bài tập 2: Lập phương trình chính tắc của đường thẳng:

a) đi qua gốc O và M(3;-1;2).

b) đi qua A(-2;3;1) và vuông góc với mp(P): 3x + 7y – 2z + 4 =0

HD-ĐS

a) Kết quả $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ b) Kết quả $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-1}{-2}$

Bài tập 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 3 điểm A(0; 1; 1), B(1; 0; 0), C(1; 2; -1).

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A, B, C.

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua D(0; 1; 0) biết rằng giao tuyến của (α) và (β) là d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

HD-ĐS

a) Kết quả 3x + y + 2z - 3 = 0 b) Kết quả 2x + y + z - 1 = 0

Bài tập 4: Lập phương trình đường thẳng:

a) đi qua điểm H(1; 2; -1), cắt đường thẳng d: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và song song với mặt phẳng (α): x + y - z + 3 = 0.

b) đi qua trọng tâm của tam giác OAB, vuông góc với (OAB), với. A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4).

HD-ĐS

a) Kết quả $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ b) Kết quả $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$

Bài tập 5: Cho hai đường thẳng (Δ_1): $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và (Δ_2): $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

Chứng minh rằng (Δ_1) và (Δ_2) cùng nằm trên một mặt phẳng và hãy lập phương trình mặt phẳng đó.

HD-ĐS

6x + 9y + z + 8 = 0

Bài tập 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

(d_1): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và (d_2): $\begin{cases} x = -t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

a) Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc nhau.

b) Lập phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

HD-ĐS

b) Kết quả (α): $x + 2y - z - 12 = 0$ và (β): $2x + y + 4z = 0$.

Bài tập 7: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và 2 đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}\ ;\ d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d_1 và d_2.

b) Tìm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng.

HD-ĐS

a) Kết quả $x + 3y + 5z - 13 = 0$

b) Kết quả M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -4 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = -3 - 6t' \\ y = t' \\ z = 6 + 2t' \end{cases}$

a) Chứng minh d và d' chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

HD-ĐS

b) Kết quả $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{2}$

O CHỦ ĐỀ XIII

TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

DẠNG TOÁN 1. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) qua M_0 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

Có 3 vị trí tương đối:

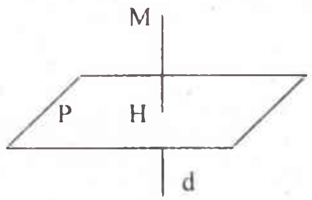
– Cắt nhau: $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$

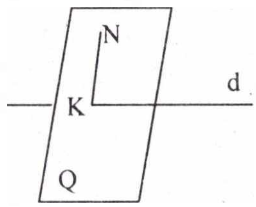
– Song song: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \notin (P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \in (P)$

Hình chiếu của một điểm lên mặt phẳng:

Hình chiếu điểm M trên mặt phẳng (P): Lập phương trình tham số đường thẳng d qua M, vuông góc với (P). Hình chiếu H là giao điểm của d với (P). Từ đó suy ra điểm M' đối xứng của M qua (P) nhờ H là trung điểm MM'.





Hình chiếu của một điểm lên đường thẳng

Hình chiếu điểm N trên đường thẳng d: Lập phương trình mặt phẳng (Q) qua N, vuông góc với d. Hình chiếu K là giao điểm của d với (Q). Ta có thể dùng toạ độ K thuộc d theo tham số t rồi tìm t nhờ điều kiện: $\overline{NK}.\overline{u_d} = 0$. Từ đó suy ra điểm N' đối xứng của N qua đường thẳng d nhờ H là trung điểm NN'.

Chú ý:

Cho mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi:

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

Hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nằm cùng phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi:

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0.$$

Bài toán 1: Cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 3y + 5z - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của mặt phẳng đó với các trục Ox, Oy, Oz.

b) Tính thể tích tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và 3 mặt phẳng toạ độ.

Giải

a) Cho $y = z = 0$ thì giao với trục Ox tại $A(\frac{1}{2}; 0; 0)$

Cho $x = z = 0$ thì giao với trục Oy tại $B(0; -\frac{1}{3}; 0)$

Cho $x = y = 0$ thì giao với trục Oz tại $C(0; 0; \frac{1}{5})$

b) Tứ diện cần tìm OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên thể tích

$$V = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\left|\frac{1}{2}\right|.\left|-\frac{1}{3}\right|.\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{180}.$$

Bài toán 2: Cho ba mặt phẳng (P): $x + y + z - 6 = 0$, (Q): $mx - 2y + z + m - 1 = 0$ và (R): $mx + (m - 1)y - z + 2m = 0$.

a) Xác định giá trị m để ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau.

b) Tìm giao điểm chung của cả ba mặt phẳng.

Giải

a) Vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là:

$\overrightarrow{n_P} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{n_Q} = (m; -2; 1)$, $\overrightarrow{n_R} = (m; m - 1; -1)$

Điều kiện ba mặt phẳng đôi một vuông góc

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m + 2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \\ (m-1)^2 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

b) Gọi I(x; y; z) là giao điểm chung của cả ba mặt phẳng. Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow I(1;\ 2;\ 3) \\ z = 3 \end{cases}$$

Bài toán 3: Tìm giao điểm của đường thẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$, với mặt phẳng (P): 2x - y + 5z - 4 = 0.

b) d: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$, với mặt phẳng (α): 2x + y + z - 8 = 0.

Giải

a) Giao điểm M thuộc d nên M(1 + 2t; 2 - t; 3t) và thuộc (P) nên:

$2(1 + 2t) - (2 - t) + 15t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{5}$.

Thay $t = \frac{1}{5}$ vào ta được $M\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

b) Đường thẳng d: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$ có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$.

Giao điểm A thuộc d nên A(2 + 2t; -1 + 3t; 1 + 5t).

Thế x, y, z vào phương trình của (α), ta được:

$2(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (1 + 5t) - 8 = 0$

Suy ra $t = \frac{1}{3}$ và được giao điểm là $A\left(\frac{8}{3}; 0; \frac{8}{3}\right)$.

Bài toán 4: Tìm giao điểm của đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng:

a) x + y - 2z - 11 = 0, 3x - y + z - 6 = 0 với (P): x + 2y - z - 15 = 0.

b) 2x - y + z - 6 = 0, x + 4y - 2z - 8 = 0 với các mặt toạ độ.

Giải

a) Mp(xOy): z = 0.

Toạ độ giao điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = 0 \end{cases}$.

Vậy $A\left(\frac{32}{9}; \frac{10}{9}; 0\right)$.

Giải tương tự thì giao điểm với mp(yOz) là B(4; 0; -2) và với mp(xOz) là C(0; 10; 16).

b) Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2z - 11 = 0 \\ 3x - y + z - 6 = 0 \\ z + 2y - z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(4; 5; -1).$$

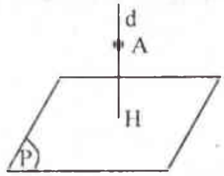
Bài toán 5: Tìm hình chiếu của điểm A(1; 4; 2) lên mặt phẳng: (P): x + 2y + z - 1 = 0.

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua Δ và vuông góc với (P), H là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Ta có $\vec{n}$ = (1; 2; 1) là một vectơ pháp tuyến của (P) nên $\vec{n}$ là một vectơ chỉ phương của d.

Suy ra, d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-2}{1}$



Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-2}{1} \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x = -\dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{1}{3}$. Vậy: $H(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3})$

Bài toán 6: Cho bốn điểm A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1). Tìm hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC).

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}$ = (-1; 2; 3), $\overrightarrow{AC}$ = (-3; 4; 1) nên mp(ABC) có VTPT

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ = (14; 10; 2) hay (7; 5; 1).

(P): 7(x - 4 + 5(y - 1) + 1(z - 4) = 0 hay 7x + 5y + z - 37 = 0.

Đường thẳng d qua A, vuông góc với (ABC) có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}. \text{ Thế x, y, z vào (P) thì } t = \frac{8}{25}$$

Vậy hình chiếu có toạ độ $H\left(\dfrac{81}{25}; \dfrac{13}{5}; \dfrac{33}{25}\right)$.

Bài toán 7: Tìm điểm đối xứng của A(1; 2; -3) qua mặt phẳng (P): 2x + 2y - z + 9 = 0.

Giải

Đường thẳng d đi qua A(1; 2; -3) có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{u_P}$ = (2; 2; -1)

Nên có phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

Hình chiếu H của A lên (P) thuộc d nên toạ độ của H có dạng (1+2t; 2+2t; -3-t).

$H \in (P)$ nên 2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 9 = 0.

Suy ra: t = -2 nên H(-3; -2; -1).

Gọi A' đối xứng với A qua (P) thì H là trung điểm của AA'.

Vậy A'(-7; -6; 1).

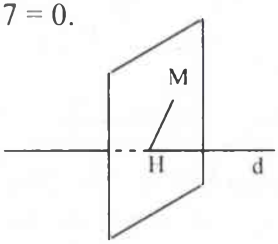
Bài toán 8: Tìm hình chiếu của M(2; -1; 1) lên đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$.

Giải

Hình chiếu H của M lên d là giao điểm của d với mặt phẳng (P) qua M, vuông góc đường thẳng d:

2(x - 2) - 1(y + 1) + 2(z - 1) = 0 hay 2x - y + 2z - 7 = 0.

H thuộc d nên H(1+2t; -1-t; 2t).



Thế toạ độ vào mp(P) thì được $t = \frac{4}{9}$ nên

$H\left(\frac{17}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{8}{9}\right)$

Cách khác: Dùng điều kiện $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$ để tìm t.

Bài toán 9: Tìm điểm đối xứng của A(-2; 3; -4) qua đường thẳng d: $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$.

Giải

Đường thẳng d qua M(-2; 3; -4) có VTCP $\vec{u} = (-3; -2; 1)$

Hạ $AH \perp d$ thì $H(-2-3t; -2-2t; t) \in d$.

Ta có $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = -1$ nên H(1; 0; -1)

Điểm B đối xứng của A qua d nên A là trung điểm của AB.

$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_H = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = 4 \\ y_B = 2y_H - y_A = -3 \\ z_B = 2y_H - z_A = 2 \end{cases}$. Vậy điểm đối xứng là B(4; -3; 2).

Bài toán 10: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P): $2x + y - z = 0$, hai đường thẳng d: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-3}$, Δ: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

Tìm tọa độ điểm M nằm trên (P) và điểm N trên d sao cho M, N đối xứng với nhau qua đường thẳng Δ.

Giải

Vì N nằm trên đường thẳng d nên N(4+t; t; -3t).

Gọi I là trung điểm của MN thì I nằm trên đường thẳng Δ.

Do đó I(3+m; 2m; -1+2m).

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2; 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow (-1 + m - t) + 2(2m - t) + 2(-1 + 2m + 3t) = 0$

$$\Leftrightarrow -3 + 9m + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 1 - 3m$$

Suy ra N(5-3m; 1-3m; -3+9m)

Vì M đối xứng với N qua I nên M(1 + 5m; -1 + 7m; 1 - 5m)

Ta có $M \in (P) \Rightarrow 2(1 + 5m) + (-1 + 7m) - (1 - 5m) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Suy ra M(1; -1; 1), N(5; 1; -3).

DẠNG TOÁN 2. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

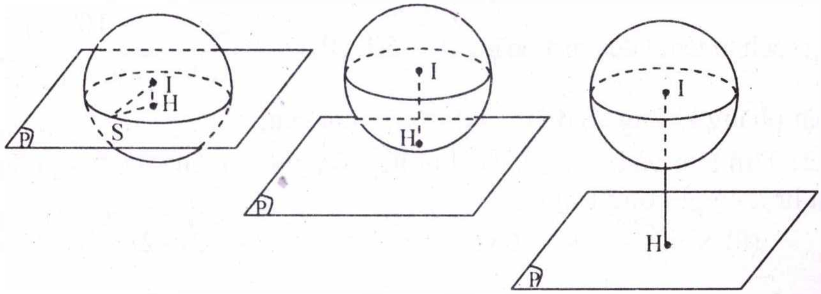
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và mp(P). Gọi IH = d là khoảng cách từ tâm I đến (P) thì:

- Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến. Đặc biệt, khi d = 0 thì mp(P) đi qua tâm I của mặt cầu, giao tuyến là đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính R.

- Nếu d = R: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu.

- Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.



Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và đường thẳng Δ

Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ và d = IH là khoảng cách từ O tới Δ.

- Nếu d < R: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B.

Độ dài dây $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

- Nếu d = R: đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu.

- Nếu d > R: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

Chú ý:

1) Đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng có tâm H là hình chiếu của tâm mặt cầu I lên mp(P), bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

2) Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *đến mặt phẳng:*

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ *là* $d(M_0, P) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) trong các trường hợp dưới đây:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ và $x + 2y + z - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ và $x + 2y + 2z = 0$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$ và $x + y - z - 10 = 0$.

Giải

a) Mặt cầu có tâm I(3; -1; -2) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P): $d(I, (P)) = \dfrac{|3 - 2 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} < R$

Vậy mặt phẳng cắt mặt cầu.

b) Mặt cầu có tâm I(3; -1; 1) và R = 1.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P): $d(I, (P)) = \dfrac{|3 - 2 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1 = R$

Vậy mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

c) Mặt cầu có tâm I(-2; -4; 1), $R = \sqrt{11}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P): $d(I, (P)) = \dfrac{|-2 - 4 - 1 - 10|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{17}{\sqrt{3}} > R$

Vậy mặt phẳng không có điểm chung với mặt cầu.

Bài toán 2: Tìm tâm và bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt phẳng và mặt cầu lần lượt có phương trình:

$$(P): x + 2y - 2z + 1 = 0 \text{ và } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(3; -1; 1), bán kính R = 1.

Tâm H là hình chiếu của I lên (P).

Phương trình của đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng

$$x + 2y - 2z + 1 = 0 \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

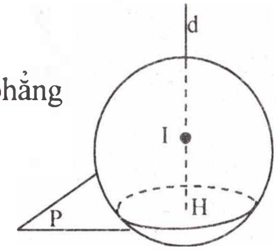
Từ đó ta suy ra giao điểm H của d và mặt phẳng ứng với t = 0 là H(3; -1; 1).

Vì điểm H trùng với I nên (P) là mặt kính cắt theo đường tròn lớn nên bán kính đường tròn giao tuyến r = R = 1.

Bài toán 3: Tìm tâm và bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt phẳng và mặt cầu lần lượt có phương trình:

$$(P): 2x + 2y + z + 1 = 0 \text{ và } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$$

Giải



Mặt cầu (S) có tâm I(6; -2; 3), R = 5.

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng

$$2x + 2y + z + 1 = 0 \text{ là: } \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Từ đó suy ra giao điểm H của d và mặt phẳng ứng với $t = -\frac{4}{3}$ là tâm đường tròn giao tuyến $H\left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Bán kính $r^2 = R^2 - IH^2 = 25 - 16 = 9$. Vậy r = 3.

Bài toán 4: Xét vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng:

$$(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 16, (d): \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 4t \\ y = \frac{3}{2} - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(2;3;-1), bán kính R = 4.

Đường thẳng d đi qua $M_0(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; -2; 1)$.

Ta có $d(I, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{\dfrac{205}{14}}$.

Vì d(I;d) < R nên đường thẳng (d) cắt mặt cầu.

Bài toán 5: Xét vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z - 25 = 0, (d): \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(4;-3;2), bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Đường thẳng d đi qua M_0(-2; -2;0) và có VTCP $\vec{u} = (3;2;-1)$.

Ta có $d(I, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3\sqrt{3}$.

Vì d(I;d) = R nên đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu.

Bài toán 6: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}.$$

Biện luận theo m số điểm chung của (S) và (d).

Giải

Điểm M(x; y, z) thuộc (d) nên x = t + 2, y = mt + 1, z = -2t.

Thay vào (S) được:

$(t + 2)^2 + (mt + 1)^2 + 4t^2 - 2(t + 2) + 6(mt + 1) + 8t + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (5 + m^2)t^2 + 2(5 + 4m)t + 20 = 0.$

Ta có $\Delta' = (5 + 4m)^2 - 20(5 + m^2) = -4m^2 + 40m - 75$.

Biện luận:

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$: (d) cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$ hoặc $m = \frac{15}{2}$: (d) tiếp xúc với (S) tại một điểm.

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$ hoặc $m > \frac{15}{2}$: (d) và (S) không có điểm chung.

Cách khác:

Tính khoảng cách từ tâm I(-1;3;-2) đến đường thẳng d rồi so sánh biện luận.

Bài toán 7: Trong không gian Oxyz, xét mặt phẳng

$$(\alpha_m): 3mx + 5\sqrt{1-m^2}\,y + 4mz + 20 = 0,\ m \in [-1; 1]$$

Chứng minh rằng với mọi $m \in [-1; 1]$ thì (α_m) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Giải

Ta có $d(O; (\alpha_m)) = \dfrac{20}{\sqrt{9m^2 + 25(1-m^2) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4$

Suy ra khi m thay đổi, các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O và bán kính bằng 4.

DẠNG TOÁN 3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

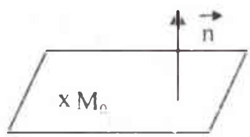
Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (A, B, C),\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

có phương trình:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$



và biến đổi thành dạng phương trình tổng quát:

$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

Chú ý:

1) Mặt phẳng chứa 2 đường thẳng cắt nhau:

Nếu (P) = mp(d,d') thì chọn VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$

2) Mặt phẳng chứa 2 đường thẳng song song:

Nếu (P) = mp(d,d') và d qua A, d' qua B thì chọn VTPT

$\vec{n} = [\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}]$.

Bài toán 1: Cho tứ diện ABCD với A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song mp(BCD).

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với CD.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 0; 2)$

mp(BCD) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-12; -10; -6)$ hay $(6; 5; -3)$.

Mặt phẳng qua A và song song với mp(BCD) có phương trình

$6(x - 5) + 5(y - 1) + 3(z - 3) = 0$ hay $6x + 5y + 3z - 44 = 0$.

Vì A không thuộc mp(BCD) nên đó là mặt phẳng cần tìm.

b) $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$.

Mặt phẳng đi qua A, B song song với CD có vectơ pháp tuyến là

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (10; 9; 5)$.

Vậy phương trình của nó là:

$10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0$ hay $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

Vì C không thuộc mp nên đó là mặt phẳng cần tìm.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua hai điểm A(0; 1; 1), B(-1; 0; 2)

và vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$.

b) Đi qua hai điểm M(1; 2; -2) và N(2; 0; -2)

và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng toạ độ.

Giải

a) Mặt phẳng (P) cần tìm phải vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) vuông góc với $\vec{n}' = (1; -1; 1)$ và mp(P) đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$.

Chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}'] = (0; 2; 2)$.

Phương trình của (P) là: $2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$ hay $y + z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng (α) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oxy nên song song hoặc chứa Oz $\Rightarrow$ (α) có dạng $Ax + By + D = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Mp(α) đi qua M(1; 2; -2) và N(2; 0; -2) ta có hệ:

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ 2A + D = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A = 2B \\ D = -4B \end{cases}$$

Lấy B = 1, thì (β) có phương trình $2x + y - 4 = 0$.

Tương tự, mặt phẳng (P) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oyz có phương trình $z + 2 = 0$.

Mặt phẳng (γ) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Ozx có phương trình: $z + 2 = 0$.

Bài toán 3: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua điểm M(2; -1; 2), song song với trục Oy và $2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) Đi qua điểm M(3; -1; -5) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng

$3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Giải

a) Trục Oy có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$

Mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 3)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}'$ vuông góc với $\vec{j}$, $\vec{n}$ nên chọn

$$\vec{n'} = [\vec{j};\vec{n}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3; 0; -2)$$

Từ đó có phương trình: $3x - 2z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$

Mặt phẳng $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ nên chọn

$\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 1; -2)$.

Phương trình mặt phẳng: $2x + y - 2z + D = 0$, mặt phẳng qua $M(3; -1; -5)$ nên $D = -15$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm: $2x + y - 2z - 15 = 0$.

Bài toán 4: Trong không gian Oxyz, cho phương trình hai mặt phẳng:

$$(\alpha): x + y + z - 3 = 0, (\beta): 2x - y - 2z + 6 = 0.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) và thoả mãn thêm một trong các điều kiện sau:

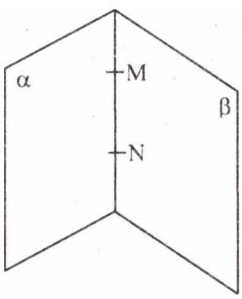
a) Song song với Oz

b) Vuông góc với mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

Giải

Các điểm chung của 2 mặt phẳng (α), (β) có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$



Cho $x = 0$ thì $\begin{cases} y + z = 3 \\ -y - 2z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Cho $z = 0$ thì $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

Do đó hai điểm $M(-1; 4; 0)$, $N(0; 0; 3)$ thuộc mặt phẳng (P).

a) $\overline{MN} = (1; -4; 3)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vectơ đơn vị của Oz. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $[\overline{MN}, \vec{k}] = (-4; -1; 0)$

Vậy (P): $4x + y = 0$.

b) $\overline{MN} = (1; -4; 3)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α): $2x - z + 7 = 0$ là $\vec{n}_\alpha = (2; 0; -1)$ suy ra $[\overline{MN}, \vec{n}_\alpha] = (4; 7; 8)$ là vectơ pháp tuyến (P) cần tìm.

Từ đó suy ra (P): $4x + 7y + 8z - 24 = 0$.

Bài toán 5: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng

$4x + 3y - 12z + 1 = 0$

và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

Giải

Mặt cầu đã cho có tâm là I(1; 2; 3) và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình: $4x + 3y - 12z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4+6-36+D|}{\sqrt{16+9+144}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |-26 + D| = 52 \Leftrightarrow -26 + D = \pm 52$$

$\Leftrightarrow D = 78$ hoặc $D = -26$ (chọn).

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu là:

$4x + 3y - 12z + 78 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Bài toán 6: Viết phương trình mp(P) đi qua điểm A(2; 3; 1)

và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

Giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(-2; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và d_1 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1; 9; -5)$.

Vậy mp(P) có phương trình:

$-(x + 2) + 9(y - 2) - 5z = 0$ hay $x - 9y + 5z + 20 = 0$.

Bài toán 7: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases} \text{ và song song với } d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{1}.$$

Giải

d_1 qua $A(0; -\frac{3}{2}; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; 7; 2)$

d_2 qua B(1; 3; -5) và có VTCP $\vec{v} = (1; -2; 1)$

Do đó mp(P) có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (11; -2; -15)$ và qua A nên có phương trình:

$11(x - 0) - 2(y + \frac{3}{2}) - 15(z - 0) = 0$ hay $11x - 2y - 15z - 3 = 0$.

Vì B không thuộc (P) nên đó là mặt phẳng cần tìm.

Bài toán 8: Viết phương trình mặt phẳng qua điểm A(3; -2; 1) và vuông góc với đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng.

(P): $3x + 2y - 2z + 8 = 0$, (Q): $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (P), (Q) có VTPT $\vec{n} = (3; 2; -2)$, $\vec{n}' = (2; -1; 3)$ nên giao tuyến d có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (4; -13; -7)$.

Đó cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm.

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm qua A, vuông góc với d.

$4(x - 3) - 13(y + 2) - 7(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 13y - 7z - 31 = 0.$

Bài toán 9: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x + 2y + 5z + 6 = 0$,

(Q): $x - y - 3z + 3 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng

(R): $3x + 2y + z - 5 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (P), (Q) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; 5)$, $\vec{n}' = (1; -1; -3)$ nên giao tuyến d có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-1; 8; -3)$

Giao tuyến d chứa các điểm có toạ độ thoả mãn:

$\begin{cases} x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x - y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$. Cho $z = 0 \Rightarrow x = -4, y = -1$.

Do đó mặt phẳng cần tìm qua M(-4; -1; 0) và có VTPT

$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n_R}] = (14; -8; -26)$ hay $(7; -4; -13)$ nên có phương trình:

$7(x + 4) - 4(y + 1) - 13(z - 0)$ hay $7x - 4y - 13z + 24 = 0$.

Bài toán 10: Trong không gian Oxyz cho điểm E(1; 1; 1) và mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - 2z - 6 = 0$.

a) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua E và song song với (α).

b) Lập phương trình mặt phẳng (P') đối xứng của mặt phẳng (P) qua mặt phẳng (α).

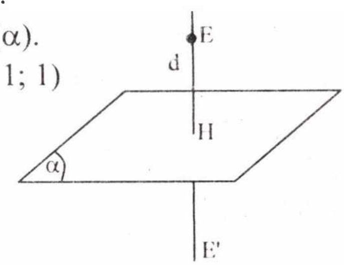
Giải

a) Ta nhận thấy điểm E(1;1;1) không thuộc (α)

Phương trình của mặt phẳng (P) qua E, song song (α) là:

$1(x - 1) + 1(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z = 0.$

b) Ta tìm E' là điểm đối xứng của E qua mặt phẳng (α).



Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua E(1; 1; 1) và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Toạ độ giao điểm H của d và (α) ứng với giá trị của t thoả phương trình:

$(1 + t) + (1 + t) - 2(1 - 2t) - 6 = 0.$

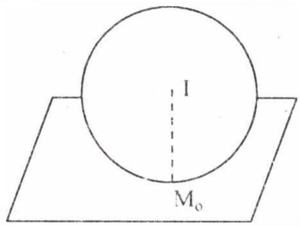
$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 2; -1) \Rightarrow$ điểm E'(3; 3; - 3).

Từ đó suy ra phương trình của mặt phẳng (P') là mặt phẳng qua E', song song (α) nên (P'): $x + y - 2z - 12 = 0$.

Bài toán 11: Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu:

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ tại điểm $M_0(4; 3; 0)$.

Giải



Tâm của mặt cầu là I(3; 1; -2).

Ta có điểm $M_0(4; 3; 0)$ thuộc mặt cầu.

Tiếp diện tại M_o có VTPT

$\vec{n} = \overrightarrow{M_oI} = (-1; -2; -2).$

Phương trình tiếp diện:

$-1(x - 4) - 2(y - 3) - 2(z - 0) = 0$ hay $x + 2y + 2z - 10 = 0.$

Bài toán 12: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$ và đường thẳng

$\Delta_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Giải

Mặt cầu (S) tâm I(1; -1; -2), R = 3.

Δ_1 đi qua điểm A(0; 1; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$

Δ_2 đi qua điểm B(1; 0; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-1; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến:

$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; 1) \Rightarrow$ (P): $y + z + m = 0$.

Điều kiện tiếp xúc: $d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|m - 3|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow m = 3 \pm 3\sqrt{2}$.

Vậy có 2 mặt phẳng:

(P_1): $y + z + 3 + 3\sqrt{2} = 0$, (P_2): $y + z + 3 - 3\sqrt{2} = 0$.

Các điểm A, B không thuộc hai mặt phẳng nên đó là 2 mặt cần tìm.

Bài toán 13: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(-1; -2; -2) có bán kính R = 3.

Suy ra (P) đi qua tâm của mặt cầu.

Đường thẳng Δ đi qua M(2; 1; 1) và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}$ =(3; 1; 1)

Do đó (P) có VTPT là: $\overrightarrow{n_p}=[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_\Delta}]$ = (0; 6; -6) hay (0;1;-1)

Suy ra phương trình mặt phẳng (P): y - z = 0.

Bài toán 14: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-4}$ và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải

Mặt cầu có tâm I(1; 2; -2)

$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Đường thẳng Δ đi qua M(0; 0; -5) có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}$ = (1; 1; -4)

Gọi $\overrightarrow{n_p}$ = (a; b; c) $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là VTPT của (P).

Vì (P) đi qua M nên (P): ax + by + c(z + 5) = 0.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_\Delta}=0\\ d(I,(P))=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-4c=0\\ |a+2b+3c|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{cases}$

Thế a = 4c - b vào phương trình sau:

$(7c+b)^2=9((4c-b)^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow 104c^2-86abc+17b^2=0$

$\Leftrightarrow(2c-b)(52c-17b)=0$

Với 2c = b thì a = 2c chọn c = 1, b = 2 ⇒ a = 2.

Khi đó mặt phẳng (P): 2x + 2y + z + 5 = 0

Với 52c = 17b thì 17a = 16c chọn c = 17, b = 52 ⇒ a = 16.

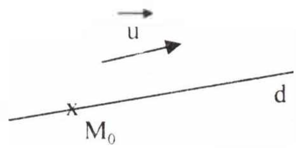
Khi đó mặt phẳng (P): 16x + 52y + 17z + 85 = 0.

DẠNG TOÁN 4. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương trình của đường thẳng:

Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (a, b, c),\ a^2 + b^2 + c^2 > 0.$



Phương trình tham số: d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc khi a, b, c ≠ 0: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau:

Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$

Đường thẳng d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$

Đường vuông góc chung có VTCP $\vec{u} = \left[\vec{u}_1; \vec{u}_2\right]$

Gọi đoạn vuông góc chung là AB, $A \in d_1$ và $B \in d_2$ dạng tham số theo t và t'. Tìm t và t' bằng hệ điều kiện:

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2 = 0 \end{cases}$. *Đường vuông góc chung d là đường thẳng AB.*

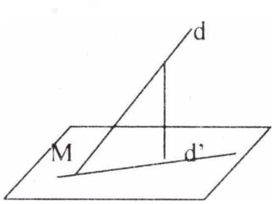
Hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P):

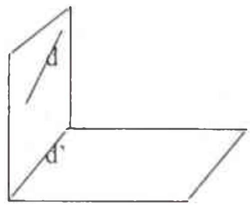
Cách 1: Lấy 2 điểm A, B thuộc d rồi tìm hình chiếu A', B' của chúng lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng A'B'.

Cách 2: Tìm giao điểm M của d và (P) nếu có. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm hình chiếu A' của A lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng MA'.

Cách 3: Tìm giao điểm M của d và (P) nếu có. Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) có VTPT $\vec{n}' = \left[\vec{n}; \vec{u}\right]$.

Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng qua M và có VTCP $\vec{u}' = \left[\vec{n}; \vec{n}'\right]$.





Bài toán 1: Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1; -1) vuông góc và cắt đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$.

Giải

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (-4; 1; 4)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ thì H(1 - 4t; t; -1 + 4t).

Ta có $\overrightarrow{MH} = (1-4t; t-1; 4t)$ nên MH ⊥ Δ

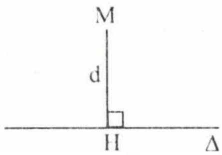
$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow -4(1 - 4t) + 1(t - 1) + 4(4t) = 0$.

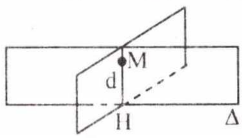
$\Leftrightarrow 33t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{5}{33}$.

Do đó $H\left(\frac{13}{33}; \frac{5}{33}; \frac{-13}{33}\right)$

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{13}{33}; \frac{-28}{33}; \frac{20}{33}\right)$ hay (13; -28; 20)

Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$.





Cách khác: Đường thẳng d cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng (M, Δ): 4x + 4y + 3z - 1 = 0 và mặt phẳng qua M, vuông góc với Δ: 4x - y - 4z - 3 = 0.

Bài toán 2: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng sau trên mỗi mặt phẳng toạ độ.

a) d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$

Giải

a) Điểm M(x; y; z) thuộc d có hình chiếu lên mp(Oyz) là M'(0; y; z) thuộc d', d' là hình chiếu lên mp(Oyz).

Vậy phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

Tương tự thì hình chiếu lên mp(Oxy), mp(Oxz) có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + t \end{cases}.$$

b) Đường thẳng d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Mỗi điểm M(x; y; z) ∈ d có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm M'(x; y; 0) ∈ d'. d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy).

Vậy d' có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t + 3t \\ z = 0 \end{cases}$.

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Bài toán 3: Lập phương trình hình chiếu của đường thẳng d:

$\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ lên mặt phẳng (P) x + y + z - 7 = 0.

Giải

Ta viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

Vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P} = (1; 1; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P) thì vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (Q) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overrightarrow{n_P}$ nên ta có thể lấy $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_P}] = (2; 1; -3)$.

Và (Q) đi qua d nên đi qua M(0; 8; 3). Vậy (Q) có phương trình:

$$2(x - 0) + (y - 8) - 3(z - 3) = 0 \text{ hay } 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

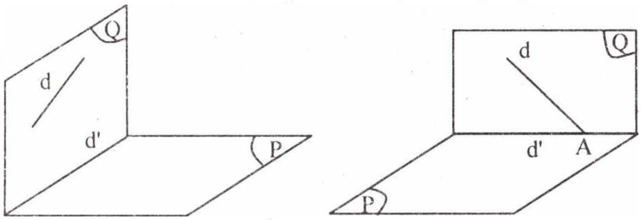
Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'.

Đường thẳng d' là giao tuyến của (Q) và (P) nên d' chứa các điểm có toạ độ (x, y, z) thoả mãn:

$$\begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $z = t$ thì $x = -8 + 4t$, $y = 15 - 5t$.

Vậy d': $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}$.



Cách khác: Tìm giao điểm A của d và (P).

Thế toạ dộ x, y, z vào (P):

$$t + 8 + 4t) + (3 + 2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{7} \Rightarrow A\left(\frac{-4}{7}; \frac{40}{7}; \frac{13}{7}\right)$$

Mặt phẳng (Q) qua d, vuông góc với (P) có VTPT

$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n_P}] = (2; 1; -3)$

Đường thẳng d' của VTCP $\vec{u}' = [\vec{n}, \vec{n_P}] = (4; -5; 1)$

Từ đó suy ra phương trình của hình chiếu d'.

Bài toán 4: Viết phương trình hình chiếu của

(Δ_2): $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ theo phương (Δ_1): $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Lên mặt phẳng (α): $x + y + z + 3 = 0$.

Giải

Hình chiếu Δ là giao tuyến của (α) với (β), trong đó (β) là mặt phẳng chứa (Δ_2), song song với (Δ_1).

Vì (β) chứa (Δ_2) nên đi qua A(7; 3; 9)

và có VTPT $\vec{n} = \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right] = (8; 4; 16)$ hay (2; 1; 4).

Do đó (β): $2(x - 7) + 1(y - 3) + 4(z - 9) = 0$ hay $2x + y + 4z - 53 = 0$.

Các điểm thuộc giao tuyến (Δ_2) có toạ độ thoả mãn: $\begin{cases} x + y + 7 + 3 = 0 \\ 2x + y + 4z - 53 = 0 \end{cases}$

Đặt $z = t$ thì $x = 56 - 3t$, $y = -59 + 2t$

Vậy phương trình tham số của hình chiếu: $\begin{cases} x = 56 - 3t \\ y = -59 + 2t \\ z = t \end{cases}$.

Bài toán 5: Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ (P): $2x + z - 5 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của Δ và (P), nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

Giải

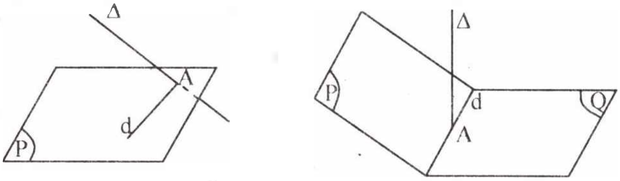
Δ dạng tham số: $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + 2t$.

Thế x, y, z vào (P) thì được $t = 0$ nên $A(1; 2; 3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Khi đó, vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$ của Δ, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 1)$ của (P), nên ta chọn:

$$\vec{u}' = [\vec{u}, \vec{n}] = (2; 3; -4).$$

Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-4}$



Cách khác: Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ thì (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình:

$$x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 3) = 0 \text{ hay } x + 2y + 2z - 11 = 0.$$

Giao tuyến d của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ (vì d nằm trong (Q) mà $\Delta \perp (Q)$).

Suy ra phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}t \\ y = 1 \\ z = \dfrac{17}{3} - \dfrac{4}{3}t \end{cases}$.

Bài toán 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng

Δ: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

Giải

Theo giả thiết đường thẳng d đi qua giao điểm của Δ với (P):

Toạ độ giao điểm I của Δ với (P) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 1; 1)$$

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1; 2; -3)$, vectơ chỉ phương của Δ: $\vec{u} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d cần tìm qua I và có vectơ chỉ phương

$\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1; -2; -1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Bài toán 7: Lập phương trình của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxz) và cắt hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}$$

Giải

Đường thẳng d qua A(0; -4; 3) có VTCP $\vec{u} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d' qua B(1; -3; 4) có VTCP $\vec{u}' = (-2; 1; -5)$

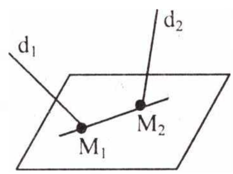
Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng (α) qua d_1, vuông góc với (Oxz) và (β) qua d_2, vuông góc (Oxz)

Ta có (α): $x + z - 3 = 0$, (β): $5x - 2z + 3 = 0$

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = t \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$.

Bài toán 8: Viết phương trình của đường thẳng nằm trong mặt phẳng $y + 2z = 0$ và cắt hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}, \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}.$$



Giải

Ta tìm các giao điểm của hai đường thẳng đã cho với mặt phẳng $y + 2z = 0$

Tham số t ứng với giao điểm M_1 của đường thẳng d_1 với mặt phẳng trên là nghiệm của phương trình:

$t + 2.4t = 0 \Rightarrow 9t = 0 \Rightarrow t = 0$. Vậy $M_1(1; 0; 0)$.

Tương tự, giao điểm của đường thẳng d_2 với mặt phẳng trên là $M_2(5; -2; 1)$ ứng với $t' = -3$.

Đường thẳng phải tìm qua M_1 và M_2 có VTCP

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4; -2; 1)$ *nên có PT tham số:* $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

Bài toán 9: Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm A(3; -1; -4) cắt trục Oy và song song với mặt phẳng y + 2x = 0.

Giải

Ta có điểm A ở ngoài mặt phẳng y + 2x = 0.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A(3; -1; -4) và song song với mặt phẳng y + 2x = 0 có dạng y + 2x + D = 0, D ≠ 0. Vì điểm A(3; -1; -4) thuộc mặt phẳng đó nên ta tính được D = -5.

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là: y + 2x - 5 = 0.

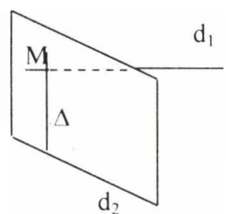
Trục Oy cắt mặt phẳng (α) tại điểm M(0; 5; 0).

Vậy phương trình đường thẳng AM là đường thẳng cần tìm: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+4}{4}$

Bài toán 10: Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

(d_1): $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và (d_2): $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Giải



(d_1), (d_2) có vectơ chỉ phương lần lượt là:

$\overrightarrow{u_1} = (1; 2; -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (-7; 2; 3)$

$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (8; 4; 16)$ nên vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; 1; 4)$

Mặt phẳng (P) chứa (d_2) và song song với $\overrightarrow{u_\Delta}$ là: 5x + 43y - 11z - 38 = 0.

Đường thẳng (d_1) cắt mặt phẳng (P) tại M(7; 3; 9).

Đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua M, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{4}$.

Bài toán 11: Viết phương trình tham số của đường thẳng vuông góc chung của AC và BD biết A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1).

Giải

PT đường AC có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-3; 4; 1)$ là AC: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$

PT đường BD có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2; -2; 0)$ là BD: $\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 3 - 2k \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi đường vuông góc chung là (Δ) qua E thuộc AC, F thuộc BD:

E(4 - 3t; 1 + 4t; 4 + t); F(3 - 2k; 3 - 2k; 1)

$\overrightarrow{FE} = (1 - 3t + 2k; -2 + 4t + 2k; 3 + t)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26t + 2k - 8 = 0 \\ t + 4k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5}{17} \\ k = \dfrac{3}{17} \end{cases}$

Suy ra $E\left(\dfrac{53}{17}; \dfrac{37}{17}; \dfrac{73}{17}\right)$, $F\left(\dfrac{45}{17}; \dfrac{45}{17}; \dfrac{17}{17}\right)$

Đường vuông góc chung (Δ) có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{FE} = \left(\dfrac{8}{17}; -\dfrac{8}{17}; \dfrac{56}{17}\right)$ hay (1; -1; 7) nên (Δ): $\begin{cases} x = \dfrac{45}{17} + t \\ y = \dfrac{45}{17} - t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$.

Bài toán 12: Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng

d: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-7}$ qua mặt phẳng (P): x + 2y + z - 1 = 0.

Giải

Gọi A là giao điểm của d và (P) thì A(2-t; 3t; 1-7t).

Thế toạ độ vào (P) thì t = 1 nên A(1; 3; -6).

Đường thẳng d đi qua B(2; 0; 1). Ta tìm hình chiếu H của B lên (P).

Phương trình đường thẳng qua B, vuông góc với (P) có VTCP

$\vec{u} = \overrightarrow{n_P} = (1; 2; 1)$: $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$.

Thế x, y, z vào (P) thì được $t' = -\dfrac{1}{3}$ nên $H\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

Do đó điểm đối xứng B qua (P) là $B'\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$

Đường thẳng d' có VTCP

$\overrightarrow{AB}' = \left(\frac{1}{3}; \frac{-13}{3}; \frac{19}{3}\right)$ hay (1; -13; 19) nên có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-13} = \frac{z+6}{19}$.

DẠNG TOÁN 5. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$,

với điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ *là mặt cầu (S) có tâm* $I(-A, -B, -C)$ *và bán kính* $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

Bài toán 1: Lập phương trình mặt cầu:

a) Có tâm I(-2; 1; 1) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

$x + 2y - 2z + 5 = 0$.

b) Có tâm thuộc trục Oy và tiếp xúc với hai mặt phẳng:

$x + 2y - 2z - 3 = 0$, $x + 2y - 2z - 5 = 0$.

Giải

a) Theo giả thiết thì R = d(I, (P)) = 1 nên phương trình mặt cầu:

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

b) Gọi I(0; y; 0) thuộc Oy.

Ta có $d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|2y-3|}{\sqrt{9}} = \frac{|2y-5|}{\sqrt{9}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y-3 = 2y-5 \\ 2y-3 = -(2y-5) \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2$.

Vậy I(0; 2; 0).

Bán kính $R = d(I; (P)) = \frac{1}{3}$ nên phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{1}{9}$.

Bài toán 2: Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Giải

I(x; y; z) là tâm mặt cầu cần tìm $\Leftrightarrow I \in (P)$ và IA = IB = IC

Ta có: $IA^2 = (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2$; $IB^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$

$IC^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+z=2 \\ y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Do đó I(1; 0; 1) và bán kính R = IA = 1

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Bài toán 3: Trong không gian có hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(0; -2; 0), B($\sqrt{3}$; 1; 0), C($-\sqrt{3}$; 1; 0), D(0; 0; $2\sqrt{2}$).

a) Chứng minh rằng: ABCD là tứ diện đều, tính thể tích.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D và phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu (S) song song với mặt phẳng (ABD).

Giải

a) Ta có $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$; $BC = 2\sqrt{3}$.

Vậy ABCD là tứ diện đều.

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; 0; 6\sqrt{3})$ nên thể tích khối tứ diện ABCD:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = 2\sqrt{6}.$$

b) Phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu, nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4-4b+d=0 \\ 4+2\sqrt{3}a+2b+d=0 \\ 4-2\sqrt{3}a+2b+d=0 \\ 8+4\sqrt{2}c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ d=-4 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}z - 4 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0; 0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Phương trình của mặt phẳng (ABD) là: $3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z - 2\sqrt{6} = 0$.

Phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABD) có dạng

$$3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z + D = 0\ (D \neq -2\sqrt{6}).$$

Mặt phẳng đó có tiếp diện của mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến mặt phẳng đó bằng R:

$$\frac{\left|\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}+D\right|}{\sqrt{18+6+3}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow D=4\sqrt{6} \text{ hay } D=-5\sqrt{6} \text{ (chọn).}$$

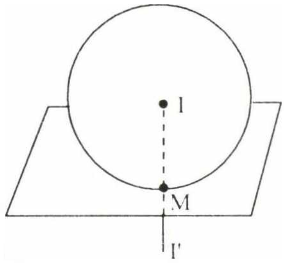
Vậy có hai tiếp diện của mặt cầu (S) cần tìm là:

$3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y+\sqrt{3}z+4\sqrt{6}=0$ và $3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y+\sqrt{3}z-5\sqrt{6}=0$.

Bài toán 4: Lập phương trình mặt cầu có bán kính R = 3 và tiếp xúc với mặt phẳng (P): x + 2y + 2z + 3 = 0 tại điểm M(1; 1; -3).

Giải

Tâm I của mặt cầu nằm trên đường thẳng d đi qua M(1; 1; -3) và vuông góc với (P): x + 2y + 2z + 3 = 0 nên có VTCP $\vec{u}=(1;2;2)$.



Do đó I(1 + t; 1 + 2t; -3 + 2t).

Khoảng cách MI = 3 $\Leftrightarrow \sqrt{t^2+4t^2+4t^2}=3$

$\Leftrightarrow 3|t|=3 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=2$.

Do đó tâm có toạ độ I(0; -1; -5) hoặc I'(2; 3; -1).

Vậy có 2 mặt cầu:

$x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$, $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P): 2x + 3y - 3z + 1 = 0, đường thẳng d: $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z+5}{1}$

và ba điểm A(4; 0; 3), B(-1; -1; 3), C(3; 2; 6).

a) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất.

Giải

a) Tâm I(a; b; c) của (S) xác định bởi hệ $\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ I\in(P) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-a)^2+(0-b)^2+(3-c)^2=(-1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2 \\ (4-a)^2+(0-b)^2+(3-c)^2=(3-a)^2+(2-b)^2+(6-c)^2 \\ 2a+3b-3c+1=0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: a = 1, b = 2, c = 3 và bán kính $R=IA=\sqrt{13}$

Phương trình của (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.

b) Mặt phẳng (Q) cần tìm chính là mặt phẳng chứa d và đi qua tâm I của (S).

Đường thẳng d đi qua M(3; 0; -5) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 9; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (2; -2; -8)$, do đó vectơ pháp tuyến của (Q) là $[\vec{u}, \overrightarrow{IM}] = (70; -18; 22)$ hay (35; -9; 11).

Mà (Q) đi qua I(1; 2; 3) nên phương trình của (Q) là:

$$35(x - 1) - 9(y - 2) + 11(z - 3) = 0 \text{ hay } 35x - 9y + 11z - 50 = 0.$$

Bài toán 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho tứ diện ABCD với bốn điểm: A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0).

a) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định toạ độ tâm I và bán kính của mặt cầu.

b) Viết phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C. Hãy tìm toạ độ tâm và bán kính của nó.

Giải

a) Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Phương trình của (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cx + d = 0$.

(S) qua A, B, C, D nên ta có hệ: $\begin{cases} 12a - 4b + 6c + d = -49 \\ 2b + 12c + d = -37 \\ 4a - 2c + d = -5 \\ 8a + 2b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

Có tâm I(2; -1; 3), $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 3} = \sqrt{17}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; -4)$.

Mặt phẳng (ABC) có pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -36; 0)$ hay (1; 2; 0) và qua A nên (ABC): $x + 2y - 2 = 0$.

Phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C là:

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Tâm của mặt cầu (S) có toạ độ I(2; -1; 3). Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với mp(ABC) có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$.

Tham số t ứng với giao điểm H của Δ và mp(ABC) là tâm đường tròn giao tuyến:

$$(2 + t) + 2(-1 + 2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow H\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; 3\right).$$

Đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \dfrac{\sqrt{405}}{5}$.

Bài toán 7: Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng

(Δ): $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng

(P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$, (Q): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Giải

Ta có (P), (Q) song song nên tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn AB với A, B là giao điểm của (Δ) và 2 mặt phẳng đó (Δ) cắt (P) tại A(2; 1; 1), cắt (Q) tại B(-4; 5; 5) nên tâm I(-1; 3; 3).

Ta có $R = d(I, (P)) = \dfrac{|-1+2.3-2.3-2|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Bài toán 8: Lập phương trình mặt cầu tâm A(-1; 2; 3) và tiếp xúc với đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Giải

Bán kính R = d(A; d)

Ta có d qua B(2; 1; 0) và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 1)$ nên

$$d(A; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{165}}{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu: $(x + 1)^2 + (y-2)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{55}{3}$.

Bài toán 9: Cho bốn điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3).

Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD). Tìm toạ độ tiếp điểm.

Giải

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 0; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 1; -3)$.

Mặt phẳng (BCD) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (2; 1; 1)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua B(4; 0; 6) có phương trình:

$2(x - 4) + 1(y - 0) + 1(z - 6) = 0$ hay $2x + y + z - 14 = 0$.

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD) có bán kính

$$R = d(A; (BCD)) = \frac{|2.1+1.6+1.2-14|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Vậy mặt cầu có phương trình:

$$(x - 1)^2 + (y - 6)^2 + (z - 2)^2 = \frac{8}{3}$$

Gọi H là tiếp điểm thì AH là đường thẳng đi qua A, vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

Vậy AH có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Kết hợp với phương trình của mp(BCD), ta suy ra toạ độ của tiếp điểm H ứng với $t = \frac{2}{3}$ là $H\left(\frac{7}{3}; \frac{20}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Bài toán 10: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \text{ và } d_2: \frac{x+8}{2} = y - 6 = \frac{z-10}{-1}$$

a) Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt d_1 tại M, cắt d_2 tại N. Tìm toạ độ các điểm M, N.

a) Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Gọi AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1$,

$B \in d_2$). Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Giải

a) Viết phương trình đường thẳng d_1, d_2 dưới dạng tham số.

Từ đó: $M \in d_1$ nên M(t; 2 - t; -4 + 2t)

$N \in d_2$ nên N(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

Đường thẳng MN sẽ là đường thẳng d phải tìm khi MN // Ox hay hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{i}$ (1; 0; 0) cùng phương, nghĩa là

$$\begin{cases} t' + t = -4 \\ t' + 2t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 18 \\ t' = -22 \end{cases}.$$

Vậy M(18; -16; 32) và đường thẳng d phải tìm có phương trình tham số:

$$d: \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}.$$

b) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0; 2; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; 2)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-8; 6; 10)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (-1; 5; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-8; 4; 14)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 70 \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau.

$A \in d_1 \Rightarrow A(t; 2 - t; -4 + 2t)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{u_1} \Leftrightarrow 6t + t' = 16$ và $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u_2} \Leftrightarrow t + 6t' = 26$.

Giải hệ $\begin{cases} 6t + t' = 16 \\ t + 6t' = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 0; 0) \\ B(0; 10; 6) \end{cases}$.

Suy ra mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của AB là I(1; 5; 3), bán kính $R = IA = \sqrt{35}$.

Phương trình của nó là: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 35$.

Bài toán 11: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$, mặt phẳng (P): $2x + 2y - z - 7 = 0$.

Chứng minh mặt cầu (S) cắt mp(P) theo giao tuyến là một đường tròn (C).

Viết phương trình mặt cầu (S') đi qua A(6; -1;4) và chứa đường tròn (C).

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1; -2; 3), bán kính R = 5

Vì $d(I, (P)) = \dfrac{|2 - 4 - 3 - 7|}{3} = 4 < R$ nên mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Tâm J của mặt cầu (S') nằm trên đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với (P).

Ta có: Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ nên J(1 + 2t; -2 + 2t; 3 - t)

Mà $R'^2 = JA^2 = d^2(J, (P)) + r^2$

$\Leftrightarrow (-5 + 2t)^2 + (-1 + 2t)^2 + (1 + t)^2 = \left(\dfrac{9t - 12}{3}\right)^2 + 9 \Leftrightarrow 2t = -2 \Leftrightarrow t = -1$.

Do đó tâm J(-1; -4; 4), bán kính $R' = JA = \sqrt{58}$

Vậy (S'): $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 4)^2 = 58$.

DẠNG TOÁN 6. TOÁN TỔNG HỢP TƯƠNG GIAO

Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) qua M_0 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau: $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$

– Song song: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \notin (P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \in (P)$

Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ và

$(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, $A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0$.

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau: $A : B : C \neq A' : B' : C'$

– Trùng nhau: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

– Song song: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và mp(P). Gọi IH = d là khoảng cách từ tâm I đến (P) thì:

- Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm H là hình chiếu của tâm mặt cầu I lên mp(P), bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

- Nếu d = R: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu.

- Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ và d = IH là khoảng cách từ O tới Δ.

- Nếu d < R: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B. Độ dài dây $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

- Nếu d = R: đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu.

- Nếu d > R: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

Bài toán 1: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$.

a) Chứng minh mặt phẳng $x + 5y + z + 4 = 0$ chứa đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'.

Giải

a) Mặt phẳng (α) đã cho có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; 1)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α).

Vì điểm $M(1; -1; 0)$ của Δ thuộc (α) nên Δ nằm trên (α).

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hình chiếu d_1 của đường thẳng Δ có phương trình: $x + 2y + 1 = 0$ và hình chiếu d'_1 của Δ' có phương trình $x - y = 0$.

Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d'_1 là $I(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$

Khi đó đường thẳng đi qua I, song song với Oz sẽ cắt cả hai đường thẳng Δ và Δ'.

Phương trình đường thẳng đó là: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$.

Bài toán 2: Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình:

d: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases}$, (P): $x - 3y + z - 1 = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu song song của d trên mp(P) theo phương Oz.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{11}{3}; 0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) thì giao tuyến $d = (P) \cap (Q)$ là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

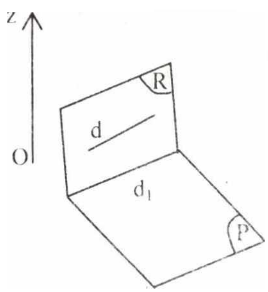
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1; -3; 1)$. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_P}] = (4; 0; -4)$ hay $(1; 0; -1)$.

Vì (Q) chứa đường thẳng d nên cũng đi qua điểm A, do đó (Q) có phương trình

$x - \dfrac{2}{3} - z = 0$ hay $3x - 3z - 2 = 0$.

Ta có (P): $x - 3y + z - 1 = 0$.

Đặt $z = t$ thì $x = \dfrac{2}{3} + t$, $y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}t$.



Vậy d': $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}$

b) Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và song song hoặc chứa Oz thì d_1 là giao tuyến của mp(R) và mp(P).

Mặt phẳng (R) đi qua $A\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{11}{3};0\right)$ và có vectơ pháp tuyến là

$\vec{n}_R = [\vec{u}, \vec{k}] = (1; -1; 0)$.

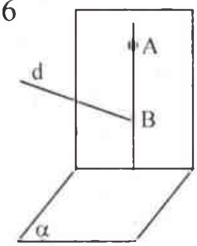
Mặt phẳng (R) có phương trình là 3x - 3y - 13 = 0. Ta có (P): x - 3y + z - 1 = 0.

Đặt y = t thì $x = \dfrac{13}{3} + t$, $z = -\dfrac{10}{3} + 2t$.

Vậy d_1 có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \dfrac{13}{3} + t \\ y = t \\ z = -\dfrac{10}{3} + 2t \end{cases}$.

Bài toán 3: Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A(-1; 2; -3), vuông góc với (α): 6x - 2y - 3z + 8 = 0 và cắt đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$.

Giải



(Δ) nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A, có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (6; -2; -3)$.

(P): 6(x + 1) - 2(y - 2) - 3(x + 3) = 0 ⇔ 6x - 2y - 3z + 1 = 0.

Giao điểm của (d) với (P) là B(1; -1; 3).

Do đó đường thẳng (Δ) là đường thẳng qua A và B có phương trình chính tắc:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Bài toán 4: Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}; \; d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}; \; d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0; 4; -1)$, các phương trình của d_2 và d_3 dưới dạng tham số:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Trên đường thẳng d_2 lấy điểm $M_2(1 + t; -2 + 4t; 2 + 3t)$ và trên đường thẳng d_3 lấy điểm $M_3(-4 + 5t'; -7 + 9t'; t')$.

Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-5 + 5t' - t; -5 + 9t' - 4t; -2 + t' - 3t)$

Hai vectơ $\overrightarrow{M_2M_3}$ và $\vec{u}_1$ cùng phương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -5 + 5t' - t = 0 \\ \dfrac{-5 + 9t' - 4t}{4} = \dfrac{-2 + t' - 3t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Do đó $M_2(1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{M_2M_3} = (0; 4; -1)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua M_2 và M_3 có phương trình: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Vì $M_2 \notin d_1$ nên Δ đúng là đường thẳng cần tìm.

Cách khác: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và song song với d_1, phương trình mặt phẳng (β) đi qua d_3 và song song với d_1. Hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến Δ là đường thẳng cần tìm, nếu Δ không trùng với d_1.

Bài toán 5: Cho bốn đường thẳng:

(d_1): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$ $\qquad$ (d_2): $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{-4}$

(d_3): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ $\qquad$ (d_4): $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Chứng minh tồn tại một đường thẳng (d) cắt cả bốn đường thẳng đó. Viết phương trình chính tắc của (d).

Giải

(d_1) qua $A(1; 2; 0)$, $A \notin (d_2)$, (d_1) và (d_2) cùng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$ nên $(d_1) // (d_2)$, (d_2) qua $B(2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua (d_1), (d_2) là: PT của (P) là $y + z - 2 = 0$

$(d_3) \cap (P) = E\left(1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $(d_4) \cap (P) = F(4; 2; 0)$

Đường thẳng (d) qua E, F là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}$.

Vậy (d) cắt cả bốn dường thẳng đã cho.

Bài toán 6: Cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - \frac{5}{4} = 0$.

a) Lập phương trình đường kính AB của mặt cầu song song với đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 5 \\ z = 4t + 7 \end{cases}$

b) Lập phương trình mặt phẳng (P) xác định bởi 2 đường thẳng song song AB và d nói trên.

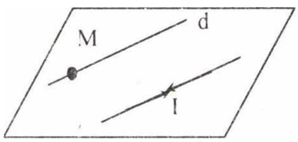
Giải

Phương trình mặt cầu viết dưới dạng: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = 2^2$.

Ta có toạ độ tâm của mặt cầu $I(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$

a) Đường kính AB của mặt cầu đi qua tâm I và song song với d có VTCP: $\vec{u} = (2; -3; 4)$ nên có phương trình là:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t' \\ y = -\frac{3}{2} - 3t' \\ z = -\frac{1}{2} + 4t' \end{cases}$$



b) Đường thẳng d đi qua điểm M(-1; 5; 7) có VTCP $\vec{u} = (2; -3; 4)$

Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{2}; \frac{15}{2}\right)$ nên (P) có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, 2\overrightarrow{IM}] = (97; 47; -17)$

Vậy phương trình (P): $97x + 42y - 17z + 6 = 0$.

Bài toán 7: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

d_1: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$; d_2: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(3; 10; 1) và cắt đồng thời hai đường thẳng đó.

Giải

Giả sử đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại hai điểm A(2+3a; -1+a; -3+2a) và B(3+b; 7-2b; 1-b)

Ta có M ∈ Δ nên:

$$\overline{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-1=kb \\ a-11=-2kb-3k \\ -4+2a=-kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-kb=1 \\ a+3k+2kb=11 \\ 2a+kb=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2;-10;-2) \text{ Vậy } \Delta : \begin{cases} x=3+2t \\ y=10-10t \\ z=1-2t \end{cases}$$

Bài toán 8: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x + y - 2z + 4 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A(3; -1; 1) và song song với mặt phẳng (P).

Giải

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\overrightarrow{n_p}$=(1;1;-2),

Mặt cầu (S) có tâm I(1;-2;-1). Ta có $\overrightarrow{IA} = [(2;1;2)]$;

VTCP của đường thẳng d là: $\overrightarrow{n_{p'}} = \left[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{n_p}\right]$ = (-4; 6; 1)

Vậy phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z-1}{1}$.

Bài toán 9: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, chứng minh hai đường thẳng

d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$; d': $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$ cắt nhau tại I.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(0; -1; 2) cắt hai đường thẳng d, d' lần lượt tại A và B sao cho tam giác IAB cân tại A.

Giải

$$\text{Ta có hệ} \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2} \\ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

nên 2 đường thẳng d và d' cắt nhau tại I(1;1;1).

Chọn B'(0, -1; 3), ta tìm A' sao cho tam giác IA'B' cân tại A'.

Ta có $A'(1+a; 1+2a; 1+2a) \in d$.

Vì A'B' song song AB nên $\overrightarrow{A'B'}$ là VTCP của đường thẳng Δ.

Ta có: $A'I = A'B' \Leftrightarrow a^2 + (2a)^2 + (2a)^2 = (a+1)^2 + (2a+1)^2 + (2a-2)^2$

$$\Leftrightarrow 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{2}$$

Khi đó $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{7}{2}; 7; 11\right)$. Chọn VTCP (7;14;22)

Vậy đường thẳng d: $\frac{x}{7} = \frac{y-1}{14} = \frac{z+2}{22}$.

Bài toán 10: Cho mặt cầu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 5t - 11 \\ z = -4t + 9 \end{cases}.$$

Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại các giao điểm của d với mặt cầu.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(-2; 1; -5), R = 7.

Thế toạ độ x, y, z vào phương trình mặt cầu:

$(3t - 3)^2 + (5t - 12)^2 + (14 - 4t)^2 = 49 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ hoặc $t = 2$.

Do đó đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm A(4; 4; -3), B(1; -1; 1)

- Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A có VTPT

$\overrightarrow{IA} = (6; 3; 2)$ nên có phương trình: $6x + 3y + 2z - 30 = 0$.

- Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm B có VTPT

$\overrightarrow{IB} = (3; -2; 6)$ nên có phương trình: $3x - 2y + 6z - 11 = 0$.

Bài toán 11: Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng

d: $\frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ và tiếp xúc với mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$.

Giải

Tâm của (S) là I(1; 2; 3), bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 67} = 9$

Đường thẳng d đi qua M(13; -1; 0) và N(12; 0; 4).

Phương trình mặt phẳng (P):

$Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

(P) qua M, N nên: $\begin{cases} 13A - B + D = 0 \\ 12A + 4C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 4C \\ D = -12B - 52C \end{cases}$

Do đó (P): $(B + 4C)x + By + Cz - 12B - 52C = 0$ (*)

Điều kiện (P) tiếp xúc (S):

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|B + 4C + 2B + 3C - 12B - 52C|}{\sqrt{(B+4C)^2 + B^2 + C^2}} = 9$$

$$\Leftrightarrow |B + 5C| = \sqrt{2B^2 + 8BC + 17C^2}$$

$$\Leftrightarrow B^2 - 2BC - 8C^2 = 0 \Leftrightarrow B = 4C \text{ hoặc } B = -2C.$$

Thế vào (*) và rút gọn $C \neq 0$, ta được 2 mặt phẳng:

$2x - 2y + z - 28 = 0$, $8x + 4y + z - 100 = 0$.

Bài toán 12: Cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

a) Tuỳ theo giá trị của k, hãy xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mp(P) với (P): $x + y - z + k = 0$.

b) Mặt cầu cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C, khác với góc toạ độ O. Viết phương trình mp(ABC).

c) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B.

Giải

a) Mặt cầu có tâm I(1; 2; 3) và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Gọi d là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới mp(P) thì $d = \frac{|1 + 2 - 3 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{3}}$.

Do đó:

Nếu $\frac{|k|}{\sqrt{3}} < \sqrt{14}$ hay $|k| < \sqrt{42}$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn.

Nếu $|k| = \sqrt{42}$ thì (P) tiếp xúc với mặt cầu;

Nếu $|k| > \sqrt{42}$ thì (P) không cắt mặt cầu.

b) Trong phương trình mặt cầu (S):

Cho $y = z = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2 \Rightarrow A(2; 0; 0)$

Cho $z = x = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 4 \Rightarrow B(0; 4; 0)$

Cho $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$ hoặc $z = 6 \Rightarrow C(0; 0; 6)$

Vậy phương trình mp(ABC): $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$.

c) Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm B(0; 4; 0) phải đi qua B và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IB} = (-1; 2; -3)$.

Vậy (α) có phương trình:

$-(x - 0) + 2(y - 4) - 3(z - 0) = 0$ hay $x - 2y + 3z + 8 = 0$.

Bài toán 13: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba mặt phẳng

(P): $2x - y + 2z - 1 = 0$, (Q): $2x - y + z - 7 = 0$, (R): $x + y - 2z + 7 = 0$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng 3 và tiếp xúc với (P), đồng thời cắt hai mặt phẳng (Q) và (R) theo hai đường tròn có bán kính lớn nhất.

Giải

Gọi I(a;b;c) là tâm của mặt cầu (S). Vì mặt cầu (S) cắt hai mặt phẳng (Q) và (R) theo hai đường tròn có bán kính lớn nhất nên tâm I nằm trên hai mặt phẳng này

Từ đó ta có: $\begin{cases} 2a - b + c - 7 = 0 \\ a + b - 2c + 7 = 0 \end{cases}$

Mặt khác $d(I, (P)) = 3 \Leftrightarrow |2a - b + 2c - 1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a - b + 2c - 10 = 0 \\ 2a - b + 2c + 8 = 0 \end{array}\right.$

Giải hệ $\begin{cases} 2a - b + c - 7 = 0 \\ a + b - 2c + 7 = 0 \\ 2a - b + 2c - 10 = 0 \end{cases}$ ta được I(1;-2;3)

Giải hệ $\begin{cases} 2a - b + c - 7 = 0 \\ a + b - 2c + 7 = 0 \\ 2a - b + 2c + 8 = 0 \end{cases}$ ta được I(-5;-32;-15)

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn bài toán

(S): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$

(S'): $(x + 5)^2 + (y + 32)^2 + (z + 15)^2 = 9$.

Bài toán 14: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt phẳng

(P): $2x + y + 2z + 4 = 0$, đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và đường thẳng Δ là giao tuyến hai mặt phẳng: $x + 1 = 0$, $y + z - 4 = 0$.

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d, đồng thời tiếp xúc với Δ và (P) biết rằng tâm của mặt cầu có tọa độ nguyên.

Giải

Mặt cầu có tâm $I(2t + 2; -t - 1; -t + 1) \in d$, t nguyên.

Khi đó $R = d(I, (P)) = \dfrac{|t+9|}{3}$

Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = (0; 1; -1)$ và chọn $M(1; 1; 3) \in \Delta$.

Khi đó $\overrightarrow{MI} = (2t + 1; -t - 2; -t - 2)$

$$d(I; \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \frac{\sqrt{12t^2 + 24t + 18}}{\sqrt{2}}$$

Ta có: d(I, (P)) = d(I; Δ) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|t+9|}{3} = \sqrt{6t^2+12t+9} \Leftrightarrow 53t^2 + 90t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{90}{53} \end{array}\right.$$

Chọn t = 0 thì I(2; -1; 1) có tọa độ nguyên, R = 3.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Bài toán 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 0; 3), đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): 3x - y + z - 3= 0. Tìm tọa độ điểm B thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d.

Giải

Gọi M là giao điểm của d và AB thì M(1 + 2m; 3 - m; 2m).

Ta có $\overrightarrow{AM}$ =(2m; 3 - m; 2m - 3)

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}$ =(2; -1; 2)

Vì AB vuông góc với đường thẳng d nên

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 4m - 3 + m + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Do đó $\overrightarrow{AM}$ =(2; 2; -1)

Đường thẳng AB đi qua A và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm VTCP nên

$$AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

Khi đó B(1 + 2b; 2b; 3 - b). Vì B thuộc (P) nên

$$3(1 + 2b) - (2b) + (3 - b) - 0 = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

Vậy B(-1; -2; 4).

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài tập 1: Trong không gian Oxyz.

a) Tìm hình chiếu H của A(0; 0; 1) lên đường thẳng BC với B(-1; -2; 0) và C(2; 1; -1).

b) Tìm điểm M' đối xứng của M(1; 3; 5) qua đường thẳng (Δ):

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

HD-ĐS

a) Kết quả $H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$ b) Kết quả $M'(-5;\ -1;\ 3)$

Bài tập 2: Tìm toạ độ điểm đối xứng của điểm:

a) M(1; 1; -1) qua mặt phẳng (P): $3x - y + 2z - 1 = 0$.

b) A(5; 1; 3) qua mặt phẳng (BCD) với điểm

B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0) và D(3; -6; 2).

HD-ĐS

a) Kết quả $M'\left(\frac{10}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{5}{7}\right)$ b) Kết quả A'(1; -7; -5)

Bài tập 3: Xét vị trí tương đối của mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ với (P): $x + 2y + z + 9 = 0$

HD-ĐS

Kết quả không có điểm chung

Bài tập 4: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến 2 mặt phẳng (α):

$(2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0$ và (β): $mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0$.

Xác định m để d song song mặt phẳng (P).

HD-ĐS

Kết quả $m = -\frac{1}{2}$

Bài tập 5: Lập phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng:

a) $19x - 6y - 4z + 2 = 0$, $42x - 8y + 3z + 11 = 0$ và qua H (3,4.1)

b) $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng

(P): $7x - y + 4z - 1 = 0$

HD-ĐS

a) Kết quả $30x - 16y - 21z - 5 = 0$ b) Kết quả $3x + 5y - 4z + 25 = 0$

Bài tập 6: Lập phương trình mặt cầu qua A(0,0,3) và qua đường tròn giao tuyến của mặt phẳng α: $2x - 2y - z + 4 = 0$ với mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0$.

HD-ĐS

Kết quả $x^2 + y^2 + z^2 + 88x - 90y - 47z + 138 = 0$

Bài tập 7: Cho A(2;1;1), B(-4;5;5). Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng AB và tiếp xúc 2 mặt phẳng:

$x + 2y - 2z - 2 = 0$; $x + 2y - 2z + 4 = 0$

HD-ĐS

Kết quả $(x+1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Bài tập 8: Cho điểm I(1;2; -2) và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z + 5 = 0$

a) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) và mặt phẳng (P) là đường tròn có chu vi bằng 8π.

b) Chứng minh mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

HD-ĐS

a) Kết quả (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$.

○ CHỦ ĐỀ XIV

GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH TỌA ĐỘ

DẠNG TOÁN 1. TÍNH GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Góc giữa hai vectơ: $\vec{u} = (x,y,z)$ *và* $\vec{v} = (x',y',z')$:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

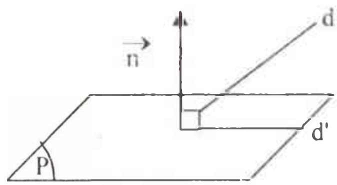
Góc của tam giác ABC: $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Góc giữa 2 đường thẳng: d có VTCP $\vec{u}$ *và d' có VTCP* $\vec{v}$ *thì*

$\cos(d, d') = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

Góc giữa 2 mặt phẳng: mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ *và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến* $\vec{n}'$ *thì*

$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$.



Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

d có VTCP $\vec{u}$ *và (P) có VTPT* $\vec{n}$ *thì*

$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ *và* $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *đến mặt phẳng:*

– *(Oxy) là* $|z_0|$; *(Oyz) là* $|x_0|$; *(Ozx) là* $|y_0|$.

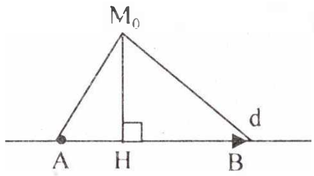
– *(P):* $Ax + By + Cz + D = 0$ *là:*

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$d(M_0; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_0}; \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$

Đường thẳng d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\vec{u}_1; \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1 . \vec{u}_2\right]\right|}.$$

Chú ý:

1) Góc giữa 2 vectơ, góc của tam giác từ 0^o đến 180^o và các góc về đường thẳng, mặt phẳng đều từ 0^o đến 90^o.

2) Khoảng cách giữa các yếu tố song song là khoảng cách từ 1 điểm chọn trên yếu tố này đến yếu tố kia.

3) Khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau là khoảng cách từ đường này đến mặt phẳng chứa đường kia và song song với nó.

Bài toán 1: Tìm khoảng cách từ:

a) Điểm A(-2; -4; 3) đến mặt phẳng $2x - y + 2z - 3 = 0$

b) Điểm B(2; -1; -1) đến mặt phẳng $16x - 12y - 15z - 4 = 0$.

Giải

a) $d(A; (P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|-4+4+6-3|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{3}{3} = 1$

b) $d(B; (P)) = \dfrac{|32+12+15-4|}{\sqrt{256+144+225}} = \dfrac{55}{25} = \dfrac{11}{5}$.

Bài toán 2: Tính khoảng cách từ M(-8; 7; 6) đến:

a) Các mặt phẳng toạ độ.

b) Các mặt phẳng (P): $x = 2$, (Q); $y = -1$, (R): $z = 4$.

Giải

a) $d(M, (Oxy)) = |z_M| = 6$

$d(M, (Oyz)) = |x_M| = 8$

$d(M, (Ozx)) = |y_M| = 7$.

b) (P): $x - 2 = 0$ nên $d(M, (P)) = |x_M - 2| = 10$

(Q): $y + 1 = 0$ nên $d(M, (Q)) = |y_M + 1| = 8$

(R): $z - 4 = 0$ nên $d(M, (R)) = |z_M - 4| = 2$.

Bài toán 3: Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:

a) (P): $4x - y + 3z - 9 = 0$, (Q): $4x - y + 3z + 1 = 0$.

b) (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và $Ax + By + Cz + D' = 0$. $D \neq D'$.

Giải

a) Lấy điểm A trên (P): $4x - y + 3y - 9 = 0$

Cho $x = 0$, $y = 0$ thì $z = 3$ nên $A(0; 0; 3)$

Do đó $d((P), (Q)) = d(A; (Q)) = \dfrac{|9+1|}{\sqrt{16+1+9}} = \dfrac{10}{\sqrt{26}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{13}$

b) Lấy điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (P) tức là

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ hay $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ thì

$d((P)), (Q)) = d(M, (Q)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Bài toán 4: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; -2; 2)$, $B(-3; 1; 0)$, $C(2; 0; -1)$. Tính khoảng cách từ gốc O đến mp(ABC).

Giải

Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-5; -14; -11)$ nên có phương trình:

$-5(x - 1) - 14(y + 2) - 11(z - 2) = 0$

Vậy phương trình của mặt phẳng (ABC) là: $5x + 14y + 11z + 1 = 0$.

Ta có $d(O; (ABC)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{25+196+121}} = \dfrac{1}{\sqrt{342}} = \dfrac{1}{3\sqrt{38}}$.

Bài toán 5: Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh $D(4; -1; 0)$ của tứ diện ABCD biết $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 0; 2)$, $C(0; 1; -3)$.

Giải

Chiều dài đường cao DH của tứ diện ABCD là khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC). Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; -4)$ nên $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ là VTPT của (ABC)

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $4x - 13y - z + 10 = 0$

$DH = d(D; (ABC)) = \dfrac{|4.4 - 13.(-1) - 0 + 10|}{\sqrt{16+169+1}} = \dfrac{39}{\sqrt{186}}$.

Bài toán 6: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

a) $M(2; 3; 1)$, Δ: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ b) $M(2; 3; -1)$, Δ: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - 4t \\ y = 2t \\ z = -\dfrac{3}{4} - t \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-2; 1; -1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (4; 2; 2)$, $[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}] = (8; -10; -6)$.

Vậy khoảng cách: $d(M, \Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có Δ đi qua điểm $M_0(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{4})$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-4; 2; -1)$

nên $\overrightarrow{M_0M} = \left(\frac{5}{2}; 3; -\frac{1}{4}\right)$

$[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}] = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -17\right)$

Vậy khoảng cách $d(M, \Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{2870}}{14}$.

Bài toán 7: Tìm khoảng cách từ điểm $A(2; 3; -1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 1 = 0$, $(Q): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

Giải

$(P): x + y - 2z - 1 = 0$, $(Q): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

Cho $z = 0$ thì $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Do đó giao tuyến d đi qua $M_0(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0)$ và có VTCP

$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (8; -4; 2)$ hay $(4; -2; 1)$.

Do đó $d(A, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{\dfrac{205}{14}}$.

Bài toán 8: Tìm khoảng cách giữa cặp đường thẳng sau đây:

$d: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, $d': \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{3}$.

Giải

d qua $M(0; 4; -1)$ có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -2)$

d' qua M'(0; 2; 0) có VTCP $\vec{u}' = (-1; 3; 3)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}'] = (9; 5; -2)$, $\overrightarrow{MM'} = (0; -2; 1)$

Nên $[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} = 0 - 10 - 2 = -12 \neq 0$ nên 2 đường thẳng chéo nhau.

Do đó $d(d, d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right]\right|} = \dfrac{|-10-2|}{\sqrt{81+25+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

Bài toán 9: Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$, d': $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases}$ b) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$, d': $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -2 + t' \\ z = t' \end{cases}$.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_1(1; -1; 1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (1; -1; 0)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M_2(2; -2; 3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (-1; 1; 0)$.

Vì $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ cùng phương nhưng $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; -1; 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy $d(d, d') = d(M_1, d') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u_2}\right]\right|}{|\vec{u_2}|} = 2$.

b) d qua A(1; -1; 1) và có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 0)$

d' qua B(2; -2; 0) và có VTCP $\vec{u}' = (-1; 1; 1)$

Ta có $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ không cùng phương và đặc biệt A thuộc d' nên 2 đường thẳng cắt nhau tại A.

Bài toán 10: Hãy xác định góc φ tạo thành bởi các cặp mặt phẳng sau:

a) $x - \sqrt{2}y + z - 4 = 0$ và $x + \sqrt{2}y - z + 5 = 0$

b) $3y - z - 9 = 0$ và $2y + z = 0$.

Giải

a) Hai mặt phẳng có VTPT $\vec{n} = (1; -\sqrt{2}; 1)$, $\vec{n}' = (1; \sqrt{2}; -1)$

$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{1+2+1}.\sqrt{1+2+1}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

b) Hai mặt phẳng có VTPT $\vec{n} = (0; 3; -1)$, $\vec{n}' = (0; 2; 1)$

$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|6-1|}{\sqrt{9+1}.\sqrt{4+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Bài toán 11: Cho mặt mặt phẳng (P): $2x - y + z - 17 = 0$ và mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm B(1; -2; 1), C(1; 0; 0), D(0; 1; 0). Tính góc tạo thành bởi hai mặt phẳng đó.

Giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 1)$

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}' = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (1; 1; 2)$

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thì:

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o.$$

Bài toán 12: Mặt phẳng (β) nhận điểm P(2; -1; -2) là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ ở trên mặt phẳng đó. Hãy tính góc giữa mặt phẳng (β) và mặt phẳng (γ) có phương trình $x - y - 6 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (β) đi qua P(2; -1; -2) và nhận $\overrightarrow{OP} = (2; -1; -2)$ làm VTPT nên phương trình tổng quát của (β) là: $2x - y - 2z - 9 = 0$.

Gọi φ là góc giữa (β) và (γ), ta có: $\cos\varphi = \dfrac{|2.1+1.1|}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{1+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^o$.

Bài toán 13: Tính góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$, (P): $y - z = 0$

b) d: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$, (P): $x + y - z + 2 = 0$

Giải

Gọi φ là góc giữa d và (P) thì $0^o \leqslant \varphi \leqslant 90^o$

a) d có VTCP $\vec{u} = (-1; 0; 1)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (0; 1; -1)$

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 30^o$$

b) d có VTCP $\vec{u} = (4; 1; -2)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; -1)$

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|4+1+2|}{\sqrt{16+1+4}.\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{63}}.$$

Bài toán 14: Tìm góc tạo bởi các cặp đường thẳng sau đây:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$ b) d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 6 \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -5 \\ z = 2t' \end{cases}$.

Giải

Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng thì $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$.

a) d, d' có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 4)$, $\vec{u}' = (-1; 3; 2)$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{u}')\right| = \frac{|-2+3+8|}{\sqrt{4+1+16}.\sqrt{1+9+4}} = \frac{9}{\sqrt{294}}$$

b) d, d' có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{u}' = (-2; 0; 2)$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{u}')\right| = \frac{|-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Bài toán 15: Tìm góc tạo bởi đường thẳng $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ với các trục toạ độ.

Giải

Đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Từ đó góc tạo bởi đường thẳng đã cho với các trục Ox, Oy, Oz có số đo sao cho cosin của nó lần lượt bằng:

$$\cos\varphi_1 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{i})\right| = \frac{|2|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos\varphi_2 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{j})\right| = \frac{|1|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos\varphi_3 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{k})\right| = \frac{|1|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Bài toán 16: Cho tứ diện ABCD có A(3; 2; 6), B(3; -1; 0), C(0; -7; 3) và D(-2; 1; -1).

a) Tính góc giữa các cặp cạnh đối.

b) Tính góc giữa đường thẳng AD với mp(ABC).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -3; 6)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 8; -4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ do đó g(AB, CD) = 90°.

Tương tự $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ nên góc giữa các cặp đối đều bằng 90°.

b) Đường thẳng AD có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AD} = (5; 1; 7)$

Mp(ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; -2; 1)$

Gọi φ là góc giữa AD với mp(ABC) thì: $\sin\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n})\right| = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài toán 17: Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có

$A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)$

a) Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt (ABC) và (ABD).

b) Tìm khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1; -1; 3)$

Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4; 4; 4)$ hay $(1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (ABD) có VTPT $\vec{n}' = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (14; 13; 9)$

Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|1.14+1.13+1.9|}{\sqrt{3}.\sqrt{196+169+81}} = \dfrac{36}{\sqrt{1338}}$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(5; 1; 3) và có VTPT $\vec{n}' = (1; 1; 1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) là:

$1(x - 5) + 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0 \Rightarrow x + y + z - 9 = 0.$

Do đó: $d(D; (ABC)) = \dfrac{|4+6-9|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

DẠNG TOÁN 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

- Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến

$= (A, B, C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

có phương trình: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

và biến đổi thành dạng phương trình tổng quát:

$Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

- Phương trình mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ hay:

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$,

$A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ có tâm $I(-A, -B, -C)$ và bán kính

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

- Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Phương trình tham số: d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc khi a, b, c ≠ 0: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

Bài toán 1: Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

a) 2x - y + 4z + 5 = 0 và 3x + 5y - z - 1 = 0.

b) x + 2y + z - 1 = 0 và x + 2y + z + 5 = 0.

Giải

a) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi:

$$\frac{|2x-y+4z+5|}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{|3x+5y-z-1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}\,|3x + 5y - z - 1|$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}\,(3x + 5y - z - 1)$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng:

$(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}+5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}+\sqrt{3})z+5\sqrt{5}+\sqrt{3}=0,$

$(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}-5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}-\sqrt{3})z+5\sqrt{5}-\sqrt{3}=0.$

b) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng:

$$\frac{|x+2y+z-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|x+2y+z+5|}{\sqrt{1+4+1}}\Leftrightarrow |x+2y+z-1|=|x+2y+z+5|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y+z-1=x+2y+z+5 \\ x+2y+z-1=-(x+2y+z+5)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z + 2 = 0.$

Vậy tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình: x + 2y + z + 2 = 0.

Bài toán 2: Trong không gian toạ độ Oxy cho hai điểm A(1; -1; 2), B(2; 0; 1).

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$.

b) Tìm quỹ tích các điểm M cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

Giải

a) Giả sử M(x; y; z). Ta có: $MA^2 - MB^2 = 2$.

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 - (2 - x)^2 - y^2 - (1 - z)^2 = 2.$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0.$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt phẳng có phương trình trên.

b) Mặt phẳng (OAB) đi qua O, có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-1; 3; 2)$ nên có phương trình: -x + 3y + 2z = 0.

Điểm M(x; y; z) cách đều mp(OAB) và mp(Oxy) khi và chỉ khi:

$$\frac{|-x+3y+2z|}{\sqrt{1+9+4}}=|z| \Leftrightarrow -x+3y+2z=\pm\sqrt{14}z \Leftrightarrow -x+3y+(2\pm\sqrt{14})z=0$$

Vậy quỹ tích là hai mặt phẳng có phương trình trên.

Bài toán 3: Viết phương trình của mặt phẳng qua điểm M(5; 4; 3) và cắt ba trục toạ độ ở ba điểm cách đều gốc toạ độ.

Giải

Mặt phẳng cần tìm có dạng đoạn chắn: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $|a|=|b|=|c|\neq 0$.

Điểm M(5; 4; 3) thuộc mặt phẳng nên: $\frac{5}{a}+\frac{4}{b}+\frac{3}{c}=1(1)$

Với $b=a$, $c=a$, $(1)\Leftrightarrow \frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1\Rightarrow a=12$.

Với $b=a$, $c=-a$, $(1)\Leftrightarrow \frac{5}{a}+\frac{4}{a}-\frac{3}{a}=1\Rightarrow a=6$.

Với $b=-a$, $c=a$, $(1)\Leftrightarrow \frac{5}{a}-\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1\Rightarrow a=4$.

Với $b=-a$, $c=-a$ $(1)\Leftrightarrow \frac{5}{a}-\frac{4}{a}-\frac{3}{a}=1\Rightarrow a=-2$.

Do đó bốn mặt phẳng cần tìm là:

$\frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=1\Leftrightarrow x+y+z-12=0$.

$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}-\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow x+y-z-6=0$

$\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow x-y+z-4=0$.

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1\Leftrightarrow -x+y+z-2=0$.

Bài toán 4: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(-2; 1; 3), C(2; -1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Giải

Mặt phẳng (P) thoả mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) qua A, B và song song với CD.

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}]$. Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;4;0)\Rightarrow \vec{n}=(-8;-4;-14)$.

Phương trình (P): $4x+2y+7z-15=0$.

Trường hợp 2: (P) qua A, B và cắt CD.

Suy ra (P) cắt CD tại trung điểm I của CD.

$I(1;1;1)\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(0;-1;0)$, vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}]=(2;0;3)$.

Phương trình (P): $2x + 3z - 5 = 0$.

Vậy (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$ hoặc (P): $2x + 3z - 5 = 0$.

Bài toán 5: Cho tứ diện ABCD với $A(3; 5; -1)$, $B(7; 5; 3)$, $C(9; -1; 5)$, $D(5; 3; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều 4 đỉnh của tứ diện đó.

Giải

Một mặt phẳng cách đều hai điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của MN hoặc nó song song với MN. Vì vậy, để mặt phẳng (P) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của hình tứ diện thì:

- Hoặc mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với một mặt.

- Hoặc mặt phẳng (P) chứa hai đường trung bình của tứ diện. Có ba mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với 2 cạnh đối chung mút.

Từ đó tìm được bảy mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đầu bài là:

$x - z - 6 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $x + 2y - z - 8 = 0$; $2x + y - z - 14 = 0$

$x - y - z - 2 = 0$; $2x + y + z - 16 = 0$; $5x + y - 2z - 28 = 0$.

Bài toán 6: Trong hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(2; -1; 0)$ và $M_3(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M_3 mà khoảng cách từ M_1 và M_2 đến (P) đều bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Mặt phẳng (P) đi qua $M_3(0; 0; 1)$ nên có phương trình

$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 1) = 0$ hay $Ax + By + Cz - C = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$.

Khoảng cách từ M_1, M_2 đến (P) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|A + C - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2A - B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó $|A| = |2A - B - C|$ hay $\pm A = 2A - B - C$

Suy ra $C = A - B$ hoặc $C = 3A - B$.

Với $C = A - B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$2A^2 = A^2 + B^2 + (A - B)^2 \Leftrightarrow 2B(B - A) = 0$.

Nếu $B = 0$ thì $C = A$, ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình: $x + z - 1 = 0$

Nếu $A = B$ thì $C = 0$. Ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình: $x + y = 0$.

Với $C = 3A$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$2A^2 = A^2 + B^2 + (3A - B)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 6AB + 2B^2 = 0.$

$\Leftrightarrow 4A^2 - 3AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow (2A - \frac{3}{4}B)^2 + \frac{7B^2}{16} = 0$

Do đó $2A - \frac{3}{4}B = 0$ và $B = 0$, tức là $A = 0$, $B = 0$ và do đó $C = 0$: loại

Bài toán 7: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

d_1: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$, d_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{5}$. Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai đường thẳng đó.

Giải

Ta có VTCP của d_1 và d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (1;1;-1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2;1;5)$

nên VTPT của (α) là $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (6; -7; -1)$

Do đó: (α): $6x - 7y - z + D = 0$

Đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt đi qua 2 điểm M(2;2;3), N(1;2;1)

Ta có: $d(M, (\alpha)) = d(N, (\alpha)) \Leftrightarrow |-5 + D| = |-9 + D| \Leftrightarrow D = 7.$

Vậy mp(α): $6x - 7y - z + 7 = 0$.

Bài toán 8: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M(0; 3; -2)., song song với đường thẳng Δ và cách đường thẳng Δ một đoạn bằng 3.

Giải

Gọi $\overrightarrow{n_p} = (a; b; c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là VTPT của (P).

Vì (P) đi qua điểm M(0; 3; -2) nên (P): $ax + b(y-3) + c(z+2) = 0$

Ta có $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1; 4)$ là VTCP của đường thẳng Δ, $A(0; 0; 1) \in \Delta$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \\ d(A,(P)) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ |-b + c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

Thay $a = -(b + 4c)$ vào phương trình sau ta được:

$(b - c)^2 = (b + 4c)^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + 10bc + 16c^2 = 0 \Leftrightarrow (b + 2c)(b + 8c) = 0.$

Với $b + 2c = 0 \Rightarrow a = -2c$ ta chọn $b = 2$, $c = -1 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow$ (P): $2x + 2y - z - 8 = 0$

Với $b + 8c = 0 \Rightarrow a = 4c$ ta chọn $b = 8$, $c = -1 \Rightarrow a = -4$

Vậy mặt phẳng (P): $-4x + 8y - z - 26 = 0$.

Bài toán 9: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua các điểm M(0; 0; 1), N(3; 0; 0) và tạo với mặt phẳng Oxy góc $\frac{\pi}{3}$.

Giải

Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; a; b)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (3; 0; -1)$

Vì $\vec{n}.\overrightarrow{MN} = 3.1 + 0 - b = 0$ nên b = 3. Do đó $\vec{n} = (1; a; 3)$.

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{\sqrt{a^2+10}} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

PT mặt phẳng (P) là:

$1.(x - 0) \pm \sqrt{26}\ (y - 0) + 3.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{26}.y + 3z - 3 = 0.$

Bài toán 10: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng (α) có phương trình: $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^o.

Giải

Mặt phẳng (P) chứa Oz nên có dạng:

$Ax + By = 0 \Rightarrow \vec{n}_P = (A; B; 0)$, $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -\sqrt{5})$.

Theo giả thiết của bài toán

$$\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_\alpha) = \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{4+1+5}} = \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2|2A + B| = \sqrt{10}.\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0.$

Lấy B = 1, ta có: $6A^2 + 16A - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{3} \\ A_2 = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng (P) phải tìm: $\frac{1}{3}x + y = 0$; $-3x + y = 0$.

Bài toán 11: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa giao tuyến d của 2 mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ và hợp với mp(Oxy) góc 60^o.

Giải

Giao tuyến d của mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ đi qua M(1; 1; 1) và có VTCP $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (0; 1; -1)$

(P): $A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ta có VTPT $\vec{n} = (A, B, C)$ vuông góc với $\vec{u}$ nên:

$B - C = 0 \Rightarrow C = B$. Do đó (P): $Ax + By + Bz - A - 2B = 0$

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\varphi = 60^0 \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|B|}{\sqrt{A^2 + 2B^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow A^2 = 2B^2 \Leftrightarrow A = \pm B\sqrt{2}$.

Từ đó tìm được 2 mặt phẳng (P):

$\sqrt{2}x + y + z - \sqrt{2} - 2 = 0$, $\sqrt{2}x - y - z - \sqrt{2} + 2 = 0$.

Bài toán 12: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α): $2x - y + z - 2 = 0$, (β): $x + 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (α), song song và cách (β) một đoạn bằng 1.

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng song song với (β) và cách (β) một đoạn bằng 1 thì

$(P): x + 2y + 2z + m = 0 \ (m \neq -4)$

$d((P), (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|m+4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |m + 4| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -7 \end{array}\right.$

Với m = -1, ta có (P): $x + 2y + 2z - 1 = 0$

Khi đó đường thẳng d cần tìm chính là giao tuyến của (P) và (α)

Ta có VTPT $\overrightarrow{n_p} = (1;2;2)$, VTPT $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;-1;1)$ thì đường thẳng d có VTCP là

$\vec{u_d} = [\vec{n_p}, \vec{n_\alpha}] = (4; 3; -5)$

Chọn M(1;0;0) thuộc giao tuyến của (P) và (α)

Ta có d: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-5}$

Với m = -7, giải tương tự thì có d: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{-5}$.

Bài toán 13: Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1; -5; 3) và tạo với hai đường thẳng Ox, Oy các góc bằng 60^0.

Giải

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm.

Các đường thẳng Ox, Oy có các vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Theo giả thiết của bài toán thì:

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow 4a^2 = 4b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$\Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 = c^2$. Chọn $C = \sqrt{2}$ thì $a = \pm 1$, $b = \pm 1$.

Vậy có 4 trường hợp xảy ra:

Với $\vec{u} = (1; 1; \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$

Với $\vec{u} = (1; -1; \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$

Với $\vec{u} = (-1; 1; \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$

Với $\vec{u} = (-1; -1; \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$.

Bài toán 14: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P): x + y - z + 1 = 0, cắt các đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2},\ d' = \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

và tạo với đường thẳng d một góc 30^0.

Giải

Ta có đường thẳng d nằm trong (P) và đường thẳng d' cắt (P) tại điểm A(5;-15).

Lấy $B(1+t; t; 2+2t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t-4; t+1; 2t-3)$ là VTCP của d.

Ta có $\cos(\Delta; d) = 30^0 \Leftrightarrow \dfrac{|6t-9|}{\sqrt{6}\sqrt{(t-4)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4 \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5;0;-5) \Rightarrow$ chọn VTCP (0;1;1)

Vậy phương trình Δ: $\begin{cases} x = 5+t \\ y = -1 \\ z = 5+t \end{cases}$

Với $t = 4 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0;5;5) \Rightarrow$ chọn VTCP(0;1;1)

Vậy phương trình Δ: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1+t \\ z = 5+t \end{cases}$.

Bài toán 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x - y + z - 6 = 0 và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1},\ d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Viết phương trình đường thẳng d song song với mp(P) đồng thời d cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại điểm A và B sao cho $AB = 3\sqrt{6}$.

Giải

Giả sử $A(2-t; 3+t_1; 4+t_1)$, $B(1+2t_2; -2+t_2; 2-2t_2)$

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\overrightarrow{n_p} = (1;-1;1)$

Ta có: $d // (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p} = 0$

$$\Leftrightarrow (-1 + 2t_2 + t_1) - (-5 + t_2 - t_1) + (-2 -2t_2 - t_1) = 0 \Leftrightarrow t_2 = t_1 + 2$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB} = (3t_1 + 3; -3; -3t_1 - 6)$

Theo giả thiết: $AB = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow (3t_1 + 3)^2 + 9 + (3t_1 + 6)^2 = 54$

$$\Leftrightarrow t_1^2 + 3t_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -3 \\ t_1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $t_1 = -3 \Rightarrow A(5;0;1) \in (P)$ (loại)

Với $t_1 = 0 \Rightarrow A(2;3;4)$, $\overrightarrow{AB} = (3;-3;-6)$

Vậy phương trình d: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

Bài toán 16: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{1}$; mặt phẳng (P): $-x + y + 2z + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), song song với đường thẳng d và cách đường thẳng d một đoạn bằng $\sqrt{14}$.

Giải

Ta có đường thẳng d nằm trong (P).

Lấy $A(2; 3; -3) \in d$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong (P), đi qua A và vuông góc với đường thẳng d.

Ta có $\overrightarrow{n_p} = (-1; 1; 2)$ và $\overrightarrow{u_d} = (4; 2; 1)$

Đường thẳng d' có VTCP $\overrightarrow{u_{d'}} = [\overrightarrow{n_p}; \overrightarrow{u_d}] = (-3; 9; -6)$ hay $(-1;3;-2)$.

Suy ra d': $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$. $M \in d' \Rightarrow M(2 - t; 3 + 3t; -3 - 2t)$

Ta có $AM = \sqrt{14} \Leftrightarrow t^2 + (3t)^2 + (2t)^2 = \sqrt{14} \Leftrightarrow t = \pm 1$

Với $t = 1 \Rightarrow M(1; 6; -5) \Rightarrow \Delta$: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+5}{1}$

Với $t = -1 \Rightarrow M(3; 0; -1) \Rightarrow \Delta$: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Bài toán 17: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + y - z = 0$, đường thẳng d: $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(1; -1; 1), vuông góc với đường thẳng d và tạo với (P) một góc bằng 30^0.

Giải

Gọi VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1; 1; -3)$.

Mặt phẳng (P) lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_P} = (2; 1; -1)$.

Từ các giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d} = 0 \\ \sin(\Delta,)(P)) = \sin 30^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 3c = 0 \\ \dfrac{|2a + b - c|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Thế $b = 3c - a$ vào phương trình sau ta được:

$$4(a + 2c)^2 = 6(a^2 + (3c - a)^2 + c^2) \Leftrightarrow 2a^2 - 13ac + 11c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - c)(2a - 11c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = c & \Rightarrow b = 2c \\ 2a = 11c & \Rightarrow b = -\dfrac{5}{2}c \end{array}\right.$$

Xét $a = c \Rightarrow b = 2c$ ta chọn $a = c = 1 \Rightarrow b = 2$.

Phương trình Δ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

Xét $2a = 11c \Rightarrow 2b = -5$ ta chọn $a = 11$, $c = 2 \Rightarrow b = -5$.

Phương trình Δ: $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-1}{2}$.

Bài toán 18: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng

$$(P): x - y + 2z + 6 = 0,\ \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 \end{cases};\ \Delta_2: \begin{cases} x = 5 + 9t' \\ y = 10 + 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases};$$

Viết phương trình đường thẳng Δ song song với (P), cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và khoảng cách từ Δ đến (P) bằng $\frac{3}{\sqrt{6}}$.

Giải

Giả sử đường thẳng Δ cắt Δ_1 tại A thì $A(2+a; -1+2a; -3)$

Ta có $d(\Delta, (P)) = d(A; P) = \frac{3}{\sqrt{6}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 + a + 1 - 2a - 6 + 6|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow |3 - a| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 6 \end{array}\right.$$

Với a = 0, ta có A(2; -1; -3).

Giả sử Δ cắt Δ_2 tại B thì B(5 + 9b; 10 + 2b; 1 - b)

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow (3 + 9b) - (11 + 2b) + 2(4 - b) = 0$

$$\Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow B(5; 10; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3; 11; 4)$$

Phương trình Δ: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{11} = \frac{z+3}{4}$.

Với a = 6, ta có A(8; 11; -3).

Giả sử Δ cắt Δ_2 tại B thì B(5 + 9b; 10 + 2b; 1 - b).

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow (-3 + 9b) - (-1 + 2b) + 2(4 - b) = 0$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{6}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(-\frac{69}{5}; -\frac{17}{5}; \frac{26}{5}\right)$$

Vậy phương trình: Δ: $\frac{x-8}{69} = \frac{y+11}{17} = \frac{z+3}{-26}$.

Bài toán 19: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(2; 3; -1), cắt đường thẳng

d: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -\frac{11}{2} + t \\ z = -14 - 2t \end{cases}$ tại 2 điểm A, B mà AB = 40.

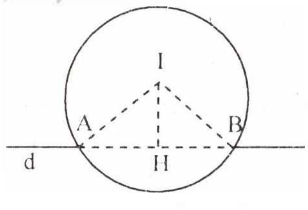
Giải

Gọi H là trung điểm dây AB thì IH vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) qua I, vuông góc với d có phương trình:

2x + y - 2z - 9 = 0, suy ra giao điểm d và (P) là: H(-3; -7; -11).

Ta có $R^2 = IA^2 = AH^2 + IH^2 = 20^2 + 15^2 = 225$.

Vậy (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 225$.



Cách khác: $IH = d(I, d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0I}, \overrightarrow{u}\right]\right|}{|\overrightarrow{u}|}$.

Bài toán 20: Cho (P): 5x - 4y + z - 6 = 0, (Q): 2x - y + z + 7 = 0 và d là giao tuyến của 2 mặt phẳng: x - y + 2z - 3 = 0, x - 3y - z = 0. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I là giao điểm của d với (P), cắt (Q) theo đường tròn có chu vi $4\pi\sqrt{5}$.

Giải

Tâm I(x; y; z) có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - 4y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \text{ nên } I(1; 0; 1)$$

Ta có $d = d(I, (Q)) = \dfrac{|2.1 - 0 + 1 + 7|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

Đường tròn giao tuyến có chu vi $4\pi\sqrt{5} = 2\pi r$ nên có bán kính $r = 2\sqrt{5}$, do đó $R^2 = d^2 + r^2 = \dfrac{110}{3}$.

Vậy phương trình (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \dfrac{110}{3}$.

Bài toán 21: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P): $2x - y - 2z = 0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng (d), cách mặt phẳng (P) một đoạn bằng 3 và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải

Gọi I là tâm của mặt cầu (S).

Vì I thuộc đường thẳng d nên I(-t; -1+2t; 2+t)

Ta có $d(I, (P)) - 3 \Leftrightarrow \dfrac{|6t + 3|}{3} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Nên I(-1;1;3) hay I(2;-5;0)

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng 4 nên mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) cần tìm là:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$; $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 25$.

DẠNG TOÁN 3.	XÁC ĐỊNH ĐIỂM

Điểm M thuộc trục Ox: M(x;0;0).
Điểm M thuộc trục Oy: M(0;y;0).
Điểm M thuộc trục Oz: M(0;0;z).
Điểm M thuộc mặt Oxy: M(x;y;0).
Điểm M thuộc mặt Oyz: M(0;y;z).
Điểm M thuộc mặt Ozx: M(x;0;z).
Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ *thuộc mặt phẳng (P):* $Ax + By + Cz + D = 0$
khi và chỉ khi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Điểm M thuộc đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ *khi và chỉ khi.*

$M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

Điểm M thuộc đường thẳng d: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$
khi và chỉ khi $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

Bài toán 1: Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau:
a) M cách đều điểm A(2; 3; 4) và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$
b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$.

Giải

Ta có $M \in Oz$ nên M(0; 0; c)

a) $MA = d(M; (P)) \Leftrightarrow \sqrt{4+9+(4-c)^2} = \dfrac{|c-17|}{\sqrt{4+9+1}}$

$\Leftrightarrow 13 + (4-c)^2 = \dfrac{(c-17)^2}{14} \Leftrightarrow 182 + 14(4-c)^2 = (c-17)^2$

Từ đó giải ra c = 3. Vậy M(0; 0; 3)

b) Điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho nên $\dfrac{|-c+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|c+5|}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |-c+1| = |c+5|$

$\Leftrightarrow -c + 1 = c + 5$ hoặc $-c + 1 = -c - 5 \Leftrightarrow c = -2$.

Vậy M(0; 0; -2).

Bài toán 2: Tìm toạ độ điểm

a) C nằm trên mp(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0 sao cho ABC là tam giác đều với hai điểm A(0; 0; -3), B(2; 0; -1).

b) C thuộc Oz để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (α): 2x - 2y - z +5 = 0 một góc bằng 60^0 với A(1; 0; 0), B(0; 1; 2).

Giải

a) Gọi điểm C(x; y; z) thuộc mp(P).

Ta có ABC là tam giác đều cạnh AB = $2\sqrt{2}$ nên:

$$\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải ra có hai điểm: C(2; -2; -3), $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

b) Gọi C(0; 0; m) $\in$ Oz. Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (-1; 1; 2), $\overrightarrow{AC}$ = (-1; 0; m)

$\Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ = (m; m-2; 1) là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (2; -2; -1).

Mp(ABC) và (α) hợp nhau góc 60^0 nên:

$$\cos 60^0 = \left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right| = \frac{|2m + 4 - 2m - 1|}{3\sqrt{m^2 + 1 + (m-2)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Vậy có hai điểm C(0; 0; $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$), C'(0; 0; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$).

Bài toán 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(5; 5; 0) và đường thẳng d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4}$. Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông tại C và BC = $\sqrt{29}$.

Giải

Vì C thuộc d và AC $\perp$ d nên C là hình chiếu của A lên d.

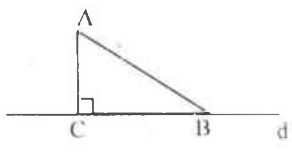
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; 3; -4). Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với d nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

2(x - 5) + 3(y - 5) - 4(z - 0) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x + 3y - 4z - 25 = 0.

Do đó C là giao điểm của d và (P) nên có toạ độ xác định bởi hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4} \\ 2x + 3y - 4z - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

. Vậy C(3; 5; -1).



Ta có B $\in$ d nên B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t)

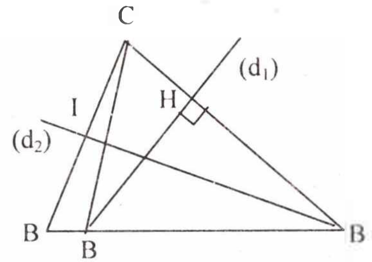
BC = $\sqrt{29} \Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (3t - 6)^2 + (8 - 4t)^2 = 29$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.

Vậy B(1; 2; 3) hoặc B(5; 8; -5).

Bài toán 4: Cho tam giác ABC có C(3; 2; 3), đường cao AH nằm trên đường thẳng (d_1): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$, đường phân giác trong BM của góc B nằm trên đường thẳng (d_2): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm đỉnh A và B.

Giải



1) Mặt phẳng (P) qua C, $\perp$ (d_1) là:

$1.(x - 3) + 1.(y - 2) - 2.(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 2z + 1 = 0$.

(P) $\cap$ (d_2) = B(1; 4; 3)

Mặt phẳng (Q) qua C, $\perp$ (d_2) là:

$1.(x - 3) - 2.(y - 2) + 1.(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$

(Q) $\cap$ (d_2) = I(2; 2; 4)

K đối xứng với C qua (d_2) thì K nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Vì I là trung điểm của CK nên K(1; 2; 5).

Đường thẳng (Δ) đi qua KB là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

Do đó: (Δ) cắt (d_1) tại A(1; 2; 5)

Bài toán 5: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC vuông cân tại B. Biết rằng A(5; 3; -1), C(2; 3; -4). Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh B thuộc (P): $x + y - z - 6 = 0$ và có $x_B > x_C$.

Giải

Gọi B(a; b; c). Vì B $\in$ (P) nên $a + b - c - 6 = 0$

Ta có: BA = BC $\Leftrightarrow (a - 5)^2 + (b - 3)^2 + (c + 1)^2$

$= (a - 2)^2 + (b - 3)^2 + (c + 4)^2 \Leftrightarrow c = 1 - a$

Do đó $b = c + 6 - a = 7 - 2a$ nên B(a; 7 - 2a; 1 - a).

Mà $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (a - 5)(a - 2) + (4 - 2a)(4 - 2a) + (2 - a)(5 - a) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 3 \end{array}\right.$

Do đó B(2; 3; -1), B(3; 1; -2). Theo đề bài thì chọn B(3; 1; -2).

Bài toán 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình bình hành ABCD có A(1; 0; 0), C(2; 2; 2) và D thuộc trên đường thẳng d: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

Tìm tọa độ đỉnh B biết diện tích của hình bình hành ABCD bằng $3\sqrt{2}$.

Giải

Vì D thuộc đường thẳng d nên D(-2 + t; 3 - 2t; 1 2t).

Ta có: $\overrightarrow{AC}$ =(1; 2; 2), $\overrightarrow{AD}$ =(t - 3; -2t + 3; -2t + 1)

$\Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (-4; 4t - 7; -4t + 9)$

Ta có $S_{ABCD} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow S_{ACD} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{32t^2 - 128t + 146} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 32t^2 - 128t + 128 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Suy ra D(0; -1; -3)

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ B(3; 3; 5)

Bài toán 7: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x - 2y + 2z - 1 = 0 và hai đường thẳng

$\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Giải

Δ_2 qua A(1; 3; -1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; 1; -2)

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + t; t; -9 + 6t)$

$\overrightarrow{MA}$ = (2-t; 3-t; 8-6t), $[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]$ = (8t - 14; 20-14; t-4)

$\Rightarrow \left|[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]\right| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ A đến Δ_2: $\frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến (P): $d(M, (P)) = \frac{|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t - 20|}{3}$.

Ta có $d(M, \Delta_2) = d(M, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3}$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{53}{55}$

Với $t = 1 \Rightarrow M(0; 1; -3)$, $t = \frac{53}{35} \Rightarrow M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$.

Bài toán 8: Cho 2 đường thẳng: d: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$, d': $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

Tìm A thuộc d, A' thuộc d' sao cho AA' vuông góc d, d'.

Giải

Điểm A thuộc d nên $A(t; 1-t; 1+t)$ và A' thuộc d' nên $A'(1-t'; 1 + t'; t')$.

Đường thẳng d, d' có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 1)$, $\vec{u}' = (-1; 1; 1)$

Ta có $\begin{cases} AA' \perp d \\ AA' \perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AA'}.\vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - t' = 0 \\ t + 3t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ t' = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy hai điểm $A\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$ và $A'\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Bài toán 9: Cho điểm A(2; 1; 4), tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ để AM bé nhất.

Giải

Vì M thuộc Δ nên AM bé nhất khi M là hình chiếu của A lên Δ. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $M(1+t; 2+t; 1+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy M(2; 3; 3).

Bài toán 10: Cho hai điểm A(3; 1; 1); B(7; 3; 9) và mp(α): $x + y + z + 3 = 0$.

Tìm điểm M trên (α) để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AB $\Rightarrow$ I(5; 2; 5)

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2MI$.

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mp(α).

Toạ độ của M(x; y; z) là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -5 \Rightarrow M(0; -3; 0)$.

Bài toán 11: Cho hai điểm A(3; 1; 0), B(-9; 4; 9) và mp(α): 2x - y + z + 1 = 0.

Tìm toạ độ điểm M trên (α) sao cho: $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Đặt f(x; y; z) = 2x - y + z + 1 thì $f(x_A; y_A, z_A).f(x_B; y_B, z_B) < 0$ nên hai điểm A, B ở khác phía đối với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (α).

Ta có: $|MA - MB| = |MA' - MB| \leqslant A'B$ (Không đổi).

A'H: x = 3 + 2t, y = 1 - t, z = t nên H(3 + 2t; 1-t; t) thuộc (α) suy ra t = 2

$\Rightarrow$ H(1; 2; -1). Do đó A'(-1; 3; -2).

Đường thẳng A'B có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \end{cases}$.

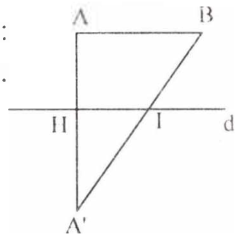
Toạ độ điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ: $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ M(7; 2; -13).

Bài toán 12: Cho hai điểm A(1; 2; -1), B(7; -2; 3) và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Tìm điểm I thuộc d sao cho tổng IA + IB nhỏ nhất.

Giải

d có VTCP $\vec{u}$ = (3; -2; 2) và đi qua M(-1; 2; 2).

Ta có $\overrightarrow{AB}$ = (6; -4; 4) = $2\vec{u}$ và M không thuộc d nên đường thẳng AB song song với d.



b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d:

(P): 3(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ 3x - 2y + 2z + 3 = 0.

Điểm H thuộc d nên H(-1+3t; 2-2t; 2+2t) và thuộc (P) nên t = 0 $\Rightarrow$ H(-1; 2; 2).

Do đó điểm đối xứng A qua d là A'(-3; 2; 5).

Ta có IA + IB = IA' + IB $\geqslant$ A'B: không đổi.

Do đó IA + IB bé nhất khi I = A'B $\cap$ d mà AB song song d nên I chính là trung điểm A'B. Vậy I(2; 0; 4).

Bài toán 13: Cho ba điểm A(2; 0; 1), B(2; -1; 0), C(1; 0; 1).

Tìm trên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ điểm S sao cho $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Tam giác ABC có trọng tâm $G(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Ta có:

$T = \left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right| = \left|3\overrightarrow{SG}\right| = 3SG$. Do đó T bé nhất khi S là hình chiếu vuông góc của G lên d.

Mặt phẳng (P) qua G, vuông góc d: x + 2y + 3z - 3 = 0.

S(t, 2t, 2t) thuộc (P) nên $t = \frac{3}{14}$. Vậy $S\left(\frac{3}{14}; \frac{3}{7}; \frac{9}{14}\right)$.

Bài toán 14: Cho A(1; 4; 5), B(0; 3; 1); C(2; -1; 0) và mặt phẳng (P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0.

Tìm điểm M thuộc (P) để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất.

Giải

Tam giác ABC có trọng tâm G(1; 2; 2). Ta có:

$$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$
$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Do đó T bé nhất khi M là hình chiếu của G lên mp(P).

Đường thẳng d qua G, vuông góc (P) có phương trình:

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$. Thế x, y, z vào (P) thì t = 1. Vậy M(4; -1; 0)

Bài toán 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng d_1 đi qua các điểm A(5; 4; 3), B(6; 7; 2) và đường thẳng d_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$. Tìm điểm C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Đường thẳng d_1 qua A và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -1)$

Đường thẳng d_2 qua M(1; 2; 3) và có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 1)$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}\sqrt{11}.d(AB, d)$.

Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 ($I \in d_2$, $J \in d_1$).

Ta có: I(1 + 2t; 2+3t; 3+t), J(5 + s; 4+3s; 3-s).

$\overrightarrow{IJ} = (4 - 2t + s; 2 - 3t + 3s; -t - s)$

IJ là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4 - 2t + s) + 3(2 - 3t + 3s) + (-t - s) = 0 \\ (4 - 2t + s) + 3(2 - 3t + 3s) - (-t - s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases}$$

Do đó I(3; 5; 4), J ≡ A(5; 4; 3); IJ = $\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$S_{ABC} \geqslant \frac{1}{2}AB.IJ = \frac{1}{2}\sqrt{11}.\sqrt{6} = \frac{\sqrt{66}}{2}$. Dấu = khi C ≡ I(3; 5; 4).

Bài toán 16: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(-2;1;0), đường thẳng d: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Gọi B là điểm đối xứng của A qua d. Tìm tọa độ điểm C trong mặt phẳng (P): 3x + 2y - 3z - 2 = 0 sao cho đoạn thẳng BC có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d thì H(2+1; 1-t; 1+2t).

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (1;-1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow (4+t) - (-t) + 2(1+2t) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;2-1)$

Vì H là trung điểm AB nên B(4;3;-2)

Với C ∈ (P), để BC nhỏ nhất thì C là hình chiếu của B lên (P).

Khi đó đường thẳng BC đi qua B(4;3;-2) và nhận $\overrightarrow{u_p}(3;2;-3)$ làm VTCP.

Do đó C(4+3c; 3+2c; -2-3c)

Mà C ∈ (P) ⇔ 3(4 + 3c) + 2(3 + 2c) - 3(-2 - 3c) - 2 = 0 ⇔ c = -1

Vậy điểm C(1;1;1).

DẠNG TOÁN 4. TOÁN TỔNG HỢP

Góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (x,y,z)$ và $\vec{v} = (x',y',z')$:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Góc giữa đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}$:

$$sin(d,(P)) = |cos(\vec{u},\vec{n})|$$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến (P): Ax + By + Cz + D = 0 là:

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến đường thẳng d qua A và có VTCP

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}:\ d(M_0;d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_0};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right]\right|}.$$

Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Bài toán 1: Cho hai điểm A(1; -1; -2), B(3; 1; 1) và mặt phẳng (P): x - 2y + 3z - 5 = 0.

a) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mp(P).

c) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua giao điểm I của đường thẳng AB với mp(P) và vuông góc với AB.

Giải

a) Gọi A'(x_0; y_0; z_0) thì trung điểm của AA' là: $I\left(\dfrac{x_0+1}{2}; \dfrac{y_0-1}{2}; \dfrac{z_0-2}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp (P) \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1} = \dfrac{y_0+1}{-2} = \dfrac{z_0+2}{3} \\ \dfrac{x_0+1}{2} - 2\left(\dfrac{y_0-1}{2}\right) + 3\left(\dfrac{z_0-2}{2}\right) - 5 = 0 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được toạ độ của $A'\left(\dfrac{15}{7}; -\dfrac{23}{7}; \dfrac{10}{7}\right)$

b) Mặt phẳng(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}]$ = (12; -3; -6) hay (4; -1; -2)

Vậy phương trình của mp(Q) là:

4(x - 1) - (y + 1) - 2(z + 2) = 0 hay 4x - y - 2z - 9 = 0.

c) I thuộc AB nên I(1+2t; -1+2t; -2+3t)

Thế vào (P) thì $t = \dfrac{8}{7}$ nên giao điểm $I\left(\dfrac{23}{7}; \dfrac{9}{7}; \dfrac{10}{7}\right)$

Đường thẳng Δ chính là giao tuyến của mp(P) và mp(R), trong đó (R) đi qua I và vuông góc với AB.

Vì $\overrightarrow{AB}$ = (2; 2; 3) nên phương trình của mp(R) là:

$2\left(x - \dfrac{23}{7}\right) + 2\left(y - \dfrac{9}{7}\right) + 3\left(z - \dfrac{10}{7}\right) = 0$ hay 14x + 14y + 21z - 94 = 0

Suy ra Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \frac{23}{7} + 4t \\ y = \frac{9}{7} - t \\ z = \frac{10}{7} - 2t \end{cases}$.

Bài toán 2: Cho M(1; 0; 2), N(1; 1; 0), P(0; 1; 2). Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm mp(MNP) với Ox, Oy, Oz.

a) Chứng minh ba đường thẳng AP, BM, CN đồng qui tại G.

b) Gọi φ_1, φ_2, φ_3 là các góc tạo bởi $\overrightarrow{OG}$ với $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Chứng minh $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.

Giải

a) $\overrightarrow{MN} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{NP} = (-1; 0; 2)$

nên tìm được mặt phẳng (MNP): $2x + 2y + z - 4 = 0$.

Cho $y = z = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2; 0; 0)$

$z = x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0; 2; 0)$

$x = y = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0; 0; 4)$

Ta có NA = NB, PB = PC, MA = MC nên trong tam giác ABC thì 3 trung tuyến AP, BM, CN đồng qui tại trọng tâm $G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$.

b) Ta có $\overrightarrow{OG} = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$, $\overrightarrow{OA}' = (2; 0; 0)$ nên $\cos\varphi_1 = \cos(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Tương tự $\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình:

(P): $2x - y + z + 2 = 0$ và (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau. Tìm góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(1; 2; -3) và song song với cả (P) và (Q).

c) Viết phương trình mp(R) đi qua B(-1; 3; 4) vuông góc với cả (P) và (Q).

Giải

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P} = (2; -1; 1)$ và $\overrightarrow{n_Q} = (1; 1; 2)$.

Vì hai vectơ đó không cùng phương nên (P) và (Q) cắt nhau.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó là:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o.$$

b) Đường thẳng d song song với cả (P) và (Q) nên có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (-3; -3; 3)$ hay (1; 1; -1), vì A không thuộc 2 mặt phẳng (P), (Q) nên đường thẳng d cần tìm có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

c) Mp(R) đi qua B(-1; 3; 4) và vuông góc với d nên có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ nên (R) có phương trình:

x + 1 + y - 3 - (z - 4) = 0 hay x + y - z + 2 = 0.

Bài toán 4 Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 1; 2), B(-1; -3; 0), C(4; 0; -3) và D(2; 2; -1).

a) Tìm hình chiếu H của A lên mặt phẳng (BCD).

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với đường thẳng CD.

c) Tìm toạ độ của K là trực tâm của tam giác BCD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (5; 3; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (3; 5; -1)$.

Mp(BCD) có VTPT: $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (12; -4; 16)$ hay (3; -1; 4)

Phương trình mp(BCD): 3x - y + 4z = 0 nên:

Đường thẳng AH đi qua A(3; 1; 2) vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương là (3; -1; 4) nên phương trình tham số của AH là:

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \Rightarrow H(3+3t; 1-t; 2+4t).$$

Thế vào mp(BCD) thì $t = -\frac{4}{13}$ nên $H\left(\frac{15}{13}; \frac{21}{13}; \frac{-6}{13}\right)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua B(-1; -3; 0) và vuông góc với CD nên có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{CD} = (-2; 2; 2)$ nên phương trình mp(P) là:

-2(x + 1) + 2(y + 3) + 2z = 0 hay x - y - z - 2 = 0.

c) Trực tâm K của tam giác BCD là giao điểm của các đường cao của tam giác BCD nên cũng chính là giao điểm của ba mặt phẳng: mp(BCD), mp(P), mp(Q) với (Q) là mặt phẳng đi qua C vuông góc với BD. Mp(Q); 3x + 5y - z - 15 = 0.

Giải hệ ba phương trình mặt phẳng (BCD), (P), (Q) ta được trực tâm:

$$K\left(\frac{113}{52}; \frac{75}{52}; \frac{-33}{26}\right).$$

Bài toán 5: Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) lần lượt có phương trình:

$$\Delta: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \quad (\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0.$$

a) Chứng minh rằng đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) và hãy tìm toạ độ giao điểm của chúng.

b) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên mặt phẳng (α).

c) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng của điểm A(1; 0; -1) qua mặt phẳng (α).

Giải

a) Đường thẳng Δ qua điểm $M_0(12; 9; 1)$ có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (4; 3; 1)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{n} = 4.3 + 3.5 + 1(-1) = 26 \neq -0$. Vậy Δ cắt (α).

Toạ độ giao điểm của Δ và (α) là I(0; 0; -2)

b) Phương trình mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với (α) là:

$8x - 7y - 11z - 22 = 0$.

Do đó hình chiếu Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng

$3x + 5y - z - 2 = 0$ và $8x - 7y - 11z - 22 = 0$.

Suy ra phương trình hình chiếu vuông góc của Δ trên (α):

Đặt z = t thì $\begin{cases} x = \frac{124}{61} + \frac{62}{61}t \\ y = -\frac{50}{61} - \frac{25}{61}t \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = \frac{124}{61} + \frac{62}{61}t \\ y = -\frac{50}{61} - \frac{25}{61}t \\ z = t \end{cases}$.

c) Phương trình đường thẳng AA' là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Tham số t ứng với giao điểm H của AA' và (α) là nghiệm của phương trình:

$3(1 + 3t) + 5(5t) - (-1 - t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 35t = -2.$

$$\Rightarrow t = -\frac{2}{35} \Rightarrow H\left(\frac{29}{35}; -\frac{2}{7}; -\frac{33}{35}\right)$$

H là trung điểm của AA' nên $A'\left(\frac{23}{35}; -\frac{4}{7}; -\frac{31}{35}\right)$

Bài toán 6: Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình:

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}, \ (\alpha): 2x + y + z - 8 = 0.$$

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm toạ độ giao điểm A của d và (α)

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α).

Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 5)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Gọi φ là góc giữa d và (α) thì $0^o \leqslant \varphi \leqslant 90^o$ và

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}$$

b) Giao điểm A thuộc d nên A(2 + 2t; -1 + 3t; 1 + 5t).

Thế x, y, z vào phương trình của (α), ta được:

$2(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (1 + 5t) - 8 = 0$, suy ra

$t = \frac{1}{3}$ và được giao điểm là $A\left(\frac{8}{3}; 0; \frac{8}{3}\right)$.

c) Hình chiếu d' của d lên (α) đi qua giao điểm A.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α) thì (P) có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{n}] = (-2; 8; -4)$ hay $(1; -4; 2)$.

Hình chiếu d' là giao tuyến của (α) với (P) nên có VTCP:

$\vec{u}' = [\vec{n}, \overrightarrow{n_P}] = (6; -3; -9)$ hay $(2; -1; -3)$.

Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số: $\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 2t \\ y = -t \\ z = \frac{8}{3} - 3t \end{cases}$

Bài toán 7: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình:

$5x - 6y - 6z + 13 = 0$, $x - 6y + 6z - 7 = 0$.

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm I.

b) Tìm toạ độ các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

Giải

a) Toạ độ giao điểm I của d_1 và d_2 thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ 5x - 6y - 6z + 13 = 0 \\ x - 6y + 6z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } I(1;\ 1;\ 2)$$

b) Vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u}_1 = (2;\ 2;\ 1)$

Vectơ chỉ phương của d_2 là $\vec{u}_2 = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-72;\ -18;\ -12)$ hay $(6;\ 3;\ 2)$.

Gọi φ là góc giữa d_1 và d_2 ta có: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|} = \dfrac{20}{21} \Rightarrow \sin\varphi \dfrac{\sqrt{41}}{21}$

Ta có $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} IA^2 \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{41}}{42} IA^2 = \dfrac{\sqrt{41}}{42}$ nên $IA = IB = 1$.

Vì A thuộc d_1 nên toạ độ của $A(1 + 2t;\ 1 + 2t;\ 2 + t)$

Do đó $IA = 3|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{3}$. Suy ra $A\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$

Vì B thuộc d_2 nên toạ độ của $B(1 + 6k;\ 1 + 3k;\ 2 + 2k)$.

Do đó $IB = 7|k| = 1 \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{7}$

Suy ra $B\left(\dfrac{13}{7}; \dfrac{10}{7}; \dfrac{16}{7}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{4}{7}; \dfrac{12}{7}\right)$

Vậy có bốn cặp điểm A, B nêu trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 8: Cho hai đường thẳng: d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-6}{3}$ và d': $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

a) Chứng minh hai đường thẳng đó chéo nhau. Tính khoảng cách giữa d và d'.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

c) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả d và d'.

Giải

d đi qua $M_o(0;\ 1;\ 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;\ 2;\ 3)$

d' đi qua $M'_o(1;\ -2;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (1;\ 1;\ -1)$.

a) Ta có $\overrightarrow{M_oM'_o} = (1;\ -3;\ -3)$, $[\vec{u}, \vec{u}'] = (-5;\ 4;\ -1)$ do đó

$[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{M_oM'_o} = -14 \neq 0$.

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Khoảng cách giữa d và d' là: $d(d, d') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|} = \frac{14}{\sqrt{25+16+1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$.

b) Đường vuông góc chung Δ của d và d' có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{u_\Delta} = [\vec{u}, \vec{u}'] = (-5; 4; -1)$.

Ta viết phương trình của mp(Δ, d) và mp(Δ, d'), giao của hai mặt phẳng đó chính là Δ.

Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d) là $[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}] = (14; 14; -14)$ hay (1; 1; -1). Do đó phương trình của mp(Δ, d) qua $M_0(0; 1; 6)$:

$(x - 0) + (y - 1) - (z - 6) = 0$ hay $x + y - z + 5 = 0$.

Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d') là $[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}'] = (-3; -6; -9)$ hay (1; 2; 3).

Do đó phương trình của mp(Δ, d') qua $M_0'(1; -2; 3)$:

$x - 1 + 2(y + 2) + 3(z - 3) = 0$ hay $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Suy ra phương trình tham số của đường vuông góc chung:

Đặt $z = t$ thì $\begin{cases} x = -16 + 5t \\ y = 11 - 4t \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = -16 + 5t \\ y = 11 - 4t \\ z = t \end{cases}$.

c) Giả sử đường thẳng Δ song song với Oz, cắt d và d' lần lượt tại A và B.

Ta có $A(t; 1+2t; 6+3t)$, $B(1+t'; -2+t'; 3-t')$

Nên $\overrightarrow{AB} = (1 + t' - t; -3 + t' - 2t; -3 - t' - 3t)$.

Vì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên $1 + t' - t = -3 + t' - 2t = 0$,

suy ra $t = -4$ và $t' = -5$.

Vậy A(-4; -7; -6) và $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 14)$ nên Δ: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t \end{cases}$.

Bài toán 9: Cho hai đường thẳng: d_1: $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$ và d_2: $\frac{3 - x}{7} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ O song song với cả d_1 và d_2.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung.

Giải

d_1 đi qua điểm $M_1(8; 5; 8)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1; 2; -1)$

d_2 đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-7; 2; 3)$.

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (8; 4; 6)$ hay $(2; 1; 4)$.

Mp(P) qua O có phương trình là $2x + y + 4z = 0$. Ta có M_1, M_2 không thuộc mặt phẳng này, vậy nó chính là mặt phẳng cần tìm.

b) Ta có $\overrightarrow{M_2M_1} = (5; 4; 7)$, $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (8; 4; 16)$, do đó:

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau nên khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\right|} = 2\sqrt{21}.$$

c) Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 với

$P \in d_1$; $Q \in d_2$: $P(8+t; 5+2t; 8-t)$, $Q(3-7t'; 1+2t'; 1 + 3t')$

Ta có $\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t; -4 + 2t' - 2t; -7 + 3t' + t)$ nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t'-6t = 6 \\ 62t'+6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Do đó $P(7; 3; 9)$, $Q(3; 1; 1)$.

Vậy đường vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

Bài toán 10: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(1; 3; 1)$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình: $x - y + 1 = 0$, $x + y + z - 4 = 0$. Tìm toạ độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 1.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 3; 2)$ nên d có VTCP $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6; -2; 3)$.

Phương trình của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Vì $D \in d$ nên $D(t; 1+t; 3-2t) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (t-1; t+2; -2t+4)$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|6(t-1) - 2(t+1) + 3(-2t+4)\right| = \frac{|2-t|}{3}$$

Do đó $V_{ABCD} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|2-t|}{3} = 1 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 5$.

Vậy có hai điểm D thoả mãn bài toán là D(-1; 0; 5) và D(5; 6; -7)

Bài toán 11: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1; 5; 3), B(4; 2; -5), C(5; 5; -1) và D(1; 2; 4).

a) Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm đó.

b) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (Oyz).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -3; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -3; 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12) \text{ nên } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0.$$

Suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có:

$$\begin{cases} 1+25+9+2a+10b+6c+d=0 \\ 16+4+25+8a+4b-10c+d=0 \\ 25+25+1+10a+10b-2c+d=0 \\ 1+4+16+2a+4b+8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=-19 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; -1) và bán kính $R = \sqrt{1+4+1+19} = 5$

b) mp(ABC) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$ hay (3; -5; 3) và đi qua điểm A(1; 5; 3) nên có phương trình:

$3(x - 1) - 5(y - 5) + 3(z - 3) = 0$ hay $3x - 5y + 3z + 13 = 0$.

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC): $h = \dfrac{|3.1 - 5.2 + 3.4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{43}}$.

Khoảng cách từ I tới mp(Oyz) là $d_2 = 1$ nên (S) cắt mp(Oyz) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

Bài toán 12: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

a) Tìm m để (P): $x - 2y + 2z - m = 0$ có điểm chung CA với (S).

b) Tìm toạ độ giao điểm của (S) với đường thẳng đi qua hai điểm M(1; 1; 1;) và N(2; -1; 5) và viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc của mặt cầu (S) tại các giao điểm đó.

c) Tìm các bán kính của các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ Oxy, Oyz, Ozx.

Giải

a) (S) có tâm I(1; 2; 3), $R = \sqrt{14}$

Điều kiện (P) có điểm chung với (S)

$$d(I, (P)) \leqslant R \Leftrightarrow \frac{|1-4+6-m|}{\sqrt{1+4+4}} \leqslant \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow |3 - m| \leqslant 3\sqrt{14} \Leftrightarrow 3 - 3\sqrt{14} \leqslant m \leqslant 3 + 3\sqrt{14}.$$

b) Phương trình của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

Tham số t ứng với giao điểm của đường thẳng MN với (S) là nghiệm của phương trình:

$$(1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (1 + 4t)^2 - 2(1 + t) - 4(1 - 2t) - 6(1 + 4t) = 0$$

$\Leftrightarrow 21t^2 - 12t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{3}{7}$.

Với t = 1 ta có giao điểm thứ nhất là: $M_1(2; -1; 5)$

Với $t = -\frac{3}{7}$ ta có giao điểm thứ hai là: $M_2\left(\frac{4}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM_1} = (1; -3; 2)$, $\overrightarrow{IM_2} = \left(-\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{26}{7}\right)$.

Mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại $M_1(2; -1; 5)$ có phương trình

$$1(x - 2) - 3(y + 1) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z - 15 = 0.$$

Mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại $M_2\left(\frac{4}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{5}{7}\right)$ có phương trình:

$$\frac{-3}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{7}\left(y - \frac{13}{7}\right) - \frac{26}{7}\left(z + \frac{5}{7}\right) = 0 \Leftrightarrow 21x + 7y + 182z + 105 = 0.$$

c) Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ thì:

$$r_1 = \sqrt{R^2 - z_1^2} = \sqrt{14 - 9} = \sqrt{5},\ r_2 = \sqrt{13},\ r_3 = \sqrt{10}.$$

Bài toán 13: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho mặt phẳng

(α): $2x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của d với (α).

b) Tính cosin của góc hợp bởi d và (α).

c) Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d, tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (Oxy).

Giải

a) Gọi M là giao điểm của d với (α).

Toạ độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 2; -1\right).$$

b) Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Gọi φ là góc giữa d và (α) thì: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{|2-2-4|}{3.3} = \dfrac{4}{9}$

Ta có $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

c) Gọi I(1+t; 1+2t; -2t) $\in$ d là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Do (S) tiếp xúc với (α) và mặt phẳng (Oxy) nên:

$$d(I, (\alpha)) = d(I, Oxy)) \Leftrightarrow \frac{|2(1+t)-(1+2t)-4t+1|}{3} = |2t|$$

$$\Leftrightarrow |2t-1| = |3t| \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{5}$$

Với t = -1 thì (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính R = 2 nên (S) có phương trình $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Với $t = \dfrac{1}{5}$ thì (S) có tâm $I\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{7}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{2}{5}$ nên (S) có phương trình

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

Bài toán 14: Cho đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): x - z. sinα + cosα = 0, (Q): y - z.cosα - sinα = 0.

Chứng minh đường thẳng d tạo với trục Oz một góc không đổi.

Giải

(P) có VTPT $\vec{n}$ = (1; 0; -sinα)

(Q) có VTPT $\vec{m}$ = (0; 1; -cosα)

Do đó d có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{m}]$ = (sinα; coα; 1)

Trục Oz có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Ta có $\cos(d; Oz) = |\cos(\vec{u}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy đường thẳng d hợp Ox góc 45^0 không đổi.

Bài toán 15: Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$ trong đó a, b, c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2 > 0$. Chứng minh đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm cố định A(1; 1; 5).

Ta có: $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz.

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{k}\right)\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{c}{c\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\varphi = 45^0$: không đổi.

Bài toán 16: Trong không gian toạ độ Oxyz, xét đường thẳng Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): $mx + y - mz - 1 = 0$ và (α'): $x - my + z - m = 0$.

a) Chứng minh góc giữa Δ_m và trục Oz không đổi.

b) Chứng minh khoảng cách giữa Δ_m và Oz không đổi.

Giải

a) Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng với các vectơ pháp tuyến là

$\vec{n_1} = (m; 1; -m)$ và $\vec{n_2} = (1; -m; 1)$.

Do đó Δ_m có vectơ chỉ phương là: $\vec{u_m} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (1 - m^2; -2m; -1 - m^2)$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Nếu gọi φ_m là góc giữa hai đường thẳng Δ_m và Oz thì:

$$\cos\varphi_m = \frac{|\vec{u_m}.\vec{k}|}{|\vec{u_m}||\vec{k}|} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + 4m^2 + (1 + m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra $\varphi_m = 45^0$: không đổi.

b) Điểm M(x; y; z) thuộc Δ_m khi toạ độ của M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \end{cases}$$

Khử z từ hệ phương trình, ta được phương trình:

$$2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0.$$

Đây là phương trình của mặt phẳng (α_m) chứa Δ_m và song song với trục Oz.

Do đó, khoảng cách giữa Δ_m và Oz bằng khoảng cách từ gốc O(0; 0; 0) thuộc Oz tới mp(α_m).

Vậy khoảng cách đó bằng:

$$d_m = \frac{|-1-m^2|}{\sqrt{4m^2+(1-m^2)^2}} = \frac{1+m^2}{\sqrt{m^4+2m^2+1}} = 1 \text{: không đổi.}$$

Bài toán 17: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và hợp với mặt phẳng (Q): 2x - y - 2z - 2 = 0 một góc bé nhất.

Giải

Gọi (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Vì (P) chứa d nên đi qua M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3):

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ -A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ D = B - 2C \end{cases}$$

Do đó (P): $(2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$.

Mp(Q) có VTPT $\vec{n}' = (2; -1; -2)$.

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thì: $\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|B|}{\sqrt{5B^2 + 4BC + 2C^2}}$

Xét B = 0 thì $\varphi = 90^0$.

Xét $B \neq 0$, đặt $m = \dfrac{C}{B}$ thì: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2+4m+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2(m+1)^2+3}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dấu "=" khi m = -1 nên B = -C, khi đó $\varphi < 90^0$ là góc cần tìm.

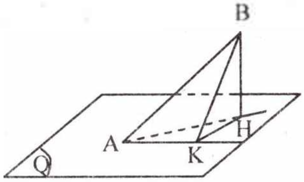
Vậy (P): x + y - z + 3 = 0.

Bài toán 18: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P): x - 2y + 2z - 5 = 0 và hai điểm A(-3; 0; 1), B(1; -1; 3).

Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Giải



Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P).

Phương trình (Q): x - 2y + 2z + 1 = 0.

K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q).

Ta có BK ⩾ BH nên AH là đường thẳng cần tìm.

Toạ độ H(x; y; z) thoả mãn: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$. Vậy phương trình Δ: $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Bài toán 19: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho ba đường thẳng

d_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, d_2: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ và d_3: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng d_3 đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Vì A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 nên

A(1+a; -2a; 1 + a), B(2-b; 3b; - 1-2b)

Khi đó $\overrightarrow{AB}$=(1 - b - a; 3b + 2a; -2 - 2b - a)

Đường thẳng d_3 có VTCP là $\overrightarrow{u_3}$=(2; 1; 1). Ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_3}=0 \Leftrightarrow 2(1-b-a)+(3b+2a)+(-2-2b-a)=0$

$\Rightarrow$ b = -a. Khi đó $\overrightarrow{AB}$=(1; -a; -2 + a)

Ta có AB = $\sqrt{1+a^2+(a-2)^2}=\sqrt{2(a-1)^2+3}\geqslant\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = 1 nên A(2; -2; 2), $\overrightarrow{AB}$(1; -1; -1).

Vậy d: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài tập 1:

a) Tính khoảng cách từ điểm: A(1; 2; 1)

đến đường thẳng (d): $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{4}=z+3$.

b) Tính góc giữa đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$

mặt phẳng (P): x + y + z - 3 = 0.

HD-ĐS

a) Kết quả $d(A; (d)) = \sqrt{\frac{347}{26}}$ b) Kết quả $\sin\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Bài tập 2: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) $(d_1)\ \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ và (d_2): $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$.

b) d: $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2}$, d': $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases}$

HD-ĐS

a) Kết quả hai đường thẳng song song; $d((d_1); (d_2)) = 25$

b) Kết quả $d(d, d') = \frac{2\sqrt{110}}{55}$.

Bài tập 3: Tìm điểm C trên

a) đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (P): 8x + 11y + 2z - 3 = 0 mà tam giác ABC vuông tại B với các điểm A(4; -6; 3), B(5; -7; 3).

b) trên mặt phẳng (P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0 sao cho tam giác ABC là tam giác đều với các điểm A(0; 0; -3), B(2; 0; -1).

HD-ĐS

a) Kết quả $C\left(-\frac{4}{3}; -\frac{40}{3}; \frac{5}{3}\right)$ b) Kết quả C (2; -2; -3), $C(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$

Bài tập 4: Tìm toạ độ của điểm M thuộc:

a) mặt phẳng 2x+2y+z-3 = 0 sao cho MA = MB = MC với ba điểm A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 0; 1).

b) đường thẳng d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) 2x + y - 2z + 9 = 0 bằng 2.

HD-ĐS

a) Kết quả M(2; 3; -7) b) Kết quả M(-3; 5; 7), M(3; -7; 1)

Bài tập 5: Tìm điểm M trên

a) trục Ox cách đều điểm A(4; 2; 3), và mặt phẳng (P) có phương trình:

x - y - 3z - 17 = 0.

b) mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P): 2x - y + 2z - 14 = 0 lớn nhất.

HD-ĐS

a) Kết quả M(-1; 0; 0), M'(7; 0; 0) b) Kết quả M (-1; -1; -3)

Bài tập 6: Tìm quỹ tích các điểm M mà có tổng bình phương khoảng cách đến 3 mặt phẳng: x - y + 4 = 0, x + y -2 = 0, z + 1 = 0 bằng 20.

HD-ĐS

Kết quả mặt cầu $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 20$

Bài tập 7: Tìm điểm M thuộc mặt phẳng:

a) α: x - 2y + 2z - 9 = 0 sao cho MA + MB nhỏ nhất với A (1, 3, -2), B (13, 7, -4).

b) (α): x + y + z - 4 = 0 sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất với ba điểm:

A(3; 0; 0), B(0; -6; 0), C(0; 0; 6).

HD-ĐS

a) Kết quả AB song song α, M(9;1;1).

b) Kết quả M(2; -1; 3)

Bài tập 8: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

HD-ĐS

Kết quả: x - 4y + z - 3 = 0.

O CHỦ ĐỀ XV

CÁC HÌNH KHỐI VÀ ỨNG DỤNG TOẠ ĐỘ

DẠNG TOÁN 1. CÁC HÌNH KHỐI TỌA ĐỘ

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A'B'C': $V = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AA'}\right|$

Góc giữa 2 đường thẳng: d có VTCP $\vec{u}$ *và d' có VTCP* $\vec{v}$ *thì*

$$\cos(d;d') = |\cos(\vec{u},\vec{v})| = \frac{|x.x'+y.y'+z.z'|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Góc giữa 2 mặt phẳng: mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ *và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến* $\vec{n}'$ *thì cos((P), (Q))* $= \left|\cos(\vec{n}, \vec{n}')\right|$

Góc giữa đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}$:

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$$

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$d(M_0; d) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM_0}; \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$: $d(d_1, d_2) = \dfrac{\left|[\vec{u_1}, \vec{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|[\vec{u_1}, \vec{u_2}]\right|}$

Bài toán 1: Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có bốn điểm A(2; 4; -1), B(1; 4; -1), C(2; 4; 3), D(2; 2; -1).

a) Chứng minh dường thẳng AB và AC, AB và AD, AD và AC vuông góc nhau.

b) Lập phương trình đường vuông góc chung d của AB và CD.

c) Tính góc hợp bởi d và mp(ABD).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -2; 0)$

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Vậy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.

b) Ta có $AB \perp AC, AD \Rightarrow AB \perp (ACD)$.

Đường thẳng CD nằm trên mặt phẳng (ACD) mà mặt phẳng (ACD) vuông góc với AB nên dường vuông góc chung d của AD và CD là đường thẳng qua A và vuông góc với CD.

Vậy dường thẳng d có vectơ chỉ phương:

$\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (0; -4; 2)$ hay $(0; -2; 1)$

và phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

c) Mặt phẳng (ABD) có VTPT: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (0; 0; 2)$.

Vậy góc nhọn φ giữa Δ và mặt phẳng (ABD) xác định bởi:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Bài toán 2: Trong không gian Oxyz cho tứ diện $OM_1M_2M_3$ với ba điểm $M_1(2; 1; 1)$; $M_2(3; 1; 2)$, $M_3(0; -1; -4)$.

a) Tính diện tích tam giác $M_1M_2M_3$ và thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm M_1; M_2; M_3.

c) Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm M_1, M_2 và song song với đường thẳng OM_3.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2; -2; -5)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|$$

Ta có $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (2; 3; -2)$

Vậy $S = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$ là: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3}\right|$

Ta có $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right] = (1; -1; -1)$; $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right]\overrightarrow{OM_3} = 0 + 1 + 4 = 5$

Vậy $V = \frac{5}{6}$.

b) Vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (2; 3; -2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Vậy (α) có phương trình: $2(x - 2) + 3(y - 1) - 2(z - 1) = 0$ hay $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

c) Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OM_3} = (0; -1; -4)$ nên mặt phẳng (γ) có vectơ pháp tuyến.

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{OM_3}\right] = (1; 4; -1).$$

Vậy (γ) có phương trình: $1.(x - 2) + 4(y - 1) - 1.(z - 1) = 0$ hay $x + 4y - z - 5 = 0$.

Bài toán 3: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm A(4; -1; 2), B(1; 2; 2) và C(1; -1; 5).

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b) Viết phương trình mp(ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mp(ABC) và các mặt phẳng toạ độ.

c) Tìm toạ độ điểm D sao cho ABCD là tứ diện đều.

Giải

a) Ta có $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (2+1)^2 + (2-2)^2} = 3\sqrt{2}$

Tương tự $BC = CA = 3\sqrt{2}$.

Suy ra AB = BC = CA và do đó, ABC là tam giác đều.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9, 9, 9)$

Mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và đi qua điểm A(4; -1; 2) nên có phương trình: $x - 4 + y + 1 + z - 2 = 0$ hay $x + y + z - 5 = 0$.

Mặt phẳng ABC) cắt trục toạ độ tại các điểm M(5; 0; 0), N(0; 5; 0) và P(0; 0; 5).

Vậy mặt phẳng đó và các mặt phẳng toạ độ tạo thành tứ diện OMNP có thể tích là:

$$V = \frac{1}{6} OM.ON.OP = \frac{5.5.5}{6} = \frac{125}{6}.$$

c) ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi D nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $DA = AB = 3\sqrt{2}$.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là trọng tâm của tam giác G(2; 0; 3). Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng đi qua G, có vectơ chỉ phương

$\vec{n} = (1; 1; 1)$ nên có phương trình: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Do đó D(2+t; t; 3+t) và $DA^2 = 18$

$$\Leftrightarrow (2 + t - 4)^2 + (t + 1)^2 + (3 + t - 2)^2 = 18 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Vậy có 2 điểm $D_1(4; 2; 5)$ và $D_2(0; -2; 1)$.

Bài toán 4: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M.

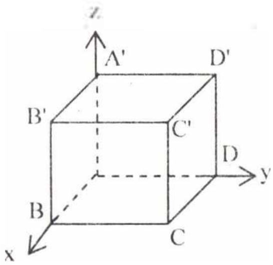
b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) ⊥ (MBD)

Giải

a) Từ giả thiết ta có: C(a; a; 0), C'(a; a; b) $\Rightarrow M(a; a; \frac{b}{2})$

Nên $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (0; a; \frac{b}{2})$, $\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$



Do đó: $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right]\overrightarrow{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$

b) Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến là:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

mặt phẳng (A'BD) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(ab; ab; a^2\right)$

Do đó (BDM) $\perp$ (A'BD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

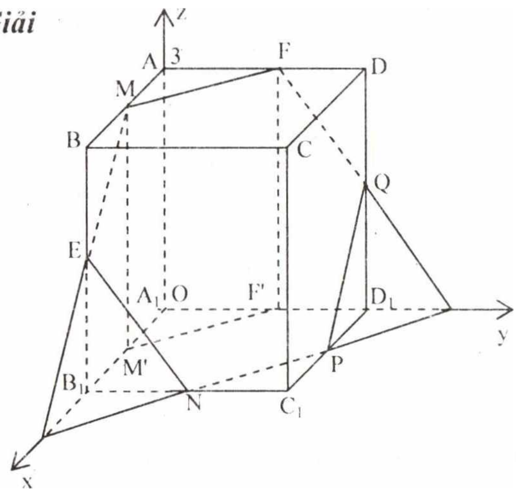
Bài toán 5: Trong không gian Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $A_1(0; 0; 0)$, $B_1(1; 0; 0)$, $D_1(0; 2; 0)$, $A(0; 0; 3)$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, B_1C_1, C_1D_1, D_1D:

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa chúng.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (α). Tính thể tích của khối chóp có đỉnh C và đáy là thiết diện đó.

c) Tìm toạ độ điểm I đối xứng với điểm A_1 qua đường thẳng MP. Hỏi điểm I nằm trong hay ngoài hình hộp?.

Giải



a) Ta có $M(\frac{1}{2}; 0; 3)$,

$N(1; 1; 0)$,

$P(\frac{1}{2}; 2; 0)$,

$Q(0; 2; \frac{3}{2})$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là:

$6x + 3y + 2z - 9 = 0$.

Thay toạ độ của điểm Q vào phương trình trên, ta thấy nó thoả mãn.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng, và phương trình của mặt phẳng (α). là:

$6x + 3y + 2z - 9 = 0$.

b) Thiết diện là lục giác MENPQF có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình hộp chữ nhật ta có C(1; 2; 3)

Gọi h là chiều cao của hình chóp C.MENPQF thì:

$$h = d(C, (\alpha)) = \frac{|6.1 + 3.2 + 2.3 - 9|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{9}{7}.$$

Gọi M', F' là hình chiếu của M và F lên mp($A_1B_1C_1D_1$) thì lục giác $M'B_1NPD_1F'$ là hình chiếu của lục giác MENPQF lên mp($A_1B_1C_1D_1$).

Gọi φ là góc giữa mp(α) và đáy của hình hộp thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha}, \vec{k}\right)\right| = \frac{2}{7}$$

$$S_{M'B_1NPD_1F'} = \frac{3}{2} \text{ và } S_{M'B_1NPD_1F'} = S_{MENPQF}.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow S_{MENPQF} = \frac{S_{M'B_1NPD_1F'}}{\cos\varphi} = \frac{21}{4}. \text{ Vậy } V_{C.MENPQF} = \frac{1}{3}.\frac{21}{4}.\frac{9}{7} = \frac{9}{4}.$$

c) Mặt phẳng qua A_1 và vuông góc với MP có phương trình: $2y - 3z = 0$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng MP và mặt phẳng trên, ta có: $H\left(\frac{1}{2}; \frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

Từ đó ta tìm được toạ độ điểm I là: $\left(1; \frac{36}{13}; \frac{24}{13}\right)$

Điểm T(x; y; z) nằm trong hình hộp ⇔ $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.

Nhưng tung độ của điểm I là $y = \frac{36}{13} > 2$.

Vậy điểm I nằm ngoài hình hộp.

Bài toán 6: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.

Biết A(a; 0; 0), B(-a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(-a; 0; b), a > 0, b > 0.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi mà a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = (0; 0; b)$

nên $C_1(0; 1; b)$, $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2a; 0; b)$

và $[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}] = (2b; 0; 2a)$

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right].\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$d(B_1C; AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a+b}{2} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = 2. Vậy khoảng cách giữa B_1C và AC_1 lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi a = b = 2.

Bài toán 7: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; -3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), $B_1(4; 0; 4)$

a) Tìm toạ độ đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mp(BCC_1B_1).

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại N. Tính độ dài MN.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = (0; 0; 4)$ nên $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$ và

$\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$ nên $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (12; 16; 0)$ là VTPT của (BCC_1B_1)

(BCC_1B_1): $12(x - 4) + 16y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

Bán kính $R = d(A; (BCC_1B_1)) = \frac{24}{5}$ nên phương trình mặt cầu:

$$x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$$

b) Ta có: $M(2; -\frac{3}{2}; 4)$, $\overrightarrow{AM} = (2; \frac{3}{2}; 4)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4)$

(P) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (-6; -24; 12)$

Suy ra (P): $x + 4y - 2z + 12 = 0$

$\overrightarrow{A_1C_1} = (0; 6; 0)$ nên $A_1C_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}$

N thuộc A_1C_1 nên N(0; -3 + t; 4) và N thuộc (P) nên t = 2, do đó N(0; -1; 4).

Vậy $MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Bài toán 8: Cho hai điểm S(0; 0; 1), A(1; 1; 0), hai điểm thay đổi M(m; 0; 0), N(0; n; 0) sao cho m + n = 1, m > 0, n > 0.

a) Chứng minh thể tích V của hình chóp S.OMAN không phụ thuộc vào m và n.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

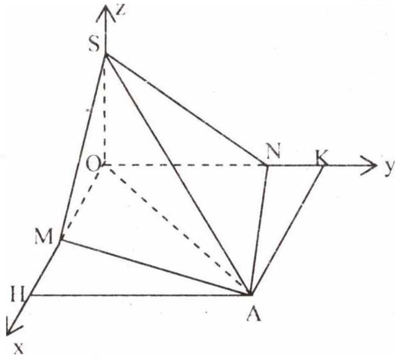
Giải

a) Hình chóp S.OMAN có chiều cao SO = 1 không đổi, tứ giác đáy nằm trong mặt phẳng Oxy có diện tích:

$S = S_{AOM} + S_{AON}$

$= \frac{1}{2}OM.AH + \frac{1}{2}ON.AK$

$= \frac{1}{2}(m + n) = \frac{1}{2}$: không đổi.



b) Phương trình mặt phẳng (SMN) là

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0.$$

Vì m + n = 1 nên ta có:

$$d(A, (SMN)) = \frac{|n.1 + m.1 + 0 - mn|}{\sqrt{n^2 + m^2 + m^2.n^2}} = 1 : \text{không đổi.}$$

Vậy (SMN) tiếp xúc với mặt cầu tâm A, bán kính R = 1.

Bài toán 9: Trong không gian Oxyz, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải

a) C(-2; 0; 0), D(0; -1; 0), M(-1; 0; $\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

$$\cos(SA, BM) = |\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM})| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SA, BM) = 30^0$$

Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM} = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$

$$\text{nên } d(SA, BM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

b) MN // AB, CD nên N trung điểm SO, N(0; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SN} = (0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2})$

và $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$. Ta có:

$V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SB}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy: $S_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$

DẠNG TOÁN 2. ỨNG DỤNG VÀO KHỐI TỨ DIỆN VÀ KHỐI CHÓP

Dưa tọa độ không gian vào để giải bài toán hình học không gian thuần túy: tính toán, chứng minh, tìm quan hệ,... bằng cách chọn một hệ trục Oxyz thuận lợi gồm 3 tia đôi một vuông góc nhau.

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến đường thẳng d qua A và có VTCP

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}: d(M_0;d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_0};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right|}.$$

Bài toán 1: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện cũng đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đó. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD.

Chứng minh rằng $\frac{GA}{GA'} = 3$.

Giải

Ta giải bằng phương pháp toạ độ. Trong không gian toạ độ Oxyz, giả sử

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3, z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$

Thì trọng tâm A' của tam giác BCD, trọng tâm tứ diện G:

$$A'\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3};\frac{y_2+y_3+y_4}{3};\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

Do đó:

$$\overrightarrow{GA}=\left(\frac{3x_1-x_2-x_3-x_4}{4};\frac{3y_1-y_2-y_3-y_4}{4};\frac{3z_1-z_2-z_3-z_4}{4}\right)$$

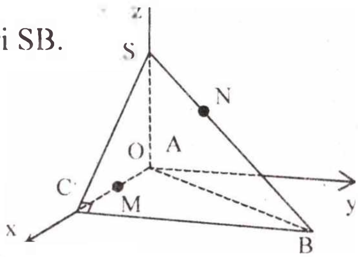
$$\overrightarrow{GA'}=\left(\frac{-3x_1+x_2+x_3+x_4}{12};\frac{-3y_1+y_2+y_3+y_4}{12};\frac{-3z_1+z_2+z_3+z_4}{12}\right)$$

Suy ra: $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'} \Rightarrow$ G, A, A' thẳng hàng và $\frac{GA}{GA'} = 3$.

Bài toán 2: Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.



Giải

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy.

Khi đó:

A(0; 0; 0), C(b; 0; 0), B(b; a; 0), S(0; 0; h), M($\frac{b}{2}$; 0; 0)

$\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$

Gọi N(x; y; z) thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên:

$$x=\frac{b}{3}, y=\frac{a}{3} \text{ và } z-h=\frac{-h}{3} \Rightarrow z=\frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$$

a) Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)=\left(-\frac{b}{6};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$

Nên $MN=\sqrt{\frac{b^2}{36}+\frac{a^2}{9}+\frac{4h^2}{9}}=\frac{1}{6}\sqrt{b^2+4a^2+16h^2}$

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2.$$

Bài toán 3: Cho tứ diện SABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho: $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$.

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Giải

a) Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc toạ độ $O \equiv A$. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$.

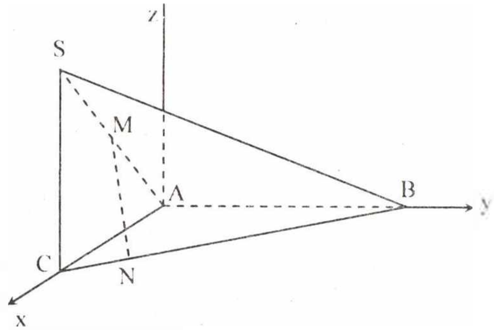
Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

$A(0; 0; 0)$, $B(0; a\sqrt{2}; 0)$, $C(a\sqrt{2}; 0; 0)$, $S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$

$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$;

$N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-t); \frac{t\sqrt{2}}{2}; -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$



$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}$$

$$= \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geqslant \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \frac{2a}{3}$.

b) Khi MN ngắn nhất thì: $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$ và

$$N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right).$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

Bài toán 4: Cho tứ diện nội tiếp trong mặt cầu tâm O và có AB = AC = AD.
Gọi G là trọng tâm tam giác ACD, E, F là trung điểm BG, AE.
Chứng minh: $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

Giải

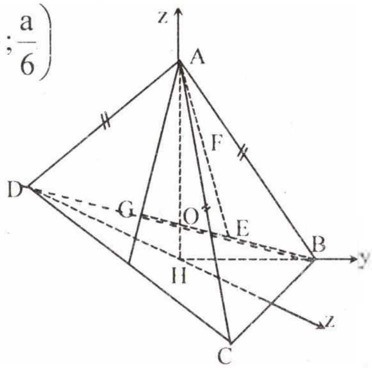
AB = AC = AD và OB = OC = OD
$\Rightarrow OA \perp (BCD)$ tại chân đường cao H với HB = HC = HD.
Chọn H làm gốc toạ độ, với hệ trục Hx, Hy, Hz sao cho HA là trục Hz, HB là trục Hy, HD là trục Hx.

$A(0; 0; a)$, $B(0; b; 0)$; $C(c_1; c_2; 0)$, $D(d_1; d_2; 0)$ và $O(0; 0; z)$

Suy ra

$$G\left(\frac{c_1+d_1}{3}; \frac{c_2+d_2}{3}; \frac{a}{3}\right), E\left(\frac{c_1+d_1}{6}; \frac{b}{2}+\frac{c_1+d_2}{3}; \frac{a}{6}\right)$$

$$F\left(\frac{c_1+d_1}{12}; \frac{b}{4}+\frac{c_2+d_2}{12}; \frac{7a}{12}\right)$$



và $$\overrightarrow{OF} = \left(\frac{c_1+d_1}{12}; \frac{b}{4}+\frac{c_2+d_2}{12}; \frac{7a}{12}-z\right)$$

$$\overrightarrow{BG} = \left(\frac{c_1+d_1}{3}; \frac{c_2+d_2}{3}-b; \frac{a}{3}\right)$$

$\overrightarrow{AC} = (c_1; c_2; -a)$, $\overrightarrow{OD} = (d_1; d_2; -z)$

Theo giả thiết OA = OB = OC = OD $\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$

$\Leftrightarrow (a - z)^2 = b^2 + z^2 = c_1^2 + c_2^2 + z^2 = d_1^2 + d_2^2 + z^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2az = b^2 = c_1^2 + c_2^2 = d_1^2 + d_2^2$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{BG} = 0 \Leftrightarrow (c_1 + d_1)^2 + (c_2 + d_2)^2 - 9b^2 + 7a^2 - 12az = 0$ (2)

Khai triển (2) và thay thế (1) ta được:

(2) $\Leftrightarrow a_2 + c_1d_1 + c_2d_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$: đpcm.

Bài toán 5: Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC, OCA là những tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Chứng minh:
a) Tam giác ABC có ba góc nhọn.
b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

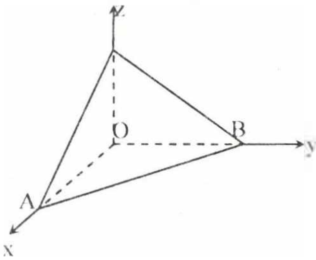
Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với các tia Ox, Oy, Oz lần lượt là các tia OA, OB, OC. Khi đó ta có $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$. Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.

Chứng minh tương tự, ta có các góc B và C của tam giác đó cũng nhọn.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1$



nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Mặt phẳng (OBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{i}=(1;0;0)$.

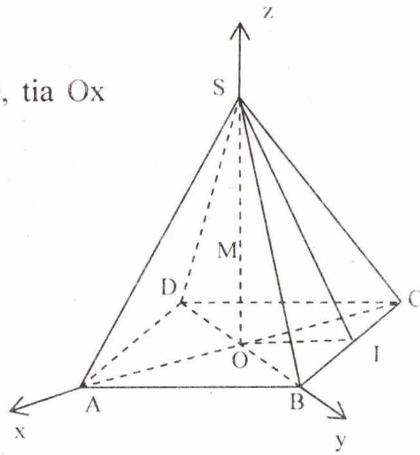
Ta có: $\cos^2\alpha=\left(\frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}||\vec{i}|}\right)^2=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

Tương tự: $\cos^2\beta=\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$\cos^2\gamma=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy góc α. Tìm tanα để SA vuông góc SC.

Giải



Chọn hệ trục Oxyz có O là tâm đáy ABCD, tia Ox chứa A, toa Oy chứa B, tia Oz chứa S. Ta có:

$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

và $S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

nên $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

Ta có $SA\perp SC\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\tan^2\alpha=0\Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha=2\Leftrightarrow \tan\alpha=\sqrt{2}$$

Vậy nếu tanα = $\sqrt{2}$ thì hai cạnh bên đối diện của hình chóp vuông góc với nhau.

Bài toán 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

Giải

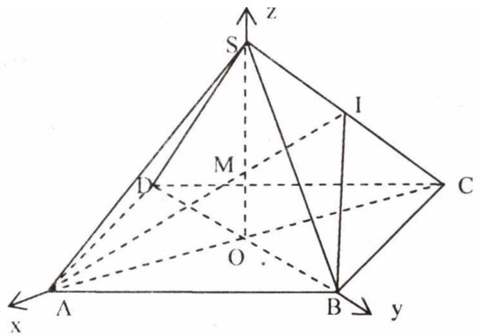
Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, trục Ox chứa OA, trục Oy chứa OB, trục Oz chứa SO.

Khi đó:

$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right)$

$B\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right)$, S(0; 0; h).



Ta có giao điểm M của SO và AI là trọng tâm tam giác SAC nên $M\left(0;\ 0;\frac{h}{3}\right)$.

Mặt phẳng đi qua A, B, MI cũng chính là mặt phẳng (ABM) nên có phương trình là: $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{h}{2}}=1$.

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABM) là:

$$d=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^2}+\frac{9}{h^2}}}=\frac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}.$$

Bài toán 8: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

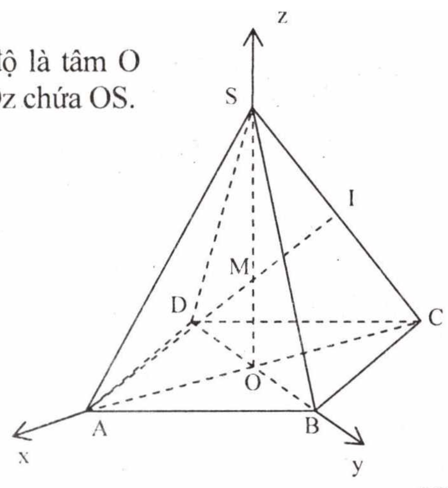
Giải

Ta chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa OB, tia Oz chứa OS.

Khi đó: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, S(0; 0; h).



Ta có giao điểm M của SO và AI chính là trọng tâm tam giác SAC nên M(0; 0; $\frac{h}{3}$)

Mặt phẳng (ABI) cũng chính là mặt phẳng (ABM).

Vậy mp(ABI) có phương trình là $\dfrac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{z}{\frac{h}{2}} = 1$

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABI) là: d(S; (ABI)) = $\dfrac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$.

Bài toán 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a, SA vuông góc (ABCD). Gọi M, N là trung điểm AD, SC, gọi I là giao điểm BM và AC.

Chứng minh (SAC) ⊥ (SMB) và tính thể tích khối ANIB.

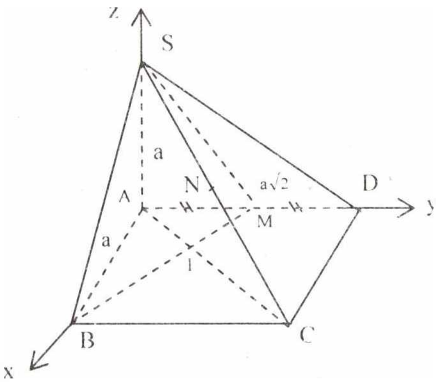
Giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

S(0; 0; a), A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; $a\sqrt{2}$; 0) thì:

D(0; $a\sqrt{2}$; 0), M(0; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 0),

N($\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{2}$)



Vì $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow IA = \dfrac{1}{3}AC$

$\Rightarrow I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{BM}(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$, $\overrightarrow{BS}(-a; 0; a)$

Mặt phẳng (SBM) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

Mặt phẳng (SBM) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

Vì $\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 0$ nên 2 mặt phẳng (SAC), (SMB) vuông góc.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}}; \frac{a^2}{6}; 0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$

$$V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

Bài toán 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD.

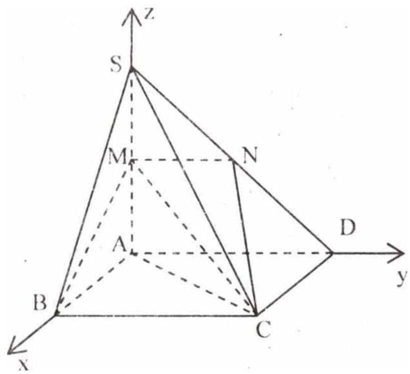
a) Tính khoảng cách từ A đến mp(BCM); khoảng cách giữa hai đường SB và CN.

b) Tính cosin của góc hợp bởi 2 mặt phẳng (SCD), (SBC).

c) Tính tỉ số thể tích của hai phần hình chóp được chia bởi mặt phẳng (BCM).

Giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho gốc O là điểm A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa SA.



Khi đó A(0; 0; 0),

B(a; 0; 0),

C(a; a; 0),

D(0; a; 0),

S(0; 0; 2a),

M(0; 0; a), N(0; $\frac{a}{2}$; a)

a) $\overrightarrow{BC}$ = (0; a; 0), $\overrightarrow{BM}$ = (-a; 0; a)

$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] = (a^2; 0; a^2)$

Do đó, mặt phẳng (BCM) có một vectơ pháp tuyến là (1; 0; 1), suy ra phương trình mặt phẳng (BCM) là: 1(x - a) + 1(z - 0) = 0 $\Leftrightarrow$ x + z - a = 0.

Vậy khoảng cách từ A đến mp(BCM) là: $d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Ta có: $\overrightarrow{BS}$ = (-a; 0; 2a), $\overrightarrow{CN} = (-a; -\frac{a}{2}; a)$, $\overrightarrow{SC}$ = (a; a; -2a)

Suy ra $[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}] = \left(a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}].\overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN là:

$$d(SB, CN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right]\right|} = \frac{2a}{3}.$$

b) Vì $[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (0; 2a^2; a^2)$ nên mp(SCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (0; 2; 1).

Vì $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; a^2)$ nên mp(SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$ = (2; 0; 1).

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC)

Ta có: $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

c) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2}{3}a^3$.

Vì M là trung điểm của SA, suy ra d(S, (BCM)) = d(A, (BCM)) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Hình chóp S.ABCD bị mp(BCM) chia thành hai phần, trong đó có một phần là hình chóp S.BCNM.

Hình chóp này có đường cao bằng d(S; (BCM)) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và đáy là hình thang BCNM có diện tích bằng $\frac{1}{2}(a + \frac{a}{2})a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$.

Suy ra: $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{V_{S.BCMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{3}{8}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp S.ABCD chia bởi mp(BCM) là $\frac{3}{5}$.

DẠNG TOÁN 3. ỨNG DỤNG VÀO KHỐI HỘP VÀ LĂNG TRỤ

Đưa tọa độ không gian vào để giải bài toán hình học không gian thuần túy: tính toán, chứng minh, tìm quan hệ,... bằng cách chọn một hệ trục Oxyz thuận lợi gồm 3 tia đôi một vuông góc nhau.

Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A'B'C': $V = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AA'}|$

Góc giữa 2 đường thẳng: d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$ thì

$$\cos(d;d') = \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|x.x'+y.y'+z.z'|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Góc giữa 2 mặt phẳng: mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$ thì cos((P), (Q)) = $|\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$

Góc giữa đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}$:

$sin(d, (P)) = |cos(\vec{u}, \vec{n})|$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$:

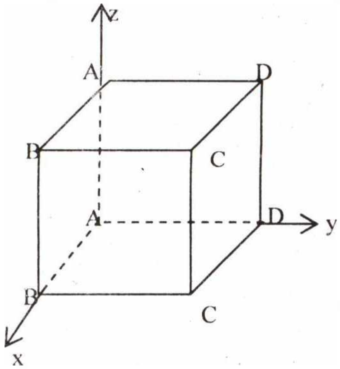
$$d(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}.$$

Bài toán 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a chứng minh:

a) Hai mặt phăng (AB'D') và (BC'D) song song với nhau.

b) Đường chéo A'C vuông góc với hai mặt phẳng nói trên.

Giải



Chọn A' làm gốc toạ độ và

B'(a; 0; 0),

D'(0; a; 0),

A(0; 0; a).

Ta tính được toạ độ các đỉnh còn lại của hình lập phương.

a) Mặt phẳng (AB'D') có phương trình:

$$x + y + z - 1 = 0$$

Mặt phẳng (BC'D) có phương trình: $x + y + z - 2 = 0$.

Hai mặt phẳng này song song với nhau vì $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-2}$

b) Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1)$.

Vectơ này cũng là VTPT của hai mặt phẳng song song nói trên nên đường chéo AC' vuông góc với 2 mp(AB'D'), (BC'D).

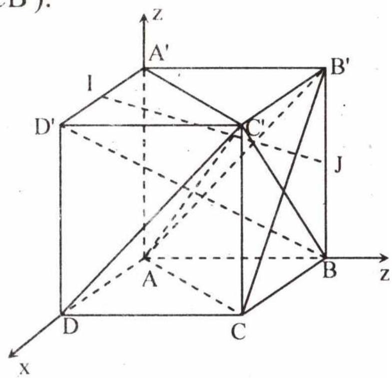
Bài toán 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của A'D' và B'B.

a) Chứng minh rằng IJ $\perp$ AC'. Tính độ dài đoạn thẳng IJ.

b) Chứng minh rằng D'B $\perp$ mp(A'C'D), mp(ACB').

c) Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D.

Giải



a) Chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho

A(0; 0; 0), D(a; 0; 0), B(0; a; 0),

A'(0; 0; a).

Ta có C' (a; a; a),

B'(0; a; 0), D'(a; 0; a)

Nên: $I(\frac{a}{2}; 0; a)$; $J(0; a; \frac{a}{2})$

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (0 - \frac{a}{2}; a - 0; \frac{a}{2} - a) = (-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2})$

$$\overrightarrow{AC'} = (a - 0; a - 0; a - 0) = (a; a; a)$$

nên $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC'} = -\frac{a}{2}.a + a.a - \frac{a}{2}.a = -a^2 + a^2 = 0$.

Vậy IJ ⊥ AC'. Đoạn $IJ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) Để chứng minh D'B ⊥ mp(A'C'D, ta chứng minh

$\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$

Ta có $\overrightarrow{D'B} = (-a; a; -a)$, $\overrightarrow{A'C'} = (a; a; 0)$; $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$

Do đó $\overrightarrow{D'B}\overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được D'B ⊥ mp(ACB')

c) $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{A'D})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{A'D}\right|}{IJ.A'D} = \left|\frac{-\frac{a}{2}.a + a.0 - \frac{a}{2}(-a)}{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2}}\right| = 0$$

Vậy $\varphi = 90^o$.

Bài toán 3: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a, trên BC_1 lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng. Tính diện tích S của tam giác MAB_1.

Giải

Chọn hệ Oxyz sao cho B ≡ O, $B_1(a; 0; 0)$, $C_1(a; a; 0)$,

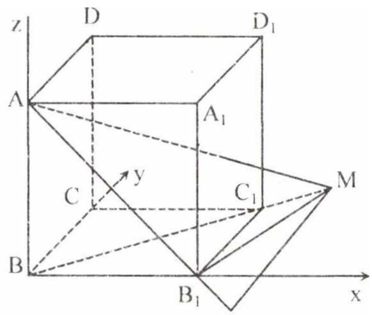
$C(0; a; 0)$, $A(0; 0; a)$, $A_1(a; 0; a)$, $D_1(a; a; a)$, $D(0; a; a)$.

Vì $M \in BC_1$ nên gọi $M(x; x; 0)$

Ta có $\overrightarrow{D_1M} = (x - a; x - a; -a)$

$\overrightarrow{DA_1} = (-a; a; 0)$

$\overrightarrow{AB_1} = (a; 0; -a)$



Vì $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng nên

$$\left[\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}\right]\overrightarrow{AB_1} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$$

Do đó $M\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{a}, 0\right)$ nên $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3a}{2}, -\frac{3a}{2}, a\right)$

$$\overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}, 0\right)$$

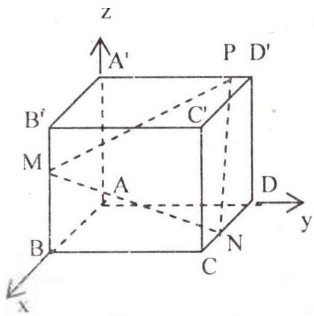
Vậy: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{19}}{4}$.

Bài toán 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Trên các cạnh BB', CD, AD' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = DP = ka (0 < k < 1).

a) Tính diện tích tam giác MNP theo k và a.

b) Xác định vị trí M trên BB' để diện tích tam giác MNP có giá trị bé nhất.

Giải:



Chọn hệ trục toạ độ Axyz như hình vẽ

A(0; 0; 0), B(a; 0; 0)

C(a; a; 0), D(0; a; 0)

A'(0; 0; a), B'(a; 0; a)

C'(a; a; a), D'(0; a; a)

a) $\overrightarrow{B'M} = k\overrightarrow{B'B} \Rightarrow M(a; 0; a - ka)$

$\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow N(a - ka; a; 0)$

$\overrightarrow{D'P} = k\overrightarrow{D'A'} \Rightarrow P(0; a - ka; a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-ka; a; -a + ka)$, $\overrightarrow{MP} = (-a; a - ka; ka)$ nên:

$[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (k^2a^2 - ka^2 + a^2; k^2a^2 - ka^2 + a^2; k^2a^2 - ka^2 + a^2)$

$S_{MNP} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}]\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(k^2 - k + 1)$ với $k \in (0; 1)$

b) Ta có: $k^2 - k + 1 = (k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$

Dấu "=" khi $k = \frac{1}{2} \in (0; 1)$ nên S_{MNP} bé nhất khi M là trung điểm BB'.

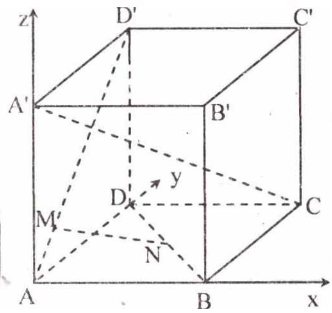
Bài toán 5: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm M thuộc AD' và N thuộc DB sao cho $AM = DN = k$ $(0 < k < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng (A'D'BC).

b) Tìm k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

c) Khi đoạn thẳng MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB; MN song song với A'C.

Giải



Chọn hệ toạ độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có:

$AM = k \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{k}{k - a\sqrt{2}}\overrightarrow{MD'} \Rightarrow M\left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$

$DN = k \Rightarrow \overrightarrow{ND} = \frac{k}{k - a\sqrt{2}}\overrightarrow{NB'} \Rightarrow N\left(\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}}; 0\right)$

a) Mặt phẳng (A'D'BC) có phương trình: x + z - a = 0 nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}\vec{n} = \frac{k}{\sqrt{2}}.1 + \frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}.0 + \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right).1 = 0$ và M ∉ (A'D'B'C)

nên đường thẳng MN song song với mặt phẳng (A'D'BC).

b) Ta có: $MN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - 0\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0 - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= 3k^2 - 2a\sqrt{2}\,k + a^2 = 3\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \geqslant \frac{a^2}{3}$$

Vậy đoạn MN bé nhất khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

c) Khi MN ngắn nhất thì $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ nên $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD} = \frac{a}{3}.0 + \frac{a}{3}.a - \frac{a}{3}.a = 0 \Rightarrow MN \perp AD$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = \frac{a}{3}.0 + \frac{a}{3}.(-a) + \left(-\frac{a}{3}\right).0 = 0 \Rightarrow MN \perp DB.$$

Suy ra đường thẳng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Ta có $\overrightarrow{A'C}$ = (a; a; -a) = 3$\overrightarrow{MN}$ và A' không thuộc đường thẳng MN suy ra đường thẳng MN song song với đường thẳng A'C.

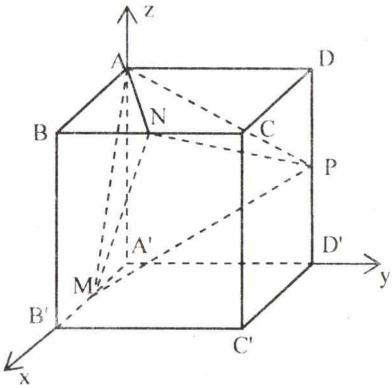
Bài toán 6: Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1.

a) Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC' và A'B.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', BC, DD'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (MNP).

c) Tính thể tích tứ diện AMNP.

Giải



a) Ta chọn hệ tục Oxyz sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa A'B', tia Oy chứa A'D' và tia Oz chứa A'A.

Khi đó A'(0; 0; 0), B'(1; 0; 0),

D'(0; 1; 0), A(0; 0; 1),

C(1; 1; 1), B(1; 0; 1),

D(0; 1; 1), C'(1; 1; 0)

Do đó: $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B$

b) Ta có $M(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $N(1; \frac{1}{2}; 1)$, $P(0; 1; \frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MN \perp AC'$.

$\overrightarrow{MP} = (-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MP \perp AC'$.

Vậy $AC' \perp mp(MNP)$

c) Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$; $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}].\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{9}{8}\right| = \frac{3}{16}$.

Bài toán 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B'B, CD và A'D'

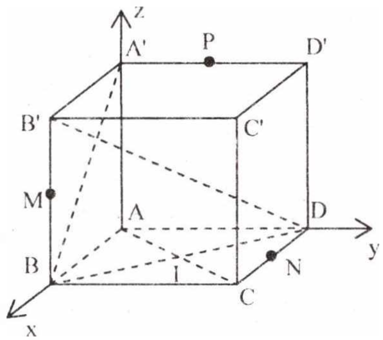
a) Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng A'B, B'D và cặp đường thẳng PI, AC' với I là tâm của đáy ABCD.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N, góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC'D').

Giải

a) Ta chọn hệ tục Oxyz sao cho gốc toạ độ là A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA'.

Khi đó: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$,
$D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$,
$C(1; 1; 0)$, $D'(0; 1; 1)$,
$B'(1; 0; 1)$, $C'(1; 1; 1)$.



Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; -1)$;

$\overrightarrow{B'D} = (-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A'B'} = (1; 0; 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}] = (1; 2; 1)$ nên:

$$d(A'B, B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ta có: $P(0; \frac{1}{2}; 0)$, $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{IP} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$

$\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AP} = (0; \frac{1}{2}; 1)$

Suy ra $d(PI, AC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right]\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right]\right|} = \dfrac{\sqrt{14}}{28}$.

b) Ta có $M(1; 0; \frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2}; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{NC'} = (\frac{1}{2}; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow MP \perp NC'$

Mặt phẳng (PAI) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

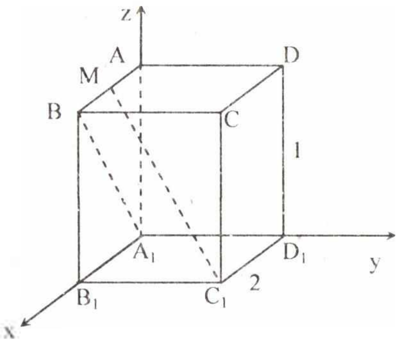
Mặt phẳng (DCC'D') có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng trên thì: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{2}{3}$.

Bài toán 8: Lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Điểm M thay đổi trên cạnh AB.

Tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$

Giải



Chọn hệ trục như hình vẽ (A_1xyz)

Đặt $AM = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ta có: $M(x; 0; 1)$; $A_1(0; 0; 0)$;

$C_1(2; 2; 2)$

nên $\overrightarrow{MA'} = (-x; 0; -1)$;

$\overrightarrow{MC'_1} = (2-x; 2; -1)$

Đặt $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ thì:

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+5}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+5}} \geqslant 0$$

Do đó $\alpha \leqslant 90^o$. Vậy góc $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ lớn nhất khi $x = 1$ tức M là trung điểm AB.

Bài toán 9: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, D'D và B'C' theo cùng tỉ số $k \neq 0, 1$. Chứng minh rằng mp(MNP) luôn luôn song song với mp(AB'D').

Giải

Đặt $A'B' = a$, $A'D' = b$, $A'A' = c$. Ta dùng phương pháp toạ độ bằng cách chọn hệ trục toạ độ với gốc là: $A'(0; 0; 0)$ sao cho $B'(a; 0; 0)$, $D'(0; b; 0)$ và $A(0; 0; c)$

Khi đó ta có $C'(a; b; 0)$, $B(a; 0; c)$, $D(0; b; c)$ và $C(a; b; c)$.

Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, D'D', B'C' theo cùng tỷ số k nên:

$$M\left(-\frac{ka}{1-k};0;c\right),\ N\left(0;b;\frac{-kc}{1-k}\right),\ P\left(a\ \frac{-kb}{1-k};0\right)$$

Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{ka}{1-k};b;-\frac{1}{1-k}c\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(a;\frac{-1}{1-k}b;\frac{kc}{1-k}\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{NP}\right]=\left(\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}bc;\ \frac{k^2+k-1}{(1-k)^2}ca;\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}ab\right)$

nên mp(MNP) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ = (bc; ca; ab)

Mặt phẳng (AB'D') có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}'=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right).$$

Vì $\frac{bc}{\frac{1}{a}}=\frac{ca}{\frac{1}{b}}=\frac{ab}{\frac{1}{c}}$ = abc và M, N, P ∉ (AB'D') do k ≠ 0 nên mp(MNP) // mp(AB'D').

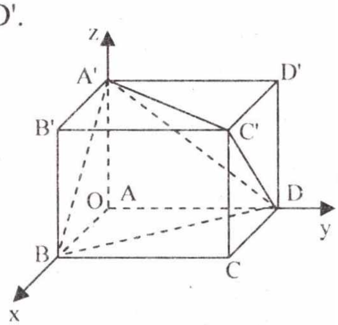
Bài toán 10: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(A'BD).

b) Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng C'D.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Giải



Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho

A(0; 0; 0), B(a; 0; 0),

D(0; b; 0), A'(0; 0; c).

Ta có: C(a; b; 0), D'(0; b; c),

B'(a; 0; c), C'(a; b; c).

a) Phương trình mp(A'BD) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$ nên

$$d(A,(A'BD))=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

b) $\overrightarrow{A'C'}=(a;b;0)$, $\overrightarrow{C'D}=(-a;0;-c)$, $\left[\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'D}\right]$ = (-bc; ac; ab)

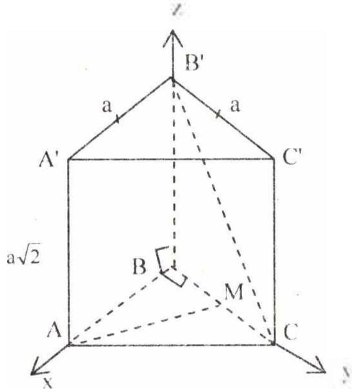
$$d(A',C'D)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'D}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{C'D}\right|}=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{BC'} = (0; b; c)$, $\overrightarrow{CD'} = (-a; 0; c)$, $\overrightarrow{BC} = (0; b; 0)$

$$d(BC', CD') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right]\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Bài toán 11: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa AM, B'C.

Giải



Chọn hệ trục toạ độ Bxyz như hình vẽ

ΔABC vuông cân tại B $\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ AA'C'C là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$.

B(0; 0; 0), A(a; 0; 0), C(0; a; 0),

B'(0; 0; $a\sqrt{2}$), A'(a; 0; $a\sqrt{2}$)

C'(0; a; $a\sqrt{2}$)

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (a; 0; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a; 0)$,

$\overrightarrow{BB'} = (0; 0; a\sqrt{2})$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (0; 0; a^2)$

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\overrightarrow{BB'}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \text{ (đvtt)}$$

Ta có: $M(0; \frac{a}{2}; 0)$, $\overrightarrow{AM} = (-a; \frac{a}{2}; 0)$

$\overrightarrow{B'C} = (0; a; -a\sqrt{2})$; $\overrightarrow{AB'} = (-a; 0; a\sqrt{2})$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(-a^2\frac{\sqrt{2}}{2}; -a^2\sqrt{2}; -a^2\right)$$

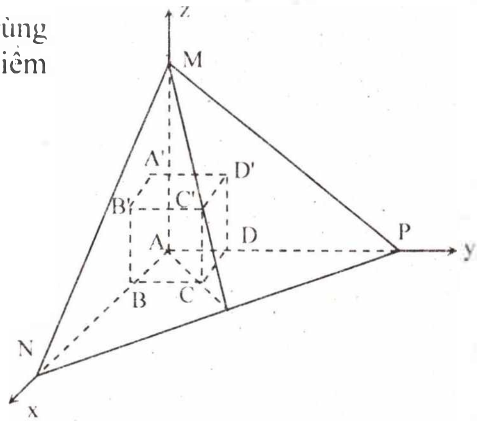
$$\text{Nên } d(AM, BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{\left|a^3\frac{\sqrt{2}}{2} - a^3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^4}{2} + 2a^4 + a^4}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Bài toán 12: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Trên các tia AA', AB, AD, lần lượt lấy các điểm M, N, P thay đổi, khác A sao cho mp(MNP) luôn đi qua C', hãy tìm thể tích bé nhất của tứ diện AMNP.

Giải

Đặt AM = m, AN = n và AP = p.

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho O trùng A, các tia Ox, Oy và Oz lần lượt chứa các điểm B, D và A'.



Khi đó ta có: A(0; 0; 0), B(1; 0; 0),
D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1),
C'(1; 1; 1), M(0; 0; m),
N(n; 0; 0), P(0; p; 0).

Mặt phẳng (MNP) có phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{m} = 1$.

Mặt phẳng (MNP) đi qua đỉnh C khi và chỉ khi: $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1$.

Thể tích tứ diện AMNP là $V = \frac{1}{6}AM.AN.AP = \frac{1}{6}mnp$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Rightarrow 1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Rightarrow \frac{1}{mnp} \leqslant \frac{1}{3^3} \Rightarrow mnp \geqslant 27$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} = \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$, tức là m = n = p = 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích V là $\frac{27}{6}$, khi đó A.MNP là hình chóp đều.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài tập 1: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Biết A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 2; 0) và A'(0; 0; 2). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua MN và song song với BA'.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BA'.

HD-ĐS

a) Kết quả (P): x - y + z - 1 = 0 b) Kết quả góc 60^0.

Bài tập 2: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0),
A'(0; 0; 1). Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'C và MN.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A'C và tạo với Oxy góc α mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

HD-DS

a) Kết quả d(A'C, MN) = $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Kết quả (P): 2x - y + z - 1 = 0, x - 2y - z + 1 = 0

Bài tập 3: Cho tứ diện SABC với các đỉnh S(-2; 2; 4), A(-2; 2; 0), B(-5; 2; 0), C(-2; 1; 1). Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối SA và BC.

HD-DS

Kết quả d = $\dfrac{3.\sqrt{10}}{10}$

Bài tập 4: Trong không gian Oxyz cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, biết S(3; 2; 4), B(1; 2; 3), D(3; 0; 3). Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SD.

HD-DS

Kết quả $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$

Bài tập 5: Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi E, F là trung điểm của AB, AD. Tính diện tích tam giác SCF và khoảng cách từ E đến (SCF).

HD-DS

Chọn hệ trục Exyz. Kết quả d(E,(SCF)) = $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Bài tập 6: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD, N là tâm hình vuông CC_1D_1D. Tìm bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, C_1, M, N.

HD-DS

Chọn hệ trục Axyz. Kết quả R = $\dfrac{a\sqrt{35}}{4}$

Bài tập 7: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các kích thước AB = 3, AD = 4, AA' = 3. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = 1, D'P = 2. Tính khoảng cách từ A đến các mặt phẳng (B'D'C) và (MNP).

HD-DS

Chọn hệ trục Axyz. Kết quả d(A; (MNP)) = $\dfrac{44}{\sqrt{213}}$

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật AB = a, AD = 2a, SA = 3a vuông góc đáy. Gọi I là trung điểm của CD, tính d(SB, AI)

HD-DS

Chọn hệ trục Axyz. Kết quả d(SB; AI) = $\dfrac{12}{13}a$.

CÁC ĐỀ THI TỔNG HỢP

ĐỀ LUYỆN THI TỔNG HỢP SỐ 1

I. Phần chung cho tất cả thí sinh: (7,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1

2) Tìm m để hàm số (1) có hai cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) đến gốc toạ độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) đến gốc toạ độ O.

Câu 2. Giải phương trình: $\cos x(1 + 2\sqrt{3}\sin 2x) = \cos 3x - 4\cos(\frac{3\pi}{2} - 2x)$.

Câu 3. Giải phương trình: $2\log_5(3x - 1) = \log_{\sqrt{5}}(2x + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2}dx$.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Biết rằng AB = 2a, AD = a, DC = a (a > 0) và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) với đáy bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SCD) theo a.

Câu 6. Cho (x, y) là nghiệm không âm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = m^2 - 4m + 6 \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$T = (x + y)^3 + 6xy(x + y) + 39m + 2$ với $0 \leq m \leq 2$.

II. Phần riêng: (3,0 điểm).

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần: A hoặc B

A. Theo chương trình chuẩn

Câu 7a. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm M(2; 1). Đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt elip (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB. Tìm A, B và phương trình (d).

Câu 8a. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$, tiếp xúc với hai mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 1 = 0$ và (Oxy).

Câu 9a. Tìm số phức z để cho: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$

B. Theo chương trình nâng cao

Câu 7b. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm A(1; 3) và đường thẳng (d): $2x + y - 1 = 0$. Lập phương trình các cạnh hình vuông nhận điểm A làm đỉnh và đường thẳng (d) làm đường chéo.

Câu 8b. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, chứng tỏ rằng hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và Δ: $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ chéo nhau. Lập phương trình 2 mặt phẳng lần lượt chứa một đường thẳng d hoặc Δ và chứa đường vuông góc chung của chúng.

Câu 9b. Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn: $|z - i| = |(1+i)z|$.

Lời Giải

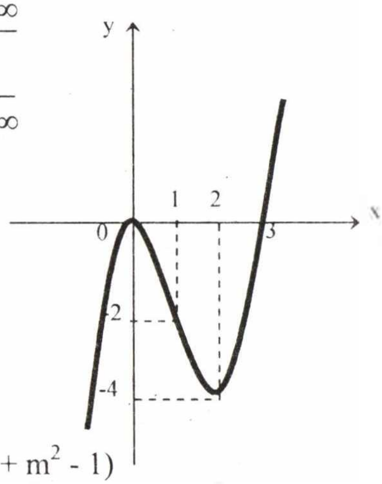
Câu 1. 1) Khi m = 1 thì $y = x^3 - 3x^2$

- Tập xác định: **R**
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$, nghịch biến trên (0,2) và có điểm CĐ(0; 0), CT(2; -4)

- Đồ thị

$y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Điểm uốn I(1; -2)

2) Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = m \pm 1$

Vậy với mọi m thì hàm số luôn có cực trị

Toạ độ điểm cực đại và cực tiểu lần lượt là A(m-1; 2-2m) và B(m+1; -2m-2)

Theo đề: $OA = \sqrt{2}\,OB \Leftrightarrow 5(m - 1)^2 = 2.5(m + 1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 2. Biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$\cos x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = \cos 3x + 4\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) + 4\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(2 - \sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3. ĐK: $x > \frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình

$$\log_5[5.(3x - 1)^2] = \log_5(2x + 1)^3 \Leftrightarrow 5.(3x - 1)^2 = (2x + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(8x^2 - 17x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{8}$$

So sánh điều kiện, chọn nghiệm của phương trình x = 2.

Câu 4. $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2}dx = \int_2^3 (3 + \ln x)d\left(\frac{-1}{x+1}\right) = -\frac{3 + \ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$

$$= -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\left(3 + \ln\frac{27}{16}\right).$$

Câu 5. Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow$ ADCM là hình vuông

$\Rightarrow$ MA = MC = MB = a.

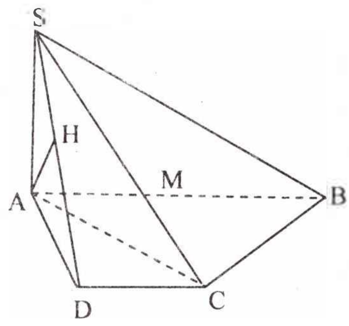
Do đó tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^o$.

$AC = SA = a\sqrt{2}$ và

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}a(a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$



Gọi H là hình chiếu của A lên SD $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Vì AB // (SCD) $\Rightarrow$ d(A, (SCD)) = d(B, (SCD)) = AH = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 6. Từ hệ phương trình đã cho, ta có: $\begin{cases} S = x + y = m \\ P = xy = 2m - 3 \end{cases}$

Với $0 \leqslant m \leqslant 2$, hệ có nghiệm $x, y \geqslant 0$ khi: $\begin{cases} S^2 - 4P \geqslant 0 \\ S \geqslant 0 \\ P \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2$

Khi đó $T = m^3 + 12m^2 + 21m + 2 = f(m)$.

Khảo sát hàm số f(m) với $m \in [\frac{3}{2}; 2]$

Ta được $\min T = \frac{511}{8}$ khi $m = \frac{3}{2}$ và $\max T = 100$ khi $m = 2$.

Câu 7a. Gọi A(a, b) thì B(4-a; 2-b). Vì A, B ∈ (E) nên:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{b^2}{4} = 1 \\ \dfrac{(4-a)^2}{9} + \dfrac{(2-b)^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 - \dfrac{3\sqrt{11}}{10}; b = 1 + \dfrac{4\sqrt{11}}{15} \\ a = 2 + \dfrac{3\sqrt{11}}{10}; b = 1 - \dfrac{4\sqrt{11}}{15} \end{array} \right.$$

Vậy $A\left(2 - \frac{3\sqrt{11}}{10}; 1 + \frac{4\sqrt{11}}{15}\right)$ và $B\left(2 + \frac{3\sqrt{11}}{10}; 1 - \frac{4\sqrt{11}}{15}\right)$

và phương trình (d): $8x + 9y - 25 = 0$

Câu 8a. Gọi $I(1+t; 1+2t; -2t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Do (S) tiếp xúc với (α) và mặt phẳng (Oxy) nên:

$$d(I, (\alpha)) = d(I, Oxy)) \Leftrightarrow \frac{|2(1+t) - (1+2t) - 4t + 1|}{3} = |2t|$$

$$\Leftrightarrow |2t - 1| = |3t| \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{5}$$

Với $t = -1$ thì (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính R = 2 nên (S) có phương trình $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Với $t = \frac{1}{5}$ thì (S) có tâm $I\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ và bán kính $R = \frac{2}{5}$ nên (S) có phương trình

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

Câu 9a. Đặt $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbf{R}$)

Ta có: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 + 3.2iy = x^2 + y^2 + 6yi$

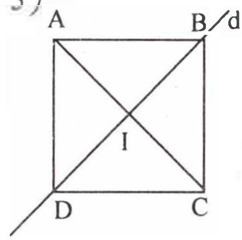
Do đó: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $z = \dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$ hoặc $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

Câu 7b. Nhận xét $A \notin d$. Gọi I(x, y) là tâm hình vuông ABCD. VTCP của d là: $\vec{u} = (-1; 2)$.

Ta có $I \in d$ và $\overrightarrow{AI} \perp \vec{u}$ nên tìm được $I\left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{11}{5}\right) \Rightarrow C\left(-\dfrac{11}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$



Gọi B(a; b). Vì IB = IA và $B \in d$

nên tìm được $B\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ và $D\left(-\dfrac{7}{5}; \dfrac{19}{5}\right)$ và ngược lại

$$B\left(-\frac{7}{5}; \frac{19}{5}\right); D\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

Do đó phương trình các cạnh hình vuông ABCD là:

(AB): $3x - y = 0$; (AD): $x + 3y - 10 = 0$;

(BC): $x + 3y - 2 = 0$; (CD): $3x - y + 8 = 0$

hoặc (AB): $x + 3y - 10 = 0$; (AD): $3x - y = 0$;

(BC): $3x - y + 8 = 0$; (DC): $x + 3y - 2 = 0$

Câu 8b.

d đi qua A(1; 0; -2) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Δ đi qua B(-1; 0; 1) và có VTCP $\vec{n} = (4; 1; -2)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$ nên d và Δ chéo nhau.

Đường vuông góc chung IJ có VTCP: $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-5; -8; -14)$

Mặt phẳng (P) chứa d và IJ có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{a}] = (-50; -23; 31)$ và đi qua A(1; 0; -2) nên có phương trình:

$-50(x - 1) - 23(y - 0) + 31(z + 2) = 0$ hay $50x + 23y - 31z - 112 = 0$.

Mặt phẳng (Q) chứa Δ nên IJ có VTPT

$\overrightarrow{n_Q} = [\vec{v}, \vec{a}] = (-30; 66; -27)$ và đi qua B(-1; 0; 1) nên có phương trình:

$-10(x + 1) + 22(y - 0) - 9(z - 1) = 0$ hay $10x - 22y + 9z + 1 = 0$.

Câu 9b. Đặt: $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$ và M(x;y) là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có $|z - i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-y) + (x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

Vậy tập điểm biểu diễn là đường tròn $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

ĐỀ LUYỆN THI TỔNG HỢP SỐ 2

I. Phần chung cho tất cả thí sinh: (7,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 2 - m}{x - 2}$, có đồ thị (C_m) và m là tham số

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 1.

2) Gọi A là điểm cố định của đồ thị (C_m). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiếp tuyến của (C_m) tại điểm A đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. Giải phương trình $(1 - \cot 2x \tan x)\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$.

Câu 3. Giải bất phương trình $x^2 + 6x + 11 \geqslant 3(x+1)\sqrt{2x+5}$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^e \dfrac{1 + xe^x}{x(e^x + \ln x)}dx$.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với BA = a, BC = $a\sqrt{2}$, BD = $a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là trọng tâm G của tam giác ABC và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu 6. Với a, b, c thay đổi thỏa mãn $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $c \geqslant 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$.

Chứng minh $a + b + c \geqslant 16$.

II. Phần riêng: (3,0 điểm).

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần: A hoặc B

A. Theo chương trình chuẩn

Câu 7.a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(-4; 2), đường phân giác trong góc B có phương trình x + y - 2 = 0, đỉnh C thuộc đường thẳng x + 2y - 10 = 0, BC = 2AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và C.

Câu 8.a. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x + y - z - 1 = 0 và đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên Δ, đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 9.a. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) với $-2 \leqslant x \leqslant 3$; $1 \leqslant y \leqslant 3$.

Chứng minh $2 \leqslant |z + i| \leqslant 5$.

B. Theo chương trình nâng cao

Câu 7.b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 2)^2 + y^2 = 20$. Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA = 2OB.

Câu 8.b. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;-1;1). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng đi qua A với hai đường thẳng

d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và d_2: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ các điểm M, N.

Câu 9.b. Cho số phức $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)i$ .Tính z^2, từ đó viết z dưới dạng lượng giác.

Lời Giải

Câu 1.

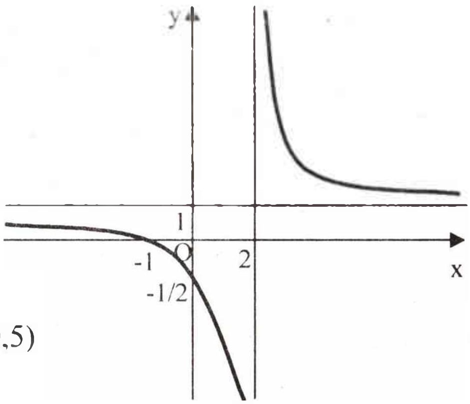
- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$
- Sự biến thiên:

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$, $\forall x \neq 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	‖	-
y	1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

- Đồ thị cắt Ox tại (-1; 0) và Oy tại (0; -0,5)

2) (C_m) qua A(x; y) cố định

$\Leftrightarrow y = \frac{mx + 2 - m}{x - 2}$ nghiệm đúng $\forall m$, $x \neq 2$

$\Leftrightarrow (x - 1)m = xy - 2y - 2$ nghiệm đúng $\forall m$, $x \neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy điểm cố định là A(1; -2).

Phương trình tiếp tuyến Δ tại A: $y = -(m+2)x + m \Leftrightarrow (m+2)x + y - m = 0$

Khi m = 2 thì d(0,Δ) = 0.

Khi m ≠ 0 thì: $d(0,\Delta) = \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+4m+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{5}{m^2}+\dfrac{4}{m}+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5(\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}}} = \sqrt{5}$

Dấu bằng khi: $\dfrac{1}{m} = -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = -\dfrac{5}{2}$.

Câu 2.

ĐK $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Với ĐK này, PT $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(2x-x)}{\sin 2x\cos x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\cos^2 x}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x\right) = 2\cos x \Leftrightarrow (1+\tan^2 x)(\sqrt{3}\tan x - 1) = 8$

Đặt t = tanx ta có

$\sqrt{3}t^3 - t^2 + \sqrt{3}t - 9 = 0 \Leftrightarrow (t-\sqrt{3})(\sqrt{3}t^2 + 2t + 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$

Kết hợp nghiệm, nghiệm phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Câu 3.

ĐK: $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$, BPT đã cho trở thành:

$(x+1)^2 - 3(x+1)\sqrt{2x+5} + 2(\sqrt{2x+5})^2 \geqslant 0$ (1)

Khi $x = -\dfrac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow \left(-\dfrac{5}{2}+1\right)^2 \geqslant 0$: đúng.

Do đó $x = -\dfrac{5}{2}$ là nghiệm bất phương trình.

Khi $x \neq -\dfrac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow (\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+5}})^2 - 3(\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+5}}) + 2 \geqslant 0$

Do đó: $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \leqslant 1 \Leftrightarrow x+1 \leqslant \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{2} < x < -1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < x \leqslant 2$

Hoặc $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \geqslant 2 \Leftrightarrow x+1 \geqslant \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ 2 \leqslant x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leqslant x$

Vậy nghiệm BPT: $x \geqslant \dfrac{5}{2}$.

Câu 4. Đặt $t = e^x + \ln x \Rightarrow dt = \left(e^x + \dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{1 + xe^x}{x}dx$

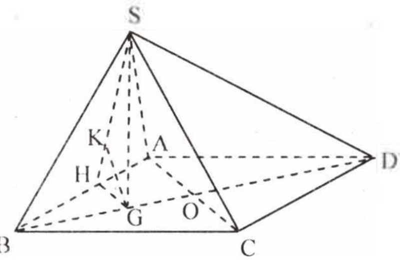
Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = e$; $x = e \Rightarrow t = e^e + 1$

Suy ra: $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1 + xe^x}{x(e^x + \ln x)}dx = \int_e^{e^e+1} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_e^{e^e+1} = \ln(e^e + 1) - 1$

Vậy: $I = \ln(e^e + 1) - 1$.

Câu 5. Áp dụng định lý đường trung tuyến tam giác, ta có:

$OA^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$



$\Rightarrow AC = a \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = a^2$

Vẽ GH // OA ($H \in AB$), hạ $GK \perp SH$

Ta có $AB \perp GH$, $AB \perp SG \Rightarrow AB \perp GK$.

$\Rightarrow GK \perp (SAB) \Rightarrow GK = \dfrac{a}{\sqrt{10}}$. $GH = \dfrac{2}{3}OA = \dfrac{a}{3}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 6. Đặt $a = x + 4$, $b = y + 5$, $c = z + 6$ ($x, y, z \geqslant 0$)

Do đó: $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = 90$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2y = 13$

Giả sử $x + y + z < 1 \Rightarrow x, y, z \in [0; 1)$. Suy ra $x^2 \leqslant x$; $y^2 \leqslant y$; $z^2 \leqslant z$

nên: $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2y \leqslant 13(x + y + z) < 13$ (vô lý)

Do đó: $x + y + z \geqslant 1$. Vậy: $a + b + c = x + y + z + 15 \geqslant 16$.

Câu 7.a. Hạ AH vuông góc với d' là đường phân giác trong góc B, ta có H(h; 2-h)

Suy ra: $\overrightarrow{AH} = (h + 4; -h) \perp \overrightarrow{u_{d'}} = (-1; 1)$ là VTCP của d', nên h = -2. Vậy H(-2; 4)

Gọi A' đối xứng A qua H, nên $A' \in BC$ và H là trung điểm AA'. Do đó A'(0; 6).

Ta có $B \in d' \Leftrightarrow B(b; 2-b)$, $C \in d \Leftrightarrow C(10-2c; c)$

Mà BC = 2BA, nên A' trung điểm BC

$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 10 - 2c = 0 \\ 2 - b + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2c = -10 \\ -b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy B(-10; 12), C(10; 0).

Câu 8.a. Gọi I là tâm mặt cầu, ta có $I \in \Delta \Leftrightarrow I(t; -t; t)$

Do đó: $OI = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3t^2} = \dfrac{|t+1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3|t| = |t+1|$. Suy ra: $t = -\dfrac{1}{4}$ và $t = \dfrac{1}{2}$

Khi $t = -\dfrac{1}{4}$ thì $I\left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ và $R = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Vậy mặt cầu: $\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{16}$

Khi $t = \dfrac{1}{2}$ thì $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{1}\right)$ và $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy mặt cầu: $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$.

Câu 9.a. Ta có: $z + i = x (y + 1)i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

Mà $-2 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow x^2 \leqslant 9$ (1)

Và $1 \leqslant y \leqslant 3 \Leftrightarrow 2 \leqslant y + 1 \leqslant 4 \Rightarrow 4 \leqslant (y+1)^2 \leqslant 16$ (2)

Cộng (1) và (2), suy ra: $4 \leqslant x^2 + (y+1)^2 \leqslant 25$. Vậy $2 \leqslant |z + i| \leqslant 5$.

Câu 7.b. (C) có tâm I(2; 0), bán kính $R = 2\sqrt{5}$ và $OI = 2 < R$, nên O ở trong đường tròn.

Gọi B(x; y), ta có: $OA = 2OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2x \\ y_A = -2y \end{cases}$. Do đó A(-2x; -2y).

Mà A, B $\in$ (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Khi x = -2 $\Rightarrow$ y = ±2. Do đó B(-2; ±2)

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là x + y = 0 hoặc x - y = 0.

Câu 8.b. Ta có: $M \in d_1 \Leftrightarrow M(1+2m; m; 1-m)$, $N \in d_2 \Leftrightarrow N(n; -1 -2n; 2+n)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (2m; m+1; -m)$ và $\overrightarrow{AN} = (n-1; -2n; 1+n)$

Mà $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (m + n + 1 - mn; -m - 3mn; m - n + 1 - 5mn) = (0; 0; 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n + 1 = mn \\ m + 3mn = 0 \\ m - n + 1 = 5mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -1 (VN) \\ n = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n = -\dfrac{1}{3} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy: $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Câu 9.b.

Ta có: $z^2 = \left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2\right] + 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i$

Vậy: $z^2 = 8\sqrt{3} - 8i$

Suy ra: $z^2 = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Do đó: $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ (chọn)

$z = -4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ (loại).

Vậy $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

ĐỀ LUYỆN THI TỔNG HỢP SỐ 3

I. Phần chung cho tất cả thí sinh: (7,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 3$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (1) của hàm số với m = 1.

2) Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) luôn có ba điểm cực trị A, B, C với mọi m. Tìm m để đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1.

Câu 2. Tìm nghiệm $x \in [0; \pi]$ của phương trình:

$$2\cos4x - (\sqrt{3} - 2)\cos2x = \sin2x + \sqrt{3}.$$

Câu 3. Giải hệ PT: $\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 8y^4(y^2 + 1) \\ \sqrt{5x + 6} + \sqrt{2y^2 + 7} = 7 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = e^{-2x}.\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.

Câu 5. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' và có chiều cao h = a. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy tâm O sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$. Vẽ đường sinh AA'. Biết góc giữa đường thẳng A'O và mặt phẳng (AA'B) bằng 30^0. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng OO' và A'B.

Câu 6. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$.

II. Phần riêng: (3,0 điểm).

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần: A hoặc B

A. Theo chương trình chuẩn

Câu 7a. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm P(2; 5) và cắt (C) tại hai điểm phân biệt H, K sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm H và K vuông góc nhau.

Câu 8a. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 3; 2) và mặt phẳng (α): x + 2y + 2 = 0. Tìm tọa độ điểm M có các tọa độ nguyên biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

Câu 9a. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$P(x) = (x^2 + x - 1)^5$.

B. Theo chương trình nâng cao

Câu 7b. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). Tìm toạ độ các điểm A, B nằm trên elip (E) sao cho tam giác ABC đều.

Câu 8b. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$, d': $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$ và mặt phẳng (α): x - y + z - 6 = 0.

Tìm điểm M nằm trên đường thẳng d' sao cho đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm N sao cho MN = 3.

Câu 9b. Giải PT: $\sqrt{2.6^x - 4^x} + \sqrt[4]{4.24^x - 3.16^x} = 2.3^x$, ($x \in \mathbb{R}$)

Lời Giải

Câu 1.

1) Khi m = 1 $\Rightarrow$ $y = x^4 - 4x^2 + 3$

- Tập xác định D = **R**. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

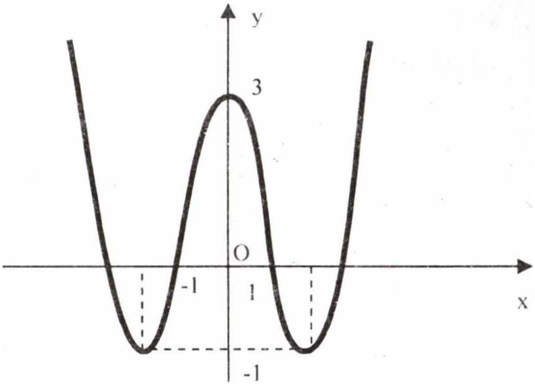
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$.

Hàm số đạt CĐ(0; 3),

đạt CT$(-\sqrt{2}; -1)$, $(\sqrt{2}; -1)$.



• Đồ thị: đối xứng nhau qua Oy

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$.

2) Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2 + 1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{m^2 + 1}$

Vậy với mọi m thì hàm số luôn có ba cực trị:

$$A(0; 3),\ B\left(\sqrt{m^2+1}; 2 - m^4 - 2m^2\right),\ C\left(-\sqrt{m^2+1}; 2 - m^4 - 2m^2\right)$$

Tam giác ABC cân tại A và có:

Diện tích: $S = (m^2 + 1)^2\sqrt{m^2 + 1}$;

Nửa chu vi là: $p = \sqrt{m^2+1}\left(1 + \sqrt{1 + (m^2+1)^3}\right)$

Theo giả thiết:

$$\frac{S}{p} = r = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^2+1)^2}{1 + \sqrt{1 + (m^2+1)^3}} = 1 \Leftrightarrow (m^2+1)^2 = 1 + \sqrt{1 + (m^2+1)^3}\ (1)$$

Đặt $t = m^2 + 1$ thì (1) thành: $t^2 = 1 + \sqrt{1 + t^3}$

Giải phương trình trên ta chọn $t = 2$ (do $t > 0$). Vậy $m = \pm 1$.

Câu 2. Biến đổi phương trình lượng giác đã cho

$$2(\cos 4x + \cos 2x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\cos 3x - \sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \pi) \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

Chọn các nghiệm $x \in [0, \pi]$ của PT là: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{11\pi}{12}; \frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}\right\}$.

Câu 3. ĐK $x \geq -\frac{6}{5}$.

Từ pt thứ nhất: $(x - 2y^2)(x^2 + 2y^2x + 4y^4 + 4y^2) = 0$

Với $x = 2y^2$, thay vào phương trình thứ hai:

$$\sqrt{10y^2+6}+\sqrt{2y^2+7}=7 \Leftrightarrow (4-\sqrt{10y^2+6})+(3-\sqrt{2y^2+7})=0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2-1)\left(\frac{5}{4+\sqrt{10y^2+6}}+\frac{1}{3+\sqrt{2y^2+7}}\right)=0$$

Do $\frac{5}{4+\sqrt{10y^2+6}}+\frac{1}{3+\sqrt{2y^2+7}}>0$ nên $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=2$.

Với $x^2+2y^2x+4y^4+4y^2=0 \Leftrightarrow (x+y^2)^2+3y^4+4y^2=0$

$\Leftrightarrow x = y = 0$ (không thoả hệ).

Vậy hệ có nghiệm: (2; 1); (2; -1).

Câu 4. $f(x)=e^{-2x}\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-2x}\sin 2x)'$

Vậy nguyên hàm của f(x) là $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2x}\sin 2x + C$

Câu 5. Ta có OO' // (AA'B) $\Rightarrow$ d(OO', A'B) = d(O, (A'AB))

Gọi H là hình chiếu của O lên AB thì

$AH \perp (ABA') \Rightarrow d(0, (A'AB)) = OH$ và $\widehat{OA'H}=30^\circ$.

Đặt $OH = x \Rightarrow OA' = 2x$ và $O'A' = OA = \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Tam giác OO'A' vuông tại O' nên $a^2+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2=4x^2 \Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Vậy d(OO', A'B) = $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Câu 6. Ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1 \Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$

$$\leqslant \frac{a(a+b)(b+c)}{b}+\frac{b(a+b)(b+c)}{c}+\frac{c(a+b)(b+c)}{a}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$$

$$\leqslant \frac{a^2c}{b}+a^2+ab+ac+\frac{b^2(a+b)}{c}+b^2+ab+c^2+bc\frac{cb(b+c)}{a}$$

Vì: $(a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c) = a^2+ac+c^2+3b^2+3ab+3bc$

Do đó ta cần chứng minh: $\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{cb(b+c)}{a}\geqslant 2b^2+2bc+ab$

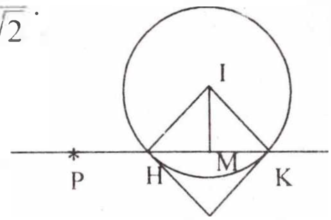
Thật vậy: $\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{cb(b+c)}{a}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{b^3}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{c^2b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{c}+\frac{c^2b}{a}\right)+b^2\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$$\geq ab + (\sqrt{ac^3}+\sqrt{\frac{b^4c}{a}}) + 2b^2 \geq ab + 2bc + 2b^2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 7a. (C) có tâm I(1; -1) và bán kính R = 5. Gọi M là trung điểm HK, tam giác IHK vuông cân ở I nên IM ⊥ HK và $d(I, \Delta) = \frac{IH}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.



Gọi (Δ): $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

Ta có $P(2; 5) \in \Delta \Rightarrow 2a + 5b + c = 0$ (1)

Và $d(I; \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a - b + c)^2 = 25(a^2 + b^2)$ (2)

Từ (1) và (2): $2(a + 6b)^2 = 25(a^2 + b^2)$ (3)

Cho b = 1, và giải (3) ta được a = -1 hoặc $a = \frac{47}{23}$

Với $a = -1 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow (\Delta): x - y + 3 = 0$

Với $a = \frac{47}{23} \Rightarrow c = -\frac{209}{23} \Rightarrow (\Delta): 47x + 23y - 209 = 0.$

Câu 8a. Gọi M(a; b; c). Vì M cách đều ba điểm A, B, C nên

$$\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-3)^2 + (c-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a - 3b - 2c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = 3 - a \end{cases}$$

Do đó M(a; a; 3 - a).

Vì M cách đều điểm A và mp(α) nên MA = d(M, (α))

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + a^2 + (3-a)^2 = \frac{(a+2a+2)^2}{5} \Leftrightarrow 6a^2 - 52a + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{23}{3} \end{array}\right.$$

Chọn điểm M tọa độ nguyên là M(1; 1; 2).

Câu 9a. $P(x) = (x^2 + x - 1)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^{5-k}(x-1)^k$

$$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^{5-k}\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m}(-1)^m\right) = \sum_{k=0}^{5}\sum_{m=0}^{k} C_5^k C_k^m (-1)^m x^{10-k-m}$$

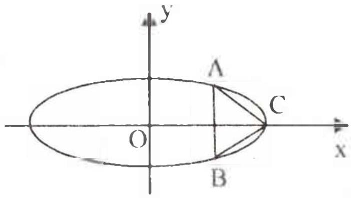
Chọn k, m sao cho $\begin{cases} 10-k-m=3 \\ 0 \leq m \leq k \leq 5 \\ k, m \in N \end{cases}$, ta được các cặp (k, m) là (4; 3) và (5; 2)

Vậy hệ số của x^3 là: $-C_5^4C_4^3 + C_5^5C_5^2 = -10$.

Câu 7b. Tam giác ABC đều có đỉnh C thuộc Ox nên A, B đối xứng nhau qua Ox.

Gọi $A(x_0; y_0)$ và $B(x_0; -y_0)$ thuộc (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ thì $AC = AB = 2|y_0|$ nên ta có:

$$\begin{cases} y_0^2 + (2-x_0)^2 = 4y_0^2 \\ \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{2}{7}; y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{array}\right.$$



Với $x_0 = 2$; $y_0 = 0$ khi đó C ≡ A hoặc C ≡ B (loại).

Vậy hai điểm A, B là:

$$A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

Câu 8b. Vì M nằm trên đường thẳng d nên M(2 - m; 3 + m; 4 + m)

Đường thẳng Δ đi qua M và song song với đường thẳng d có phương trình

$$\Delta: \frac{x-2+m}{2} = \frac{y-3-m}{1} = \frac{z-4-m}{-2}$$

Vì N nằm trên đường thẳng Δ nên: N(2 - m + 2n; 3 + m + n; 4 + m - 2n)

Và N nằm trên (α) nên: (2 - m + 2n) - (3 + m + n) + (4 + m - 2n) - 6 = 0 ⇔ n = -3 - m.

Suy ra N(-3m - 4; 0; 3m + 10)

Ta có MN = 3 ⇔ $(6 + 2m)^2 + (3 + m)^2 + (2m + 6)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -4 \end{array}\right.$$

Suy ra M(4; 1; 2), M(6; -1; 0).

Câu 9b. ĐK: $x \geq \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)$. Chia hai vế của phương trình cho 3^x và đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Suy ra $0 < t \leq \frac{4}{3}$

Phương trình: $\sqrt{2t - t^2} + \sqrt[4]{4t^3 - 3t^4} = 2$

Vì $0 < t \leq \frac{4}{3}$ nên: $1 - (2t - t^2) = (t-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2t - t^2 \leq 1$;

$1 - (4t^3 - 3t^4) = (t-1)^2(3t^2 + 2t + 1) \geq 0 \Rightarrow 4t^3 - 3t^4 \leq 1$

Do đó $\sqrt{2t - t^2} + \sqrt[4]{4t^3 - 3t^4} \leq 2$. Nên dấu bằng xảy ra: t = 1 ⇔ x = 0

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Mục lục

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

✱HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA DU LỊCH GIA LAI TRÊN TOÀN QUỐC
✱HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA PHƯƠNG NAM TRÊN TOÀN QUỐC
✱davibooks.vn
NHÀ SÁCH TRỰC TUYẾN
ĐT: 62972354

HUẾ:	**CÔNG TY CP SÁCH&TBTH HUẾ** – 76 Hàn Thuyên – TP. Huế
ĐÀ NẴNG:	**NS LAM CHÂU** – 129 Phan Chu Trinh
QUẢNG NGÃI:	**NS TRẦN QUỐC TUẤN** – 526 Quang Trung
NHA TRANG:	**CÔNG TY CP PHS** – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang
	SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương – Nha Trang
BÌNH THUẬN:	**NS HƯNG ĐẠO** – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết
ĐỒNG NAI:	**NS KIM NGÂN** – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa
	NS BIÊN HÒA – 35 Cách Mạng Tháng 8 – TP. Biên Hòa
	NS MINH ĐỨC – 156 Đường 30/4 – TP. Biên Hòa
VŨNG TÀU:	**NS ĐÔNG HẢI** – 38 Lý Thường Kiệt
	NS HOÀNG CƯƠNG – 163 Nguyễn Văn Trỗi
GIA LAI:	**CÔNG TY SÁCH TBTH** – 40B Hùng Vương – TP. Pleiku
DAKLAK:	**NS LÝ THƯỜNG KIỆT** – 55 – 57 Lý Thường Kiệt
KONTUM:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
	NS CHÍ THÀNH – 72D Bùi Thị Xuân – Đà Lạt
DĂK NÔNG:	**NS GIÁO DỤC** – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
TÂY NINH:	**NS VĂN NGHỆ** – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:	**CÔNG TY PHS** – 04 Võ Văn Tần – TP. Tân An
TIỀN GIANG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
ĐỒNG THÁP:	**NS VIỆT HƯNG** – 196 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:	**NS TRẺ** – 41 Trần Hưng Đạo
KIÊN GIANG:	**NS ĐÔNG HỒ I** – 98B Trần Phú – Rạch Giá
	NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
BÌNH DƯƠNG:	**NHÀ SÁCH 277** – 518 Cách Mạng Tháng Tám – Thủ Dầu Một
CÀ MAU:	**NS MINH TRÍ** – 44 Nguyễn Hữu Lễ
AN GIANG:	**NS THƯ QUÁN** – 3/5 Tôn Đức Thắng – TP. Long Xuyên
	NS THANH KIÊN – 496 Võ Thị Sáu – TP. Long Xuyên
	TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC

ISBN: 978-604-939-542-0

8 935092 756776

Giá: 72.000đ