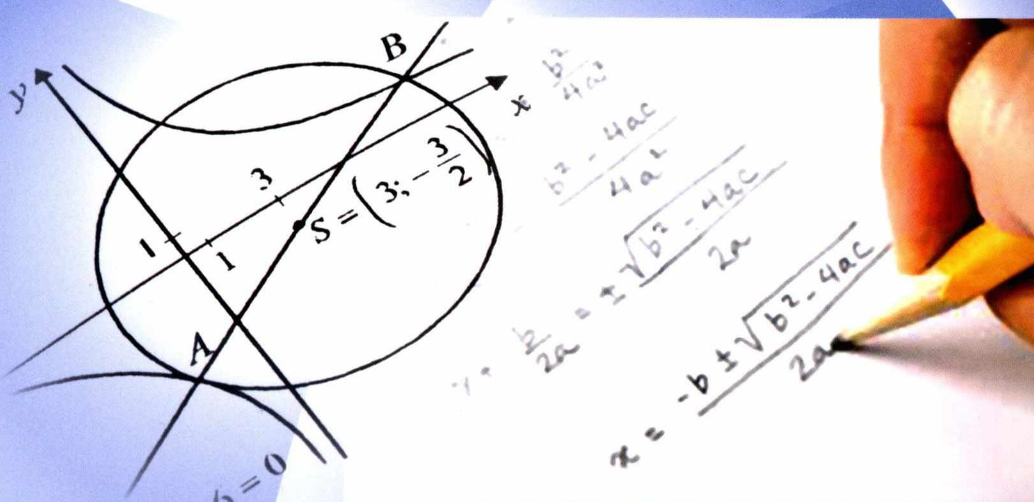
PHẠM ĐỨC TÀI (Chủ biên)
NGUYỄN ĐỨC CHÍNH - NGUYỄN VĂN MINH - PHẠM VĂN TUYÊN

ÔN LUYỆN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

MÔN TOÁN



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẠM ĐỨC TÀI (Chủ biên)
NGUYỄN ĐỨC CHÍNH - NGUYỄN VĂN MINH - PHẠM VĂN TUYÊN

ÔN LUYỆN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Quán triệt Nghị quyết số 29-NQ/TW Hội nghị lần thứ 8 Ban Chấp hành Trung ương khóa XI của Đảng *về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường, định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế:* "Tiếp tục đổi mới mạnh mẽ phương pháp dạy và học theo hướng hiện đại; phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo và vận dụng kiến thức, kĩ năng của người học; khắc phục lối truyền thụ áp đặt một chiều, ghi nhớ máy móc" đồng thời "Đổi mới căn bản hình thức và phương pháp thi, kiểm tra và đánh giá kết quả giáo dục, đào tạo, bảo đảm trung thực, khách quan"; tại Chỉ thị số 3008/CT-BGDĐT ngày 18 tháng 8 năm 2014 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo *về nhiệm vụ trọng tâm của giáo dục mầm non, giáo dục phổ thông, giáo dục thường xuyên và giáo dục chuyên nghiệp năm học 2014-2015* đã nêu: "Tiếp tục triển khai đổi mới phương pháp dạy và học gắn với đổi mới hình thức, phương pháp thi, kiểm tra và đánh giá kết quả giáo dục theo hướng đánh giá năng lực người học; kết hợp đánh giá trong quá trình với đánh giá cuối kì, cuối năm học". Theo đó, Quyết định số 3538/QĐ-BGDĐT ngày 09 tháng 9 năm 2014 *về việc Phê duyệt phương án thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh đại học, cao đẳng từ năm 2015* Bộ Giáo dục và Đào tạo xác định: "Từ năm 2015, tổ chức một cuộc thi quốc gia (gọi là kì thi Trung học phổ thông quốc gia) lấy kết quả để xét công nhận tốt nghiệp Trung học phổ thông và làm căn cứ xét tuyển sinh đại học, cao đẳng"... "Để được xét công nhận tốt nghiệp Trung học phổ thông và xét tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng, thí sinh phải thi 4 môn (gọi là 4 môn thi tối thiểu) gồm 3 môn bắt buộc là Toán, Ngữ văn, Ngoại ngữ và 1 môn tự chọn trong số các môn Vật lí, Hóa học, Sinh học, Lịch sử và Địa lí"... "Các môn Vật lí, Hóa học, Sinh học, Ngoại ngữ: Thi trắc nghiệm, thời gian thi 90 phút",... "Đề thi đánh giá thí sinh ở 4 mức độ nhận biết, thông hiểu, vận dụng và vận dụng cao, đảm bảo phân hóa trình độ thí sinh". Nhằm giúp các thầy, cô giáo và học sinh có thêm tài liệu tham khảo trong quá trình rèn luyện các kĩ năng ôn tập theo định hướng trên, các tác giả là Chuyên viên Vụ GDTrH và Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội tổ chức biên soạn và giới thiệu bộ sách ÔN LUYỆN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA các môn học theo quy định.

Cuốn ÔN LUYỆN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA MÔN TOÁN được biên soạn với mục đích cung cấp một số đề thi tổng hợp để học sinh ôn luyện, củng cố và nâng cao kiến thức, kĩ năng giải toán nhằm đạt kết quả tốt nhất trong kì thi trung học phổ thông quốc gia. Nội dung các đề thi thuộc chương trình cơ bản nhưng có các câu hỏi phân hóa, học sinh có thể sử dụng các kiến thức, công thức của cả chương trình cơ bản và nâng cao để giải bài tập. Đồng thời, mỗi dạng bài tập có thể có nhiều cách triển khai và trình bày khác nhau để giáo viên giảng dạy môn Toán có thể cấu tạo các ma trận nhằm kiểm tra, đánh giá năng lực của học sinh.

Trong quá trình biên soạn sẽ không tránh khỏi những sơ suất, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

NHÓM BIÊN SOẠN

Đề số 1

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Chứng minh đường thẳng d: $y = -x + m$ luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $2(\sqrt{2}+1)^{x-2} + 3(\sqrt{2}-1)^{x-2} - 7 = 0$;

b) $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$.

Câu 3. a) Tính $I = \int\limits_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx$;

b) Tìm số phức z thỏa mãn: $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

Câu 4. Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn và tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^0$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng *(SAB)* và $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA, BD.*

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng (d): $3x - 22y - 6 = 0$, sao cho từ điểm M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua điểm C (0;1).

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm I(2; 3; -1) và đường thẳng (d) có phương trình: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. Tìm toạ độ điểm I' là điểm đối xứng với điểm I qua đường thẳng (d). Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng (d) và vuông góc với mặt phẳng (Oxy).

Câu 8. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=a \\ x+y=2a+1. \end{cases}$

Câu 9. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{4b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{4c^3}{(1+a)(1+b)}\geq 3.$$

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: $D=R\setminus\{-2\}$.

Sự biến thiên:

* Tiệm cận:

+) Vì $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{2x+1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2x+1}{x+2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

* Chiều biến thiên:

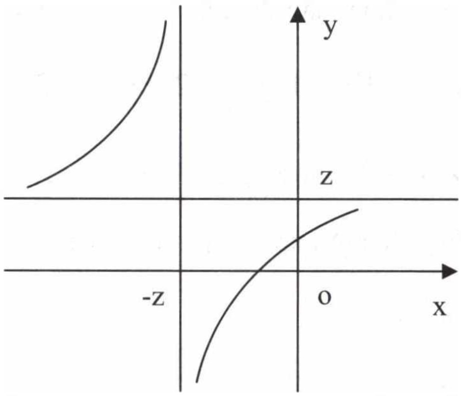
+) Ta có: $y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0, \forall x\neq -2.$

Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+	||	+
y	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

Vẽ đồ thị:



b) Hoành độ A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x+1}{x+2} = -x + m \Rightarrow x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0.$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác -2 thì

$$\begin{cases} \Delta = (4-m)^2 - 4(1-2m) \rangle 0 \\ 2^2 - (4-m)2 + 1 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12 \rangle 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

Khi đó

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right]$$

$$= 2\left[(m-4)^2 - 4(1-2m)\right] = 2(m^2 + 12).$$

Suy ra AB ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ m = 0. Khi đó $AB = 2\sqrt{6}$.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $2(\sqrt{2}+1)^{x-2} + 3(\sqrt{2}-1)^{x-2} - 7 = 0.$

Ta có: $2(\sqrt{2}+1)^{x-2} + 3(\sqrt{2}-1)^{x-2} - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2}+1)^{2(x-2)} + 3 - 7(\sqrt{2}+1)^{x-2} = 0 \quad (1)$$

Đặt $(\sqrt{2}+1)^{x-2} = t$ (2), $t > 0$, từ (1) ta có phương trình:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Cả 2 giá trị t nêu trên đều thoả mãn điều kiện $t > 0$. Khi đó

+ $(\sqrt{2}+1)^{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 2 = -\log_{\sqrt{2}+1} 2 \Leftrightarrow x = 2 - \log_{\sqrt{2}+1} 2$.

+ $(\sqrt{2}+1)^{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = \log_{\sqrt{2}+1} 3 \Leftrightarrow x = 2 + \log_{\sqrt{2}+1} 3$.

Hai giá trị x vừa tìm được là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Do: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$. Cho nên mẫu số khác không.

Phương trình trở thành: $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \cos^4 4x$

$$\Leftrightarrow 2 - \left(1 - \cos^2 4x\right) = 2\cos^4 4x \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos^2 4x; 0 \leq t \leq 1 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \cos^2 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$.

Đối chiếu với điều kiện phương trình có nghiệm: x=$\frac{n\pi}{2}\left(n \in Z\right)$.

Câu 3. a) Đặt: $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x. \end{cases}$

Vậy: $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = x.\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx = -\left(e^\pi + 1\right) + J$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$

Vậy: $J = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx = x.\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = 0 - I$

Do đó ta được: $2I = -\left(e^{\pi} + 1\right) \Rightarrow I = -\dfrac{e^{\pi} + 1}{2}$.

b) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1\right] = 0$

* Nếu $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z-i} = \pm 1 \Leftrightarrow z = 0.$

* Nếu $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) - i\right]\left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + i\right] = 0.$

$\Leftrightarrow z = \pm 1.$

Vậy $z = 0; z = \pm 1.$

Câu 4. +) Gọi A là biến cố "Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn".

B là biến cố "Con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn".

X là biến cố "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn".

Ta có A và B là hai biến cố độc lập và P(A) = P(B) = $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ *(Trong 6 mặt thì có 3 mặt chẵn)*. Do vậy ta có:

P(X) = P(AB) = P(A) . P(B) = $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

+) Gọi Y là biến cố "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn"

Có 3 khả năng xảy ra để tích số chấm trên con súc sắc là số chẵn:

Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt lẻ.

Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt lẻ, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn.

Cả hai con súc sắc cùng xuất hiện mặt chẵn.

Và ta có $\overline{Y}$ "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số lẻ" chỉ có 1 khả năng là cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt lẻ.

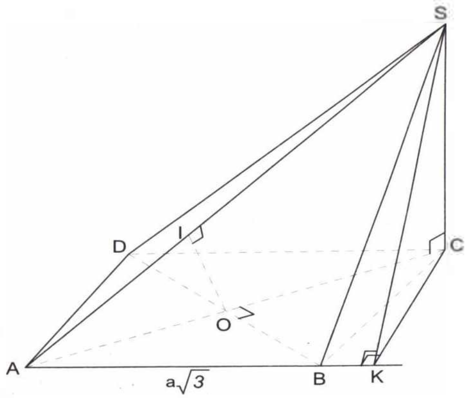
Như vậy một lần nữa ta lại thấy ưu thế của biến cố đối.

Ta có $\overline{Y} = \overline{AB}\ \overline{Y}$ và $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập nên ta có:

$P(\overline{Y}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Do đó $P(Y) = 1 - P(\overline{Y}) = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$.

Câu 5.



Kẻ $SK \perp AB$ $(K \in AB) \Rightarrow CK \perp AB$ (định lí 3 đường vuông góc).

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng *(SAB)* và *(ABCD)* là góc giữa SK và CK. Do $\widehat{SKC}$ nhọn nên $\widehat{SKC} = 45^0$;

$\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CBK} = 60^0$.

Trong tam giác vuông CKB:

$CK = CB\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$.

Tam giác SCK vuông cân tại C nên $SC = \frac{3a}{2}$.

Ta có $S_{ABCD} = AB.BC\sin 120^0 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SC = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ (đvtt).

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

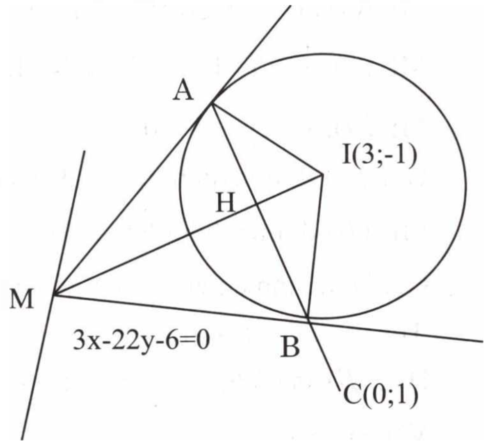
Kẻ $OI \perp SA$ $(I \in SA) \Rightarrow$ OI là đoạn vuông góc chung của SA và BD.

Dùng hai tam giác đồng dạng AOI và ASC suy ra $OI = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

Vậy $d(SA, BD) = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

Câu 6. Ta có (C):

$(x-3)^2+(y+1)^2=25$, có I(3;-1) và R=5.



Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M.

Gọi M

$(x_0;y_0)\in d \Rightarrow 3x_0-22y_0-6=0$ (*)

Hai tiếp tuyến của (C) tại A, B có phương trình là:

$(x_1-3)(x-3)+(y_1+1)(y+1)=25 \quad (1)$ và:

$(x_2-3)(x-3)+(y_2+1)(y+1)=25 \quad (2)$.

Để 2 tiếp tuyến trở thành 2 tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M;

$(x_1-3)(x_0-3)+(y_1+1)(y_0+1)=25 \quad (3)$ và

$(x_2-3)(x_0-3)+(y_2+1)(y_0+1)=25 \quad (4)$.

Từ (3) và (4) chứng tỏ AB có phương trình là:

$(x_0-3)(x-3)+(y_0+1)(y+1)=25 \quad (5)$.

Theo giả thiết thì AB qua C(0;1) suy ra:

$-3(x_0-3)+2(y_0+1)=25 \Leftrightarrow -3x_0+2y_0-14=0$ (6).

Kết hợp với (*) ta có hệ:

$$\begin{cases}3x_0-22y_0-6=0\\-3x_0+2y_0-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_0=-1\\x_0=-\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{16}{3};-1\right).$$

Câu 7. Phương trình tham số của (d) là: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+t\\z=-3-t\end{cases} (\forall t\in R)$.

MP (α) đi qua đt (d) và vuông góc với mp (Oxy).

Đường thẳng (d) đi qua điểm M_0(-1;2;-3) và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)$

MP (Oxy): z = 0 có VTPT $\vec{n}_1=(0;0;1)$

MP (α) có VTPT $\vec{n}=[\vec{u};\vec{n}_1]=(1;-2;0)$ đi qua điểm $M_0(-1;2;-3)$.

MP (α): x - 2y + 5 = 0

Gọi (β) đi qua điểm I(1;-2;3) và vuông góc với đt (d).

MP (β) đi qua điểm I(1;-2;3) có VTPT $\vec{u}=(2;1;-1)$ là 2x+y-z+3 = 0.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng (d) ta có H(-1+2t; 2 + t; -3-t)

H $\in(\beta)$ ta có 6t + 6 = 0 ⇔ t = -1.

Vậy H(-3;1;-2).

Gọi I'(x;y;z) đối xứng với I qua (d)

⇔ H là trung điểm của II'⇔ $\begin{cases} x=-7 \\ y=4 \\ z=-7. \end{cases}$

Vậy I'(-7;4;-7).

Câu 8. Điều kiện $\begin{cases} x\geq -1 \\ y\geq 1 \end{cases}$

Hệ PT ⇔ $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=a \\ (\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{y-1})^2=2a+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=a \\ \sqrt{x+1}.\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}\left[a^2-(2a+1)\right] \end{cases}$$

Vậy $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{y-1}$ là nghiệm của PT: $t^2-at+\frac{1}{2}(a^2-2a-1)=0$ (*).

Rõ ràng hệ trên có nghiệm khi PT (*) có 2 nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\geq 0 \\ S\geq 0 \\ P\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2(a^2-2a-1)\geq 0 \\ a\geq 0 \\ \frac{1}{2}(a^2-2a-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\leq a\leq 2+\sqrt{6}.$$

Câu 9. Áp dụng BĐT Cô–si ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge\frac{3a}{4};$$
$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\ge\frac{3b}{4};$$
$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\ge\frac{3c}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c = 1.

Đề số 2

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $y=0,\ x=2, x=3$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log_{1/2}^2 x+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\left(4-\log_{16}x^4\right)$.

b) Giải phương trình $48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\left(1+\cot 2x.\cot x\right)=0$.

Câu 3.

a) Tính $I_1=\int\limits_1^4|x-2|dx$; $I_2=\int\limits_0^2\left|x^2+2x-3\right|dx$.

b) Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức: $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

Câu 4. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = a, CD = 2a; hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0; gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ G đến mặt (SBC).

Câu 6. Cho hai điểm A(1;1), B(4;-3) và đường thẳng (d): x-2y-1=0. Tìm tọa độ điểm C trên (d) sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB=6. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB ?

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và mặt phẳng (P): $x-y+z-4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Hãy viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 8. Giải pt: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$.

Câu 9. Cho các số thực $x,y,z\in(0;1)$ và $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}$.

Giải

Câu 1. a) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$y'=x^2-4x+3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

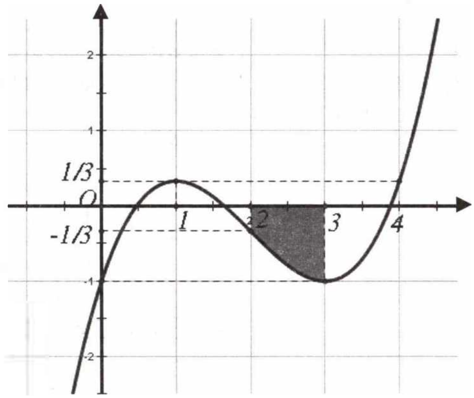
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;3)$.

Điểm cực đại $\left(1;\frac{1}{3}\right)$

Điểm cực tiểu $(3;-1)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.



b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (*C*) và các đường thẳng y = 0, x = 2, x = 3 là:

$$S=\int_2^3\left|\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1\right|dx=-\int_2^3\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1\right)dx$$

$$=-\left(\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Bigg|_2^3=\frac{3}{4}.$$

Câu 2. a) Đặt $t=\log_2 x$ ta có $\sqrt{t^2+2t}<\sqrt{2}(4-t)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+2t\ge 0\\ t^2+2t<2(4-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le -2\\ t\ge 0\end{array}\right.\\ t^2-18t+32>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le -2\\ t\ge 0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}t<2\\ t>16\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -2\\ 0\le t<2\\ t>16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\le -2\\ 0\le \log_2 x<2\\ \log_2 x>16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\le \frac{1}{4}\\ 1\le x<4\\ x>2^{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>0.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2}$ (*).

Phương trình $\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\left(1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\sin x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin 2x\sin x+\cos 2x\cos x}{\sin 2x\sin x}=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\sin^2 x.\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{1}{\sin^4 x}=0\Leftrightarrow 48\sin^4 x\cos^4 x-\sin^4 x-\cos^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x-\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sin^2 2x;0\le t\le 1\\ 6t^2+t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{2}{3}<0\\ t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Do đó: $\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x=0\Leftrightarrow \cos 4x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$. Thỏa mãn điều kiện (*).

Câu 3. a)

x	1	2	4
x - 2	-	0	+

Vậy: $I_1=\int_1^4|x-2|dx=\int_1^2(2-x)dx+\int_2^4(x+2)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]\Big|_2^4$

$$=\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[(8-8)-(2-4)\right]=\frac{5}{2}.$$

Lập bảng xét dấu $x^2+2x-3,\quad x\in[0,2]$ tương tự ta được:

$$I_2=\int_0^2|x^2+2x-3|dx=-\int_0^1(x^2+2x-3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$I_2=\left[3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1+\left[-3x+x^2+\frac{x^3}{3}\right]\Big|_1^2=4.$$

b) $\Delta'=-9=9i^2$ do đó phương trình có 2 nghiệm $z_1=-1-3i$, $z_2=-1+3i$.

Suy ra $A=|z_1|^2+|z_2|^2=(1+9)+(1+9)=20$.

Câu 4. Vì có 6 vị trí nên nếu số 1 đứng trước thì có 5 trường hợp số 6 đứng ngay sau. Cũng có 5 trường hợp số 1 đứng ngay sau số 6. Trong mỗi trường hợp, bốn vị trí còn lại có 4.3.2.1 = P_4 cách chọn.

Vậy có (5+5).P_4 = 240 số mà số 6 và số 1 đứng cạnh nhau.

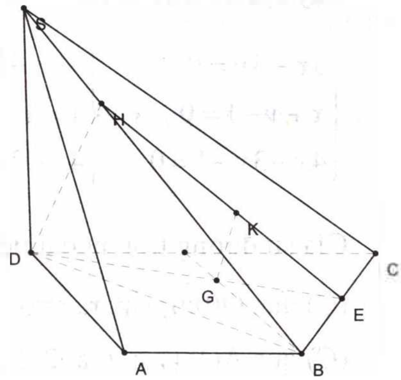
Có tất cả $P_6 = 6! = 720$ số có 6 chữ số.

Suy ra số các số thỏa mãn đầu bài là 720 - 240 = 480.

Câu 5.

+) Từ giải thiết ta có SD $\perp$ (ABCD).

suy ra (SB, (ABCD)) = $\widehat{SBD} = 60^0$.



Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)AD = \frac{3a^2}{2} \text{ (đvdt)}.$$

+) Do tam giác ABD vuông cân tại A, AB= a.

$$\Rightarrow BD = a\sqrt{2} \Rightarrow SD = BD\tan 60^0 = a\sqrt{6}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SD.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt).

+) Chứng minh được BC $\perp$ (SBD), kẻ DH $\perp$ SB => DH $\perp$ (SBC)

Có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{DB^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

+) Gọi E là trung điểm BC, kẻ GK // DH, K thuộc HE $\Rightarrow$ GK $\perp$ (SBC) và

$\dfrac{GK}{DH} = \dfrac{EG}{ED} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GK = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ Vậy d(G, (SBC)) = $GK = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 6.

+) (AB) qua A(1;1) có

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3;-4) \Rightarrow (AB): \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0.$$

Vì C thuộc x-2y-1=0 nên suy ra C(2t+1;t) do đó:

$$6=\frac{\left|4\left(2t+1\right)+3t-7\right|}{5}\Leftrightarrow\left|11t-3\right|=30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\rightarrow C_1\left(7;3\right)\\ t=-\dfrac{27}{11}\rightarrow C_2\left(-\dfrac{43}{11};-\dfrac{27}{11}\right)\end{array}\right..$$

+) Đường thẳng qua O vuông góc với AB có phương trình: 3x-4y=0.

Đường thẳng qua B và vuông góc với OA có phương trình: (x-4)+(y+3)=0.

Đường thẳng qua A và vuông góc với OB có phương trình: 4(x-1)-3(y-1)=0 hay: 4x-3y-1=0.

Vậy tọa độ trực tâm H là nghiệm:

$$\begin{cases}3x-4y=0\\ x+y-1=0\\ 4x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4\left(1-x\right)=0\\ y=1-x\\ 4x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{7}\\ y=\dfrac{3}{7}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right).$$

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

(C) qua O(0;0) suy ra c=0 (1)

(C) qua A(1;1) suy ra: 2-2a-2b=0 , hay: a+b=1 (2)

(C) qua B(4;-3) suy ra: 25-8a+6b=0 , hay: 8a-6b=25 (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ:

$$\begin{cases}a+b=1\\ 8a-6b=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\ 8a-6(1-a)=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-\dfrac{31}{14}\\ a=\dfrac{31}{14}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{17}{14}\\ a=\dfrac{31}{14}\end{cases}.$$

Vậy (C): $x^2+y^2-\frac{31}{7}x+\frac{17}{4}y=0$.

Câu 7.

+) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$, $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)$

Vì (Q) qua A, B và vuông góc với (P) nên (Q) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = (0;4;4).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là

$4(y-2) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow y + z - 2 = 0.$

Vậy phương trình (Q): $y + z - 2 = 0.$

+) Gọi I là trung điểm của AB. Hãy viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Do I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ nên I là trung điểm của AB. Tọa độ trung điểm I của AB là: $I(2;3;-1)$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P), bán kính của mặt cầu (S) là:

$$R = d(I,(P)) = \frac{|2-3-1-4|}{\sqrt{3}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 12.$

Câu 8. Ta có $2x^2 + x + 1 > 0$ và $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ TXĐ: $\mathbb{R}$.

Từ PT suy ra $x > 0$.

Khi đó PT $\Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 3$.

Đặt $t = \frac{1}{x}, t > 0$

Ta được $\sqrt{2+t+t^2} + \sqrt{1-t+t^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2+t+t^2} = 3 - \sqrt{1-t+t^2}$

$\Rightarrow 2 + t + t^2 = 9 + 1 - t + t^2 - 6\sqrt{1-t+t^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-t+t^2} = 4 - t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - t \geq 0 \\ 9(1-t+t^2) = 16 - 8t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 8t^2 - t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{7}{8} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với t > 0 ta được $t = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy pt có nghiệm duy nhất x = 1.

Câu 9. Vì $0 < x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\frac{2}{3} = \frac{2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq x(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

Tương tự: $\frac{y}{1-y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2$; $\qquad \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$.

Khi đó: $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đề số 3

Câu 1. Cho hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số với m = 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_1) biết hoành độ tiếp điểm $x_0 = 1$.

c) Giả sử đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Hãy xác định m sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $\log_5 x.\log_5\left(x^2 - x\right) + \log_5\left[x\left(x-1\right)^2\right] - 2 = 0$.

b) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2\left(\sin^{10} x + \cos^{10} x\right) + \frac{5}{4}\cos 2x$.

Câu 3.

a) Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x - x^2}\,dx$.

b) Tính môđun của số phức $z = (\sqrt{3} - i)^{2017}$.

Câu 4. Tính tổng $S = C_{2009}^{0} + 2C_{2009}^{1} + 3C_{2009}^{2} + ... + 2010C_{2009}^{2009}$.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh 2a , tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân đỉnh S. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu 6. Trong hệ tọa độ *Oxy,* cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Câu 7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1 và I là tâm của ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của B'B, CD và A'D'. Tính góc giữa hai đường thẳng MP, C'N và góc giữa hai mặt phẳng (PAI), (DCC'D'). Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng A'B, B'D và cặp đường thẳng PI, AC'.

Câu 8. Giải bpt: $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} \le 0$.

Câu 9. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{4}$.

Giải

Câu 1.

a) Với m = 1 ta có: $y = x^4 - 4x^2 + 3$. (C_1)

$y' = 4x^3 - 8x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	

HS đồng biến trên $(-\sqrt{2};0)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$

HS nghịch biến trên $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\sqrt{2})$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4 - 4x^2 + 3\right) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		CT		CĐ		CT		$+\infty$

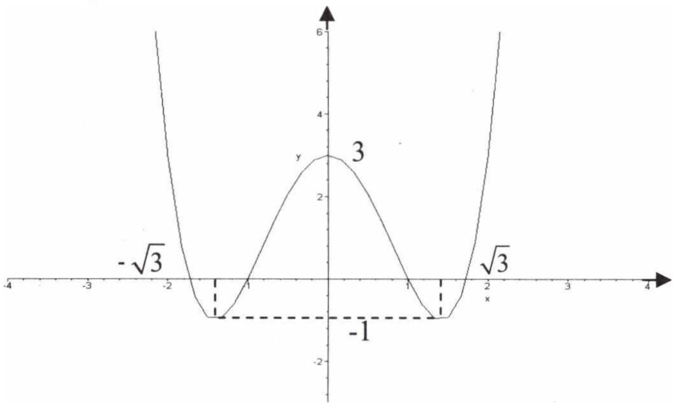
$y_{CĐ} = y(0) = 3$; $\qquad y_{CT} = y(\pm\sqrt{2}) = -1$.

(C_1) cắt trục Oy tại điểm (0;3).

(C_1) cắt trục Ox tại điểm (-1;0), (1;0), $(-\sqrt{3};0)$ và $(\sqrt{3};0)$.

b) Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C_1)$

$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$; $y'_{(1)} = -4$.



Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_1) tại điểm M_0 là: $y = -4x + 4$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm

$x^4 - 4x^2 + 2m + 1 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$.

Ta được phương trình: $t^2 - 4t + 2m + 1 = 0 \qquad (2)$

Để PT (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm $0 < t_1 < t_2$.

Ta có $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m > \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} < m < \dfrac{3}{2} \qquad (*)$

Vậy với $\frac{-1}{2} < m < \frac{3}{2}$ PT (1) có 4 nghiệm phân biệt tương ứng là:

$-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Do $y = x^4 - 4x^2 + 2m + 1$ là hàm số chẵn (Nhận trục Oy làm trục đối xứng) theo yêu cầu bài ta có:

$$\int_0^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 4x^2 + 2m + 1)dx = 0 \Leftrightarrow 3t_2^2 - 20t_2 + 15(2m+1) = 0 \qquad (3)$$

Mặt khác t_2 là nghiệm PT (2) ta có: $t_2^2 - 4t_2 + 2m + 1 = 0$ (4)

Từ (3) và (4) tìm được $m = \frac{11}{18}$ thoả mãn điều kiện (*).

Kết luận: $m = \frac{11}{18}$.

Câu 2. a) Điều kiện $\begin{cases} x(x-1)^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_5 \frac{(x^2-x)^2}{x} + \log_5 x.\log_5(x^2-x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_5(x^2-x) + \log_5 x.\log_5(x^2-x) - 2 - \log_5 x = 0.$$

Đặt $\begin{cases} u = \log_5(x^2-x) \\ v = \log_5 x. \end{cases}$

Thay vào phương trình ta được:

$$2u - v + uv - 2 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(v+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = -2. \end{array}\right.$$

Với $\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5(x^2-x) = 1 \\ \log_5 x = -2 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 5 = 0 \\ x = \dfrac{1}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1}{25}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, ta được $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

b) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2\left(\sin^{10} x + \cos^{10} x\right) + \dfrac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x + \cos^8 x = 2\left(\sin^{10} x + \cos^{10} x\right) + \dfrac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^8 x - 2\sin^{10} x\right) + \left(\cos^8 x - 2\cos^{10} x\right) - \dfrac{5}{4}\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^8 x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos^8 x\left(1 - 2\cos^2 x\right) - \dfrac{5}{4}\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^8 x\cos 2x - \cos^8 x\cos 2x - \dfrac{5}{4}\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin^8 x - \cos^8 x - \dfrac{5}{4}\right) = 0.$

- Trường hợp: $\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}.$

- Trường hợp: $\sin^8 x - \cos^8 x - \dfrac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^8 x = \cos^8 x + \dfrac{5}{4}$ phương trình này vô nghiệm vì VT$= \sin^8 x \le 1$, $VP = \cos^8 x + \dfrac{5}{4} \ge \dfrac{5}{4}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Câu 3.

a) $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{x-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

Đặt: $2x-1=\sin t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cos t dt.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\rightarrow t=0 \\ x=1\rightarrow t=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Vậy: $I=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{8}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0+0)\right]=\frac{\pi}{16}.$

b) Ta có,

$(\sqrt{3}-i)^3=(\sqrt{3})^3-3.(\sqrt{3})^2.i+3.\sqrt{3}.i^2-i^3=3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}+i=-2^3.i.$

Do đó,

$(\sqrt{3}-i)^{2016}=\left[(\sqrt{3}-i)^3\right]^{672}=(-2^3i)^{672}=2^{2016}.i^{672}=2^{2016}.(i^4)^{168}=2^{2016}.$

Vậy, $z=(\sqrt{3}-i)^{2017}=2^{2016}.(\sqrt{3}-i)\Rightarrow |z|=2^{2016}.\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2^{2017}.$

Câu 4. Xét đa thức:

$f(x)=x(1+x)^{2009}=x(C_{2009}^0+C_{2009}^1x+C_{2009}^2x^2+...+C_{2009}^{2009}x^{2009})$

$=C_{2009}^0x+C_{2009}^1x^2+C_{2009}^2x^3+...+C_{2009}^{2009}x^{2010}.$

Ta có: $f'(x)=C_{2009}^0+2C_{2009}^1x+3C_{2009}^2x^2+...+2010C_{2009}^{2009}x^{2009}.$

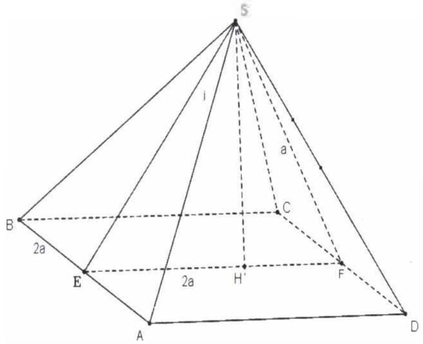
$\Rightarrow f'(1)=C_{2009}^0+2C_{2009}^1+3C_{2009}^2+...+2010C_{2009}^{2009}\qquad (a)$

Mặt khác: $f'(x)=(1+x)^{2009}+2009(1+x)^{2008}x=(1+x)^{2008}(2010+x).$

$\Rightarrow f'(1)=2011.2^{2008}\qquad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra: $S=2011.2^{2008}.$

Câu 5.



Ta có diện tích đáy hình vuông ABCD: $S = 4a^2$.

Gọi E, F lần lượt trung điểm AB và CD. Tam giác SAB đều nên đường cao $SE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SCD vuông cân đỉnh S nên đường cao $SF = a$.

Do đó ta có tam giác SEF vuông tại S (vì $EF^2 = SE^2 + SF^2$).

Trong tam giác SEF kẻ SH vuông góc EF tại H.

Ta có SH vuông góc mp(ABCD) . $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SE^2} + \dfrac{1}{SF^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}S(ABCD).SH = \dfrac{1}{3}.4a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Câu 6. Ta có:

$(C_1): x^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow I_1(0;2), R_1 = 3,$

$(C_2): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9 \Rightarrow I_2(3;-4), R_2 = 3.$

Nhận xét: $I_1I_2 = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} < 3+3 = 6 \Rightarrow (C_1)$ không cắt (C_2).

Giả sử đường thẳng (d): ax+by+c =0 ($a^2 + b^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung, thế thì: $d(I_1, d) = R_1, d(I_2, d) = R_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 & (1) \\ \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2b+c| = |3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-4b+c = 2b+c \\ 3a-4b+c = -2b-c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ 3a - 2b + 2c = 0. \end{array}\right.$$

Mặt khác từ (1): $(2b+c)^2 = 9(a^2+b^2)$

- Trường hợp: a = 2b thay vào (1):

$$(2b+c)^2 = 9(4b^2+b^2) \Leftrightarrow 41b^2 - 4bc - c^2 = 0.$$

$$\Delta'_b = 4c^2 + 41c^2 = 45c^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{2b - 3\sqrt{5}c}{4} \\ b = \dfrac{(2+3\sqrt{5})c}{4}. \end{array}\right.$$

Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm:

$$d_1 : \frac{(2-3\sqrt{5})}{2}x + \frac{(2-3\sqrt{5})}{4}y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2-3\sqrt{5})x + (2-3\sqrt{5})y + 4 = 0.$$

$$d_2 : \frac{(2+3\sqrt{5})}{2}x + \frac{(2+3\sqrt{5})}{4}y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2+3\sqrt{5})x + (2+3\sqrt{5})y + 4 = 0.$$

- Trường hợp: $c = \dfrac{2b-3a}{2}$, thay vào (1):

$$\frac{\left|2b + \dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow |2b - a| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (2b-a)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \to c = -\dfrac{a}{2} \\ b = \dfrac{4a}{3} \to c = -\dfrac{a}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, a = -2c \\ b = \dfrac{4a}{3}, a = -6c. \end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường thẳng: $d_3 : 2x - 1 = 0$, $d_4 : 6x + 8y - 1 = 0$.

Câu 7. Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho:

O $\equiv$ A, tia AB $\equiv$ tia Ox,

tia AD $\equiv$ tia Oy, tia AA' $\equiv$ tia Oz.

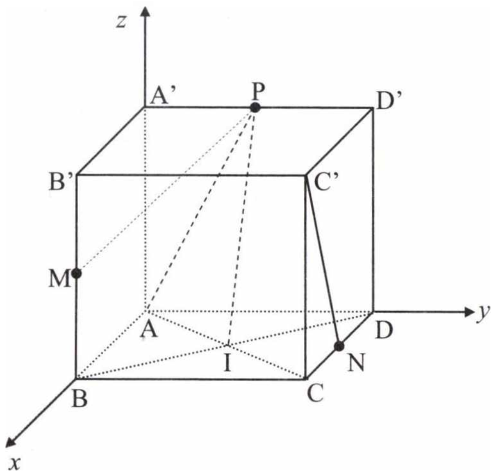
Khi đó, ta có:

A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0),

A'(0;0;1),

C(1;1;0), B'(1;0;1), D'(0;1;1),

C'(1;1;1).



a) Tính góc giữa hai đường thẳng MP, C'N và góc giữa hai mặt phẳng (PAI, (DCC'D').

Vì M, N, P lần lượt là trung điểm của B'B, CD và A'D' nên $M(1;0;\frac{1}{2})$,

$$N(\frac{1}{2};1;0),\ P(0;\frac{1}{2};1).$$

Khi đó, ta có $\overrightarrow{MP}=(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{C'N}=(-\frac{1}{2};0;-1)$.

$$\Rightarrow \cos(MP,C'N)=\frac{\left|\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C'N}\right|}{MP.C'N}=0.$$

$\Rightarrow$ góc giữa MP và C'N bằng 90^0.

Mặt khác, I là tâm của ABCD $\Rightarrow I(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$

$\Rightarrow$ (PAI) có VTPT là $\vec{n}=4.\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AP}\right]=4.(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{4})=(2;-2;1)$

(DCC'D') có VTPT là $\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{AD}=(0;1;0)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC'D').

Ta có: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n'}\right|}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\varphi=\arccos\dfrac{2}{3}\approx 48^\circ11'23''$.

b) Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng A'B, B'D và cặp đường thẳng PI, AC'.

Ta có: $\overrightarrow{A'B}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{B'D}=(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{A'B'}=(1;0;0)$

$$\Rightarrow d(A'B,B'D)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Mặt khác, $\overrightarrow{PI}=(\frac{1}{2};0;-1)$, $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AP}=(0;\frac{1}{2};1)$

$$\Rightarrow d(PI,AC')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PI},\overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{PI},\overrightarrow{AC'}\right]\right|}=\frac{\sqrt{14}}{28}.$$

Câu 8. Điều kiện: $x\geq -1$.

Bpt $\Leftrightarrow x^3+3x^2\sqrt{x+1}-4(x+1)\sqrt{x+1}\leq 0$ (*)

+) Nếu $x=-1\Rightarrow$ (*) nghiệm đúng

+) Nếu $x>-1$, (*) $\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}+\dfrac{3x^2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}-4\leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}}\leq 1\Leftrightarrow x\leq\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x<0\\ \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-x-1\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x<0\\ \begin{cases}x\geq 0\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\leq x\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp $x>-1$ ta được $-1<x\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của BPT là S = $\left[-1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Câu 9. Áp dụng BĐT Côsi: $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq \frac{4}{x+y}$.

Ta có: $\frac{1}{2x+y+z}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$.

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z}\leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$\frac{1}{x+y+2z}\leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Cộng vế với vế ta được đpcm.

Đề số 4

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) là nhỏ nhất.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $25.2^x - 10^x + 5^x > 25$;

b) Giải phương trình $\sin^4 x + \sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$;

b) Cho $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính z^{2014}.

Câu 4. Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho: Nam nữ ngồi xen kẽ nhau; Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD), $SA = a\sqrt{6}$, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tìm thể tích khối chóp H.SCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

Câu 6. Trong (Oxy) cho A(2;5) và đường thẳng (d): 2x+3y+4=0. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (d') qua A và tạo với (d) một góc bằng 45^0.

Câu 7. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 3*a*, BC = 4*a*, mặt phẳng (SBC) vuông góc (ABC). Biết SB = $2a\sqrt{3}$ và SBC = 30. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo *a*.

Câu 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) \\ \sqrt{x+2y}+\sqrt{4x+y} = 5. \end{cases}$

Câu 9. Với mọi số thực dương a; b; c thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{a^3}{(1-a)^2} + \dfrac{b^3}{(1-b)^2} + \dfrac{c^3}{(1-c)^2}$.

Giải

Câu 1. a) Tập xác định: $D = R\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên:

* Tiệm cận:

+) Vì $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-1}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x+1} = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

* Chiều biến thiên:

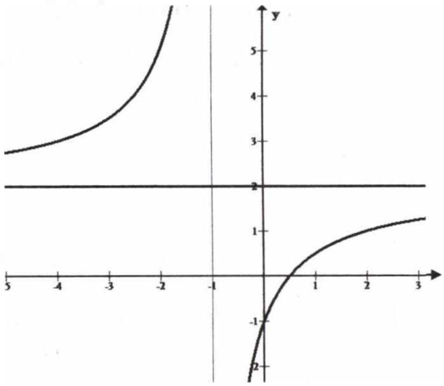
+) Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} \rangle 0, \forall x \neq -1.$

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	
y	2	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	2

Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Vẽ đồ thị



b) Lấy $M(x_0; y_0) \in (C)$ thì $y_0 = \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 + 1}$.

Gọi $d_1 = d(M_0, TCĐ) = |x_0 + 1|$, $d_2 = d(M_0, TCN) = |y_0 - 2|$.

Tổng các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) là:

$$d = d_1 + d_2 = |x_0 + 1| + |y_0 - 2| = |x_0 + 1| + \left|\frac{-3}{x_0 + 1}\right| \overset{Cô-si}{\geq} 2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy có 2 điểm có hoành độ $x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. a) $25.2^x - 10^x + 5^x > 25$

$\Leftrightarrow (25.2^x - 25) - (2^x.5^x - 5^x) > 0$

$\Leftrightarrow 25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)(25 - 5^x) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-1>0\\25-5^x>0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-1<0\\25-5^x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x>1\\5^x<25\end{cases}\\ \begin{cases}2^x<1\\5^x>25\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x<2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\x>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<2.$$

b) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9}{8}$

$$\Leftrightarrow 8\sin^4 x+8\left[\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2\right]=9$$

$$\Leftrightarrow 8\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}+8\left[\left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sin 2x}{2}\right)^2\right]=9$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\cos 2x)^2+2(1+\sin 2x)^2+2(1-\sin 2x)^2=9$$

$$\Leftrightarrow 6-2\cos 2x+\cos^2 2x+2\sin^2 2x=9$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x-2\cos 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x+2\cos 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (k $\in$ z)

Câu 3. a) Đặt: $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow -2tdt=dx$.

Đổi cận: $x=-3\rightarrow t=2$; $x=-8\rightarrow t=3$

Vậy $I=\displaystyle\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=2\int_2^3\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)t}$

$$= 2\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2} = -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = -\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \ln 2.$$

b) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow z^3 = z.z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow z^{2014} = z^{2013}.z = \left(z^3\right)^{671}.z = 1^{671}.z = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vậy với $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $z^{2014} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Câu 4. Cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang 6! = 720 cách.

Cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang, biết rằng nam nữ ngồi xen kẽ nhau 3! . 3! + 3! . 3! = 72 cách.

Cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang, biết rằng ba bạn nam ngồi cạnh nhau 4.3! . 3! = 144 cách.

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà nam và nữ xen kẽ nhau".

Gọi B là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau".

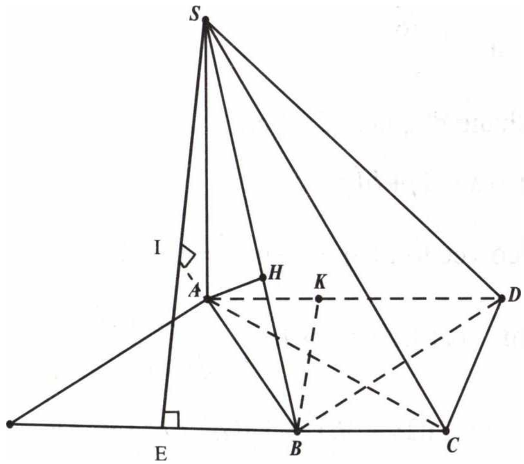
Ta có n(Ω) = 720,n(A) = 72,n(B) = 144

Suy ra: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{72}{720} = 0{,}1.$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = 0{,}2.$

Câu 5.

Trong tam giác vuông SAB có



$$SA^2 = SH.SB$$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{6a^2}{7a^2} = \frac{6}{7}.$$

$$V_{H.SDC} = \frac{6}{7}V_{B.SCD} = \frac{6}{7}V_{S.BCD}$$

$$= \frac{6}{7}SA.S_{BCD} = \frac{6}{7}a\sqrt{6}.S_{BCD}.$$

K là hình chiếu của B trên AD ta có: BK.AD = AB.BD suy ra

$$BK = \frac{AB.BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}BK.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

suy ra: $V_{HSDC} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{14}$.

Do AD//(SBC) nên $d_{(AD,SC)} = d_{(AD,(SBC))} = d_{(A,(SBC))}$

Từ A kẻ AE $\perp$ BC suy ra AH = BK = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và BC $\perp$ (SAE).

Từ A kẻ AI $\perp$ SE thì AI $\perp$ (SBC) do đó AI=d(A;(SBC))

Đặt $d_{(A,(SBC))}$ = h. Ta có $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{6a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{9}{6a^2}$

Suy ra $d_{(AD,SC)}$ = h = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 6. Đường thẳng d' qua A(2;5) có

$\vec{n}=(a;b)\Rightarrow d:a(x-2)+b(y-5)=0$ (1)

Đường thẳng d có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}=(2;3)$.

Theo giả thiết thì: $\cos(d;d')=\cos 45^0=\frac{2a+3b}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2(2a+3b)^2=13(a^2+b^2)\Leftrightarrow 5b^2+24ab-5a^2=0.$$

Ta có: $\Delta'_b=169a^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=-5a\\ b=\frac{a}{5}\end{array}\right.$

$+)\,b=-5a\Rightarrow d':(x-2)-5(y-5)=0\leftrightarrow x-5y+23=0.$

$+)\,a=5b\Rightarrow d':5(x-2)+(y-5)=0\leftrightarrow 5x+y-15=0.$

Câu 7. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ S lên BC.

Vì (SBC) $\perp$ (ABC) nên SH $\perp$ (ABC).

Mặt khác SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^\circ$.

$\Rightarrow SH=SB.\sin 30^\circ=a\sqrt{3},\ BH=SB.\cos 30^\circ=3a$.

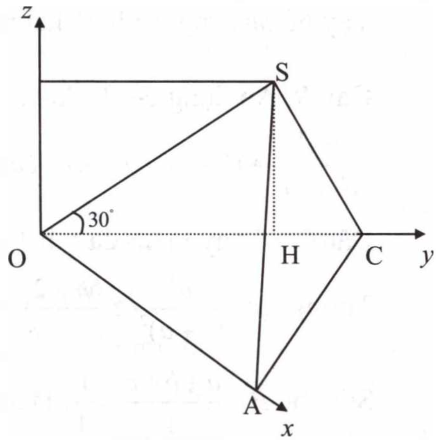
Dễ thấy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.(\frac{1}{2}.3a.4a)=2a^3\sqrt{3}$.

Bây giờ ta tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục O*xyz* với B là gốc tọa độ, tia BA là tia O*x*, tia BC là tia O*y*, tia O*z* là tia B*z* song song và cùng hướng với tia HS.

Khi đó: B(0;0;0), A(3a;0;0),

C(0;4a;0), S(0;3a; $a\sqrt{3}$).



$\Rightarrow \overrightarrow{AS} = (-3a;3a;a\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}$

$= (-3a;4a;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(-4a^2\sqrt{3};-3a^2\sqrt{3};-3a^2\right)$

$= -\sqrt{3}a^2.(4;3;\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (SAC) có phương trình là: $4(x-3a)+3(y-0)+\sqrt{3}(z-0)=0$.

$\Leftrightarrow 4x+3y+\sqrt{3}z-12a=0$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

$$d(B,(SAC)) = \frac{|-12a|}{\sqrt{4^2+3^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 8. $\begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) & (1) \\ \sqrt{x+2y}+\sqrt{4x+y} = 5 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x+2y \ge 0; x+4y \ge 0$.

(1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 7xy + 2y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 3x-y+1=0. \end{array}\right.$

+) $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$ thế vào (2)

$\Rightarrow \sqrt{4y}+\sqrt{9y}=5 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$ (tm).

+) $3x-y+1=0 \Leftrightarrow y=3x+1$, (2) trở thành: $\sqrt{7x+1}+\sqrt{7x+2}=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{7} \\ \sqrt{49x^2+21x+2} = 11-7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{7} \le x \le \frac{11}{7} \\ x = \frac{17}{25} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17}{25} \Rightarrow y = \frac{76}{25} \text{ (tm)}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (x;y) = (2;1) và (x;y) = $\left(\frac{17}{25};\frac{76}{25}\right)$.

Câu 9. Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2}+(b+c)+(b+c)\geq 6a \Leftrightarrow \frac{a^3}{(b+c)^2}\geq\frac{6a-2b-2c}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ 2a = b + c.

Tương tự: $\frac{b^3}{(c+a)^2}\geq\frac{6b-2c-2a}{8}$; $\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq\frac{6c-2a-2b}{8}$.

Suy ra: $P\geq\frac{a+b+c}{4}=\frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Kết luận: minP = $\frac{1}{4}$.

Đề số 5

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ (1).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1).

b) Định m để phương trình: $|x^3-3x+2|=\log_2(m^2+1)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 2. Giải phương trình

a) $6(\sqrt{3}-1)^{2\sqrt{x^2-x}}+(\sqrt{3}+1)^{2\sqrt{x^2-x}}-5.2^{\sqrt{x^2-x}}=0$;

b) 3tan2x-4tan3x= $\tan^2 3x.\tan 2x$.

Câu 3.

a) Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $-z^2+2z-5=0$.

Câu 4. Một đoàn tàu có ba toa chở khách là toa A, toa B, toa C. Trên sân ga có bốn hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa ít nhất có 4 chỗ trống. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó? Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên.

Câu 5. Cho lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $AB = a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60^0$, hình chiếu vuông góc của *A'* trên mặt phẳng (*ABC*) trùng với trọng tâm *G* của tam giác *ABC* và góc giữa *AA'* tạo với mặt phẳng (*ABC*) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *A'.ABC* và khoảng cách từ *G* đến mặt phẳng (*A'BC*).

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$, tâm là I và đường thẳng (Δ): mx + 4y = 0. Tìm m biết đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{4}$, $d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và $A(-1;2;0)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 và cách *A* một khoảng bằng 3.

Câu 8. Giải pt: $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$.

Câu 9. Tìm GTLN của hàm số $f(x,y,z) = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$ trên miền

$D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$.

Giải

Câu 1.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số (1).

TXĐ: $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $y_{(1)} = 0$, $y_{(-1)} = 4$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(1; +\infty)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = 0$ và hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CĐ} = 4$.

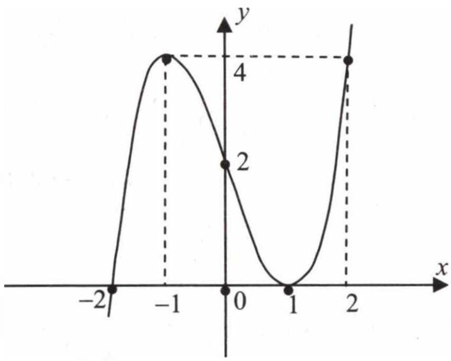
Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị đi qua các điểm (−2; 0), (2; 4)

Đồ thị: hình vẽ.



b) Định m để phương trình: $\left|x^3 - 3x + 2\right| = \log_{\sqrt[4]{2}}(m^2 + 1)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Phương trình đã cho là phương trình hoành độ giao điểm giữa $(d): y = \log_2(m^2 + 1)$ và $(C'): y = \left|x^3 - 3x + 2\right|$, với (*C*') được suy ra từ (*C*) như sau: giữ nguyên đồ thị (*C*) phía trên trục Ox, bỏ phần đồ thị phía dưới trục Ox đồng thời lấy đối xứng qua trục Ox.

Từ đồ thị suy ra (*d*) cắt (*C*') tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$0 < \log_2(m^2 + 1) < 4$

$\Leftrightarrow 1 < m^2 + 1 < 16 \Leftrightarrow 0 < m^2 < 15 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < \sqrt{15} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} |m| < \sqrt{15} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 2.

a) Điều kiện: $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Với điều kiện đó, ta có:

$$6(\sqrt{3}-1)^{2\sqrt{x^2-x}} + (\sqrt{3}+1)^{2\sqrt{x^2-x}} - 5.2^{\sqrt{x^2-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 + \left(2+\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{x^2-x}} - 5\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{x^2-x}} = 0 \qquad (1)$$

Đặt $(2+\sqrt{3})^{\sqrt{x^2-x}} = t$ (2), $t>0$, ta có phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Cả 2 giá trị t nêu trên đều thoả mãn điều kiện $t > 0$, khi đó:

- $(2+\sqrt{3})^{\sqrt{x^2-x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = \log_{2+\sqrt{3}} 2 \Leftrightarrow x^2 - x - \log^2_{2+\sqrt{3}} 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{1+4\log^2_{2+\sqrt{3}} 2}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{1+4\log^2_{2+\sqrt{3}} 2}}{2}. \end{array}\right.$$

- $(2+\sqrt{3})^{\sqrt{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = \log_{2+\sqrt{3}} 3$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - \log^2_{2+\sqrt{3}} 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{1+4\log_{2+\sqrt{3}}^2 3}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{1+4\log_{2+\sqrt{3}}^2 3}}{2}. \end{array}\right.$$

Bốn giá trị x vừa tìm được thoả mãn (*). Vậy phương trình đã cho có tất cả 4 nghiệm.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$ $(*)$ Phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow 3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x.\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow 3(\tan 2x - \tan 3x) = \tan 3x(\tan 3x.\tan 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\tan 2x - \tan 3x)}{(\tan 3x.\tan 2x + 1)} = \frac{1}{3}\tan 3x$$

$$\Leftrightarrow -3\tan x = \tan 3x \Leftrightarrow 2\tan x + (\tan 3x + \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x.\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos 3x.\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{2\cos 2x}{\cos 3x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\frac{\cos 3x + 2\cos 2x.\cos x}{\cos x.\cos 3x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 3x + \cos 3x + \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 8\cos^3 x - 5\cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \text{cosx=0} \\ \text{cosx=}\dfrac{5}{8} = \cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \text{x=}\dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{x=}\pm\arccos\dfrac{5}{8} + k2\pi \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy nghiệm

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \text{cos3x=cos}\left(3\dfrac{\pi}{2} + 3k\pi\right) = 0$. Vi phạm điều kiện, nên bị loại.

Vậy phương trình còn có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \text{x=}\pm\arccos\dfrac{5}{8} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$.

Câu 3. a) Đặt: $t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}\left(\tan^2\dfrac{x}{2} + 1\right)dx \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$.

Đổi cận: $x = 0 \to t = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \to t = 1$.

Vậy: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$.

b) Xét phương trình $-z^2 + 2z - 5 = 0$ (*)

Ta có, $\Delta = 2^2 - 4.(-1).(-5) = -16 = (4i)^2$.

Vậy, pt (*) có 2 nghiệm phức phân biệt $z_1 = \dfrac{-2-4i}{-2} = 1 + 2i$ và

$$z_2 = \frac{-2+4i}{-2} = 1 - 2i.$$

Câu 4.

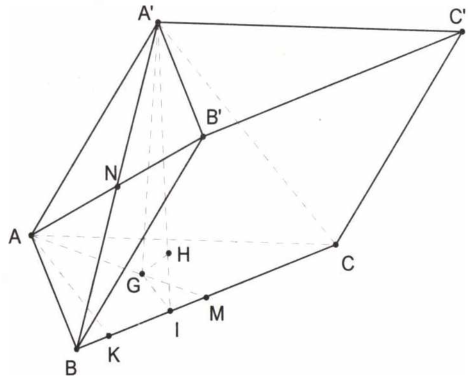
+) Cả 3 khách lên toa A, có 1 cách.

Có 3 khách lên toa A, khách thứ 4 lên toa B hoặc C, có C_4^3 cách.

Có 2 khách lên toa A, C_4^2 cách, 2 cách còn lại có 4 cách chọn (cùng lên 1 toa B hoặc C, mỗi người lên 1 toa B hoặc C), vậy có 4. C_4^2 cách.

Vì có 4 khách lên 3 toa tàu nên ít nhất có 1 toa có 2 khách trở lên. Giả sử đó là toa A. Lập luận trên cho thấy có $(1+C_4^3+C_4^2).3=99$ cách (do vai trò các toa như nhau).

Câu 5.



Từ $A'G\perp(ABC)\Rightarrow AG$ là hình chiếu của AA' lên (ABC).

Gọi M là trung điểm BC. Từ giả thiết ta có:

$BC=2a,\ \widehat{A'AG}=60^0$

$\Rightarrow A'G=AG.\tan60^0=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.$

Vì $AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos60^0=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}.$

Mặt khác $AB^2+AC^2=a^2+3a^2=4a^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A.

$\Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2a}{3}.$

Và $A'G\perp(ABC)$ nên $A'G$ là chiều cao của khối chóp $A'.ABC$

Thể tích của khối chóp $A'.ABC$ được tính bởi:

$V_{A'.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.A'G=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.AC.A'G=\dfrac{1}{6}a.a\sqrt{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a^3}{3}$ (đvtt).

Kẻ AK $\perp$ BC tại K và GI $\perp$ BC tại I $\Rightarrow$ GI // AK

$\Rightarrow\dfrac{GI}{AK}=\dfrac{MG}{MA}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow GI=\dfrac{1}{3}AK=\dfrac{1}{3}.\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$

Kẻ GH $\perp$ A’I tại H (1)

Do: $\left.\begin{matrix}BC\perp GI\\ BC\perp A'G\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp GH$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $GH \perp (A'BC) \Rightarrow d[G,(A'BC)] = GH$.

Ta có $\Delta A'GI$ vuông tại G có GH là đường cao nên:

$$d[G,(A'BC)] = GH = \frac{A'G.GI}{\sqrt{A'G^2 + GI^2}} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{12a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{2a}{\sqrt{51}} = \frac{2a\sqrt{51}}{51}.$$

Câu 6. Ta có (C): $(x-1)^2 + (y-m)^2 = 25 \quad \Rightarrow I(1;m), R = 5$.

Nếu Δ: mx +4y=0 cắt (C) tại 2 điểm A,B thì tọa độ A, B là nghiệm

$$\begin{cases} y = -\frac{m}{4}x \\ \left(\frac{m^2+16}{16}\right)x^2 - 2\left(\frac{m^2-4}{4}\right)x + m^2 - 24 = 0 \, (1) \end{cases}$$

Điều kiện: $\Delta' = 25 > 0, \forall m$.

Khi đó gọi $A\left(x_1; -\frac{m}{4}x_1\right), B\left(x_2; -\frac{m}{4}x_2\right)$.

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + \frac{m^2}{16}(x_2-x_1)^2} = |x_2 - x_1|\frac{\sqrt{m^2+16}}{4} = \frac{40}{\sqrt{m^2+16}}.$$

Khoảng cách từ I đến d = $\frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}AB.d = \frac{1}{2}.\frac{40}{\sqrt{m^2+16}}.\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}} = \frac{20|5m|}{m^2+16}$$

$$\Rightarrow \frac{20|5m|}{m^2+16} = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = \pm\frac{16}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $m = \pm 3$, $m = \pm\frac{16}{3}$.

Câu 7. Vec tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u}_1 = (1;-3;4)$, của d_2 là

$$\vec{u}_2=(2;-1;-2)$$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Do $\vec{n}\perp\vec{u}_1,\vec{n}\perp\vec{u}_2\Rightarrow\vec{n}=\frac{1}{5}[\vec{u}_1;\vec{u}_2]=\frac{1}{5}(10;10;5)=(2;2;1)$

Suy ra $(P):2x+2y+z+m=0$. Từ giả thiết $d(A;(P))=3$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{-2+4+m}{\sqrt{4+4+1}}\right|=3\Leftrightarrow|m+2|=9\Leftrightarrow m=7\vee m=-11$$

Vậy $(P):2x+2y+z+7=0$ hoặc $(P):2x+2y+z-11=0$.

Câu 8. ĐK: $x\geq 0$;

PT $\Leftrightarrow x^2+2x+4=3\sqrt{x(x^2+4)}\Leftrightarrow(x^2+4)+2x=3\sqrt{x(x^2+4)}$

$$\Leftrightarrow 1+2\frac{x}{x^2+4}=3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\Rightarrow t\geq 0$, ta có pt: $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow$ t = 1 và t = $\frac{1}{2}$

+) $t=1\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}=1\Leftrightarrow x^2+4=x$, vô nghiệm.

+) $t=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+4=4x\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$

Vậy PT có nghiệm $x=2$.

Câu 9.

Lấy (x, y, z) thuộc D.

Khi đó, ta có $f(x,y,z)=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{y+1}\right)+\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$

$$=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhia cho hai cặp số

$\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}},\sqrt{\frac{1}{y+1}},\sqrt{\frac{1}{z+1}}\right)$ và $\left(\sqrt{x+1},\sqrt{y+1},\sqrt{z+1}\right)$ có

$$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\left[(x+1)+(y+1)+(z+1)\right]\geq\left(1+1+1\right)^2=9\ (2)$$

Mà x + y + z = 1 từ (2) suy ra $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\geq\frac{9}{4}$ (3)

Kết hợp (1) và (3) suy ra

$f(x,y,z)\leq 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$ có $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in D$ và $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}$.

Vậy $\max\limits_{x\in D} f(x,y,z)=\frac{3}{4}$.

Đề số 6

Câu 1. Cho hàm số: $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các giá trị của tham số *m* để phương trình sau đây có 2 nghiệm phân biệt: $x^4-6x^2+1-4m=0$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $\log_2^4(x)-\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right)+9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right)<4\log_{\frac{1}{2}}^2(x)$;

b) Giải phương trình $3(\cot x-\cos x)-5(\tan x-\sin x)=2$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $|z|^2+4z=8i$.

Câu 4. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển nhị thức Niu–tơn của $\left(x^2+2\right)^n$, biết: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$ (n ∈ N, n > 3).

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, hai đường chéo AC = $2\sqrt{3}a$, BD = 2a và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu 6. Trong (Oxy) cho hình chữ nhật ABCD, biết phương trình chứa 2 đường chéo là $d_1: 7x+y-4=0$ và $d_2: x-y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh hình chữ nhật , biết đường thẳng đó đi qua điểm M(-3;5).

Câu 7. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = *a*, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BD) theo *a*.

Câu 8. Giải bpt: $\sqrt{-2x^3+3x^2-6x+16} \ge 2\sqrt{3}+\sqrt{4+x}$.

Câu 9. Tìm GTNN của hàm số $f(x,y)=\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{1}{x+y}+x+y$ trên miền $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$.

Giải

Câu 1. a) Hàm số: $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -x^3+3x$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow -x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

Hàm số ĐB trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3}),(0;\sqrt{3})$,

NB trên các khoảng $(-\sqrt{3};0),(\sqrt{3};+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CD} = 1$ tại $x_{CD} = \pm\sqrt{3}$;

đạt cực tiểu $y_{CT} = -\dfrac{5}{4}$ tại $x_{CT} = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Giao điểm với trục hoành:

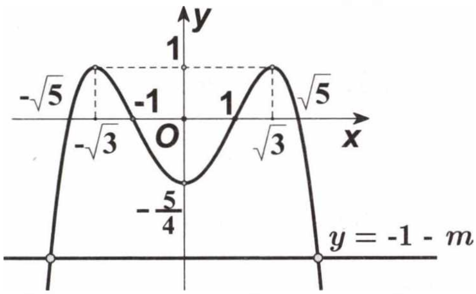
$$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Giao điểm với trục tung:

cho $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}$.

Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây



b) $x^4 - 6x^2 + 1 - 4m = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{4} - m$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4} = -1 - m \ (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của (C) và d: $y = -1 - m$.

Do đó, dựa vào đồ thị ta thấy (*) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} -1-m<-\dfrac{5}{4} \\ -1-m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{4} \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy, khi $m=-2$ hoặc $m>\dfrac{1}{4}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2. a) ĐK $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$ ta có bpt $t^4-(3t-3)^2+9(5-2t)<4t^2$

$\Leftrightarrow t^4-13t^2+36<0 \Leftrightarrow 4<t^2<9$

$$\Leftrightarrow 2<|t|<3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<\log_2 x<-2 \\ 2<\log_2 x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{8}<x<\dfrac{1}{4} \\ 4<x<8. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2} (*)$.

Khi đó: $3\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\cos x\right)-5\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=2$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1-\sin x)-5\sin^2 x(1-\cos x)-2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 3\left[\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x\cos x(\cos x-\sin x)\right]-2\sin^2 x(1-\cos x)-2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 3(\cos x-\sin x)\left[(\cos x+\sin x-\cos x\sin x)-2\sin x(\cos x+\sin x-\cos x\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x-\cos x\sin x)(3\cos x-5\sin x)=0.$

+ Trường hợp: sinx + cosx - sinx cosx=0 .

Đặt: $t=\sin x+\cos x; |t| \leq \sqrt{2}$

Cho nên phương trình

$$\Leftrightarrow t-\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1+\sqrt{2}>\sqrt{2} \quad \text{(loại)} \\ t=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in Z)$

+ Trường hợp $3\cos x-5\sin x=0 \Leftrightarrow tgx=\frac{3}{5}=tg\beta \Leftrightarrow x=\beta+k\pi$

Vậy PT có các nghiệm là $x=\beta+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x=k2\pi$.

Câu 3.

a) $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow xdx=tdt.$

Đổi cận $x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3; x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=4$

Vậy: $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int_3^4\frac{tdt}{\left(t^2-4\right)t}=\int_3^4\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|_3^4=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{12}.$

b) Đặt $z=a+bi\Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow |z|^2=a^2+b^2.$

Thay vào phương trình trên ta được:

$|z|^2+4z=8i\Leftrightarrow a^2+b^2+4(a+bi)=8i$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+4a+4bi=8i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+4a=0 \\ 4b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+4a=0 \\ b=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+4=0 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2. \end{cases}$

Vậy, $z=-2+2i$.

Câu 4. Ta có: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - \frac{8n(n-1)}{2} + n = 49$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow n = 7.$$

$$(x^2+2)^n = (x^2+2)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{2(7-k)} 2^k.$$

Số hạng chứa $x^8 \Leftrightarrow 2(7-k) = 8 \Leftrightarrow$ k = 3.

$\Rightarrow$ Hệ số của x^8 là: $C_7^3.2^3 = 280$.

Câu 5. Từ giả thiết, ta có tam giác ABO vuông tại O và AO = $a\sqrt{3}$; BO = a, do đó $\widehat{ABD} = 60^0$. Hay ΔABD đều. Do $(SAC);(SBD) \perp (ABCD)$ nên giao tuyến của chúng SO$\perp$ (ABCD).

Gọi H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và DH = $a\sqrt{3}$; OK // DH và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ OK $\perp$ AB $\Rightarrow$ AB $\perp$ (SOK).

Gọi I là hình chiếu của O lên SK $\Rightarrow$ OI $\perp$ (SAB), hay $OI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}.$$

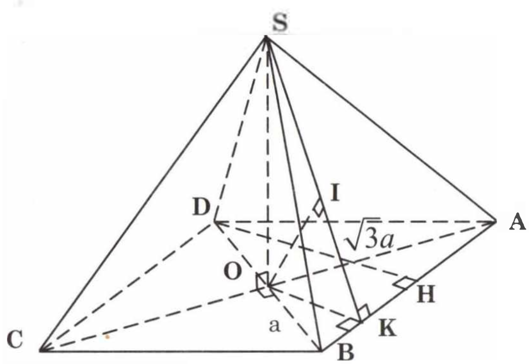
Diện tích đáy

$S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$;

đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Câu 6. Tâm của hình chữ nhật có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x+y-4=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right).$$

Gọi d là đường thẳng qua M(-3;5) có véc tơ pháp tuyến: $\vec{n}(a;b)$.

Khi đó $\Rightarrow d: a(x+3)+b(y-5)=0 (1)$.

Gọi cạnh hình vuông (AB) qua M thì theo tính chất hình chữ nhật:

$$\frac{\left|\overrightarrow{n}\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{n}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{|7a+b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |7a+b|=5|a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3b \\ b=3a. \end{array}\right.$$

Do đó:

Nếu $a=-3b \Rightarrow d: -3(x+3)+(y-5)=0 \Leftrightarrow 3x-y+14=0$.

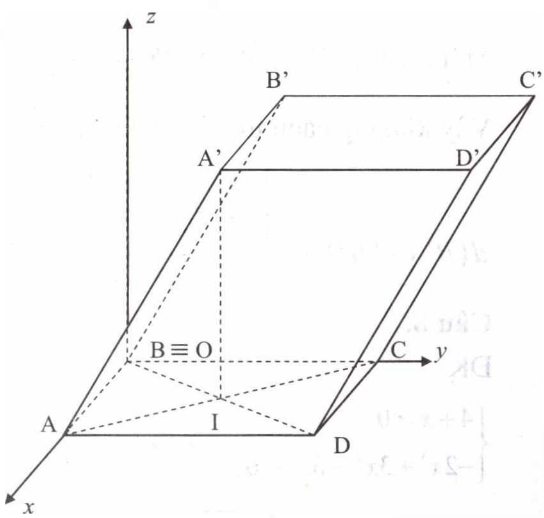
Nếu $b=3a \Rightarrow (x+3)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow x+3y-12=0$.

Vậy PT đường thẳng cần tìm là: $3x-y+14=0$; $x+3y-12=0$.

Câu 7.

Gọi I = AC $\cap$ BD.

Ta có $A'I \perp (ABCD)$.



Chọn hệ trục O*xyz* với B là gốc tọa độ, tia BA là tia Ox, tia BC là tia Oy, tia Oz là tia Bz song song và cùng hướng với tia IA'.

Khi đó: B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;$a\sqrt{3}$;0), D(a; $a\sqrt{3}$;0), I($\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0$).

A' có hình chiếu lên (O*xy*) là I nên A'($\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};z$) $(z>0)$.

Ta tìm z:

+ Mặt phẳng (ABCD) chính là mặt phẳng (Oxy) nên có VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

+ $\overrightarrow{AD}=(0;a\sqrt{3};0)$, $\overrightarrow{AA'}=(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};z)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right]=(az\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2})=\frac{a\sqrt{3}}{2}.(2z;0;a)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ADD'A') có VTPT là $\vec{n}=(2z;0;a)$.

+ Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0 nên ta có

$$\frac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{4z^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=\frac{a\sqrt{3}}{2}\quad(z>0).$$

Vậy A'$(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2})$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'I.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{3a^3}{2}$.

Mặt phẳng (A'BD) có VTPT là

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-\frac{3a^2}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};0)=-\frac{a^2}{2}.(3;-\sqrt{3};0)$

$\Rightarrow(A'BD):3x-\sqrt{3}y=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x-y=0$.

Mặt khác $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow B'(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2})$.

Vậy khoảng cách từ B' đến (A'BD) là

$$d(B',(A'BD))=\frac{\left|-\frac{a}{2}.\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 8.

ĐK

$$\begin{cases}4+x\ge 0\\-2x^3+3x^2-6x+16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -4\\(x-2)\left[-2x^2-x-8\right]\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -4\\x-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-4;2\right].$$

BPT đã cho $\Leftrightarrow\sqrt{-2x^3+3x^2-6x+16}-\sqrt{4+x}\ge 2\sqrt{3}$ (1)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{-2x^3+3x^2-6x+16}-\sqrt{4+x}; x\in[-4;2]$

$$\Rightarrow f(-1)=2\sqrt{3} \text{ nên } (1)\Leftrightarrow f(x)\geq f(-1).$$

$$f'(x)=\frac{-6x^2+6x-6}{2\sqrt{-2x^3+3x^2-6x+16}}-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}<0;\forall x\in(-4;2)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến } \forall x\in[-4;2].$$

Do đó bpt $f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow x\leq -1$ kết hợp đk suy ra tập nghiệm của bpt là đoạn $[-4;-1]$.

Câu 9. Với mọi (x, y) thuộc D ta có:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{1-x}+1+x+\frac{y^2}{1-y}+1+y+\frac{1}{x+y}-2$$

$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}-2 \ (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai cặp số

$\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}},\sqrt{\frac{1}{1-y}},\sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ và $(\sqrt{1-x},\sqrt{1-y},\sqrt{x+y})$.

Ta có $\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\right)[(1-x)+(1-y)+(x+y)]\geq(1+1+1)^2=9$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{9}{2} \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x,y)\geq\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x+y}\\ \frac{1}{1-y}=\frac{1}{x+y}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}$

Ta có $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in D, f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{2}$. Vậy $\min\limits_{x\in D} f(x,y)=\frac{5}{2}$.

Đề số 7

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(–3;0) và N(–1; –1).

Câu 2. Giải phương trình:

a) $\log_2^2 x - \log_4(4x^2) - 5 = 0$;

b) $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $z^2 - (1+5i)z - 6 + 2i = 0$.

Câu 4. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

Biến cố A: "Trong hai lần gieo ít nhất một lần xuất hiện mặt một chấm".

Biến cố B: "Trong hai lần gieo tổng số chấm trong hai lần gieo là một số nhỏ hơn 11".

Câu 5. Cho hình chóp S.ABC có AB = BC = a; $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt (SAC) và mặt phẳng (SBC) bằng 60. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng (d): x + y + m = 0. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Câu 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên SA = *a*; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, AH = $\dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

Câu 9. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2+2b^2+3}+\dfrac{1}{b^2+2c^2+3}+\dfrac{1}{c^2+2a^2+3}$.

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: $D=R\setminus\{-1\}$

Sự biến thiên:

* Tiệm cận:

+) Vì $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x-4}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x-4}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{x+1}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-4}{x+1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

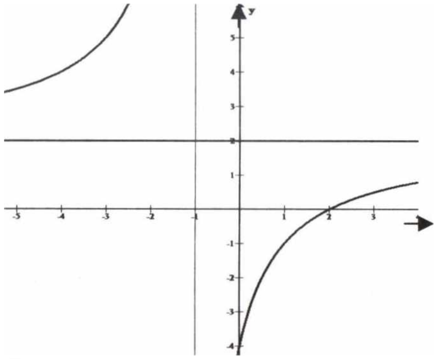
* Chiều biến thiên:

+) Ta có: $y'=\dfrac{6}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq-1$.

Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2 ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	2



b) MN: x + 2y + 3 = 0. PT đường thẳng (d) $\perp$ MN có dạng: y = 2x + m.

Gọi A, B $\in$ (C) đối xứng nhau qua MN. Hoành độ của A và B là nghiệm của PT: $\frac{2x-4}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx + m + 4 = 0 (1) \\ x \neq -1 \end{cases}$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m - 32 > 0$.

Ta có A(x_1; $2x_1$ + m), B(x_2; $2x_2$ + m) với x_1, x_2 là nghiệm của (1)

Trung điểm của AB là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; x_1 + x_2 + m\right) \equiv I\left(-\frac{m}{4}; \frac{m}{2}\right)$ (theo định lý Vi-et)

Ta có I $\in$ MN $\Rightarrow$ m = –4 thay vào (1) có

$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ A(0; –4), B(2;0).

Câu 2. a) Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$\log_2^2 x - (\log_4 4 + \log_4 x^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 6 = 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình (*) trở thành

$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^3 \\ x = 2^{-2} \end{array}\right.$ (nhận cả hai nghiệm).

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 8$ và $x = \frac{1}{4}$.

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$.

Khi đó phương trình trở thành: tan

$$\tan x\left(3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{3(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = 4\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{3(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = 4(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(\frac{3-4\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) + \frac{3}{(1-\sin x)} - 4(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(\frac{3-4\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) + \frac{3\text{-}4(1\text{-}\sin^2 x)}{(1-\sin x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-4\cos^2 x)\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2(1+\cos 2x) = 0 \\ \sin x - \sin^2 x + \cos^3 x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2\cos 2x = 0 \\ (1-\sin x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ 1-\sin x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

Vì sinx = 1 làm cho cosx = 0 vi phạm điều kiện.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x = 0. \end{array}\right.$

Trường hợp: sinx + cosx + sinxcosx = 0.

Đặt $t = \sin x+\cos x; |t| \leq \sqrt{2}$ ta có phương trình:

$$t+\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{2}<-\sqrt{2}\,(l) \\ t=\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi. \end{array}\right. \quad (k\in Z)$

Câu 3. a) Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt.$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$

Vậy: $$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5+2x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2\left(x^2+2\right)xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\int_1^2\frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t}dt=\int_1^2\left(t^3-\frac{1}{t}\right)dt=\left(\frac{1}{4}t^4-\ln|t|\right)\Big|_1^2=\frac{15}{4}-\ln 2.$$

b) $z^2-(1+5i)z-6+2i=0$ (*)

Ta có:

$\Delta=(1+5i)^2-4.(-6+2i)=1+10i+25i^2+24-8i=2i=(1+i)^2.$

Vậy, phương trình (*) có 2 nghiệm phức phân biệt:

$$z_1=\frac{(1+5i)-(1+i)}{2}=\frac{4i}{2}=2i.$$

và $$z_2=\frac{(1+5i)+(1+i)}{2}=\frac{2+6i}{2}=1+3i.$$

Câu 4. Không gian mẫu

$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,...,6\}\} \Rightarrow n(\Omega) = 6.6 = 36.$

+) Ta có biến cố đối

$\overline{A} = \{\{(i,j) \mid i,j \in \{2,...,6\}\} \Rightarrow n(\overline{A}) = 25;$

$P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{25}{36} \Rightarrow p(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{11}{36}.$

+) Ta có: $\overline{B} = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,...,6\}\}, i + j \geq 11\}$

$\Rightarrow \overline{B} = \{(5,6);(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(\overline{B}) = 3$

$\Rightarrow P(\overline{B}) = \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$\Rightarrow P(B) = 1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}.$

Vậy xác suất của biến cố A, B lần lượt là $\dfrac{11}{36}, \dfrac{11}{12}$.

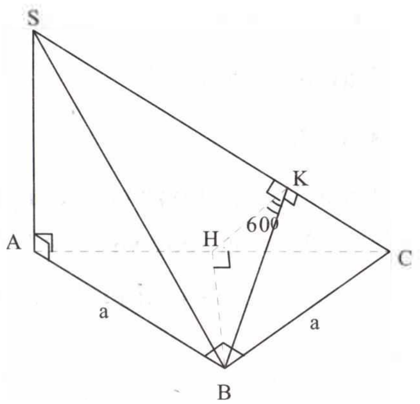
Câu 5. Vì $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SA \perp (ABC)$.

Do đó chiều cao của khối chóp S.ABC là h = SA. Gọi H là trung điểm của cạnh AC, suy ra $BH \perp AC$.

Do đó $BH \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $HK \perp SC$ ($H \in SC$), suy ra $BK \perp SC$.

Do đó góc giữa (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKH} = 60^\circ$.



Δ BHK vuông tại H.

Ta có $BK = \dfrac{BH}{\sin \widehat{HKB}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

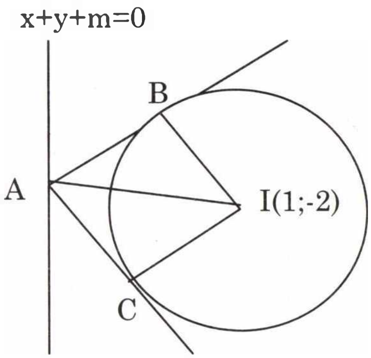
Δ SBC vuông tại B có BK là đường cao, ta có $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2}.$

$\Rightarrow \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{9}{6a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{2a^2}$

$\Rightarrow$ SB = a$\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ SA = a.

Thể tích của khối chóp S.ABC: $V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{6}.SA.AB.BC = \frac{a^3}{6}$.

Câu 6. Ta có (C) có I(1;-2) và bán kính R=3. Nếu tam giác ABC vuông góc tại A (có nghĩa là từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) và 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau) khi đó ABIC là hình vuông.



Theo tính chất hình vuông ta có

IA= IB$\sqrt{2}$ (1).

Nếu A nằm trên d thì A(t;-m-t) suy ra:

$IA=\sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}$.

Thay vào (1):

$\Rightarrow\sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2t^2+2(m-3)t+m^2-4m-13=0$ (2).

Để trên d có đúng 1 điểm A thì (2) có đúng 1 nghiệm t, từ đó ta có điều kiện:

$\Delta=-m^2+2m+35=0\Leftrightarrow m=-5;m=7$.

Vậy $m=-5;m=7$.

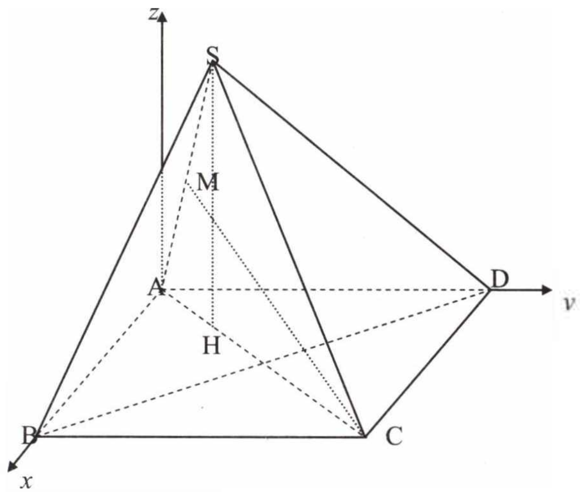
Câu 7.

Chọn hệ trục O*xyz* với A là gốc tọa độ, tia AB là tia O*x*, tia AD là tia O*y*, tia O*z* là tia A*z* song song và cùng hướng với tia HS.

Ta có: A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0).

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow H(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0)$.

Theo giả thiết SH $\perp$ (ABCD),



AH = $\frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, SA = a

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$\Rightarrow S(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}).$$

Vậy ta có $SC = \sqrt{(a-\frac{a}{4})^2 + (a-\frac{a}{4})^2 + (-\frac{a\sqrt{14}}{4})^2} = a\sqrt{2} = CA$

$\Rightarrow$ Δ SAC cân tại C nên đường cao CM cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ M là trung điểm của SA $\Rightarrow M(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8})$.

Vì M là trung điểm SA nên $V_{SMBC} = V_{AMBC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (a;0;0), \overrightarrow{AC} = (a;a;0), \overrightarrow{AM} = (\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8})$

$$\Rightarrow V_{SMBC} = V_{AMBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM}\right| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$

Câu 8. Từ hệ suy ra $y > 0; x^2 - y^2 > 0$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2}; u > 0 \\ v = x + y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 - y^2 \\ v^2 = x^2 + y^2 + 2xy \end{cases} \Rightarrow v^2 - u^2 = 2y(x+y) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right).$$

Hệ phương trình đã cho có dạng: $\begin{cases} u + v = 12 \\ \dfrac{u}{2}\left(v - \dfrac{u^2}{v}\right) = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = 9 \end{cases}$

+) $\begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

+) $\begin{cases} u = 3 \\ v = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Câu 9.

Ta có $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2 + 1 \geq 2b$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} = \frac{1}{a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 2} \leq \frac{1}{2}.\frac{1}{ab + b + 1}.$$

Tương tự $\dfrac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{bc + c + 1}$, $\qquad \dfrac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{ca + a + 1}.$

$$P \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{b+1+ab} + \frac{b}{1+ab+b}\right) = \frac{1}{2}.$$

$P = \dfrac{1}{2}$ khi a = b = c = 1.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi a = b = c = 1.

Đề số 8

Câu 1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (1) (m là tham số thực).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Xác định m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (1) một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $(0,08)^{\log_{x-0,5} x} \ge \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}$

b) Giải phương trình $\tan^2 x\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0$.

Câu 3.

a) Tính $I = \int_1^e \dfrac{\sqrt{1 + 3\ln x}}{x} \ln x dx$;

b) Tìm môđun của số phức: $z = \left(2 - \sqrt{3}i\right)\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)$.

Câu 4. Xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ vào 2 bàn, mỗi bàn có 5 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi, nếu: Các học sinh ngồi tùy ý? Các học sinh nam ngồi một bàn?

Câu 5. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, SA và SB là hai đường sinh, biết SO = 3, khoảng cách từ O đến mặt phẳng SAB bằng 1, diện tích tam giác SAB bằng 18. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

Câu 6. Lập phương trình các cạnh của ΔABC, biết đỉnh A(1;3) và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và c có phương trình là: x – 2y +1= 0 và y –1= 0.

Câu 7. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(13; -1; 0)$, $B(2; 1; -2)$, $C(1; 2; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với BC và tiếp xúc mặt cầu (S).

Câu 8. Giải pt: $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(1 + \sqrt{1 + x + x^2}) = 0$.

Câu 9. Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[2;4]$.

Chứng minh rằng: $4 \le (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \le \frac{9}{2}$.

Giải

Câu 1.

a) Khi $m=0$ ta có hàm số: $y=2x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$y'=6x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$; $y_{(0)}=1$, $y_{(1)}=0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$; $(1;+\infty)$.

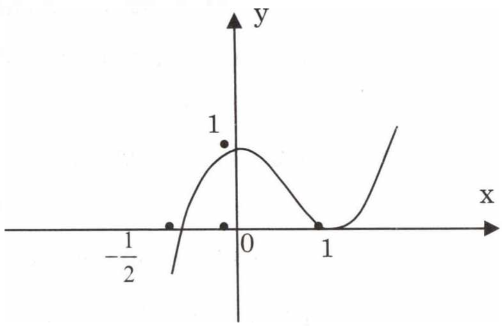
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, $y_{CT}=0$ và hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y_{CĐ}=1$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị.



b) Ta có:

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = m; x = m+1 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là:

$A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$.

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng

$AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M, AB) = \dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M; AB) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min d(M; AB) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi m = 0.

Câu 2. a) Vì: $0,08 = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}$ do đó

$$(0,08)^{\log_{x-0,5} x} \geq \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{-\log_{x-\frac{1}{2}} x} \geq \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow -\log_{x-\frac{1}{2}} x \geq \log_{x-\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x - \dfrac{1}{2} < 1 \\ 0 < x \leq 2x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} > 1 \\ x \geq 2x-1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ T = \varnothing \end{array}\right. \rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

Nghiệm của BPT là $1 \leq x < \dfrac{3}{2}$.

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^3 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\sin x)\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}+(\cos x-1)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[\frac{(1+\cos x)\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}{(1+\sin x)}-\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[\frac{\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+\sin x\cos x(\cos x-\sin x)}{1+\sin x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x-\cos x)\frac{\sin x+\cos x-\sin x\cos x}{1+\sin x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \sin x=\cos x\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x=0.\end{array}\right. \qquad (k\in Z)$$

Trường hợp: $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x;|t|\leq\sqrt{2}$ ta có $t-\dfrac{t^2+1}{2}=0\Leftrightarrow t^2-2t+1=(t-1)^2=0.$

Do đó: $t=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.(k\in Z).$$

Đối chiếu điều kiện phương trình có 2 nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=k2\pi$.

Câu 3.

a) Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Leftrightarrow t^2-1=3\ln x\Rightarrow 2tdt=\dfrac{3dx}{x}$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1; x=e\Rightarrow t=2$

$$I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\ln xdx=\int_1^e \ln x.\sqrt{1+3\ln x}.\frac{dx}{x}$$

$$=\int_1^2 \frac{t^2-1}{3}t\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2=\frac{116}{135}.$$

b) $z=\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}+2\sqrt{3}i-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-3i^2=4+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i.$.

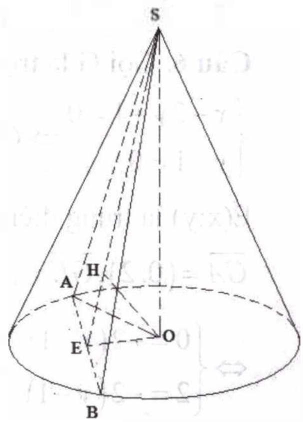
Vậy, $z=4+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\dfrac{27}{4}}=\sqrt{\dfrac{91}{4}}=\dfrac{\sqrt{91}}{2}$.

Câu 4. Có $P_{10}=10!$ cách xếp học sinh ngồi tùy ý.

Có $P_5=5!$ cách xếp 5 học sinh nam vào bàn A, 5! cách xếp năm học sinh nữ vào bàn B, suy ra có $(5!)^2$ cách xếp. Nếu nam ngồi bàn B, nữ ngồi bàn A cũng có $(5!)^2$ cách xếp.

Vậy có $2.(5!)^2=28800$ cách xếp.

Câu 5.



Gọi E là trung điểm của AB, ta có:

$OE\perp AB,\ SE\perp AB$, suy ra $\left(SOE\right)\perp AB$.

Dựng $OH\perp SE\Rightarrow OH\perp\left(SAB\right)$, vậy OH là khoảng cách từ O đến (SAB), theo giả thiết thì OH = 1.

Tam giác SOE vuông tại O, OH là đường cao, ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OE^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow OE^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow OE = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

$$SE^2 = OE^2 + SO^2 = \frac{9}{8} + 9 = \frac{81}{8} \Rightarrow SE = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

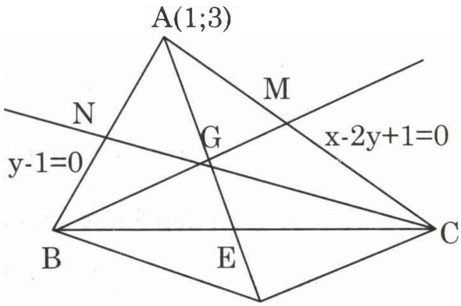
$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB.SE \Leftrightarrow AB = \frac{2S_{SAB}}{SE} = \frac{36}{\frac{9}{2\sqrt{2}}} = 8\sqrt{2}$$

$$OA^2 = AE^2 + OE^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + OE^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = 32 + \frac{9}{8} = \frac{265}{8}.$$

Thể tích hình nón đã cho:

$$V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi\frac{265}{8}.3 = \frac{265}{8}\pi$$

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho:



$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 9 + \frac{265}{8} = \frac{337}{8}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{\frac{337}{8}}$$

$$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi\sqrt{\frac{265}{8}}.\sqrt{\frac{337}{8}} = \pi\frac{\sqrt{89305}}{8}.$$

Câu 6. Gọi G là trọng tâm tam giác thì tọa độ G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1;1).$$

E(x;y) là trung điểm BC, theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\overrightarrow{GA} = (0;2), \overrightarrow{GE} = (x-1;y-1) \Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GE}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2(x-1) \\ 2 = -2(y-1) \end{cases} \Rightarrow E(1;0)$. C thuộc (CN) cho nên C(t;1), B thuộc (BM) cho nên B(2m-1;m).

Do B, C đối xứng nhau qua E cho nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m+t-1=2 \\ m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ m=-1 \end{cases} \Rightarrow C(5;1), B(-3;-1).$$

Vậy (BC) qua E(1;0) có véc tơ chỉ phương

$$\overrightarrow{BC}(-8;-2)//\vec{u}=(4;1) \Rightarrow (BC): \frac{x-1}{4}=\frac{y}{1} \Leftrightarrow x-4y-1=0.$$

Tương tự:

(AC) qua A(1;3) có

$$\overrightarrow{AC}=(4;-2)//\vec{u}=(2;-1) \Rightarrow (AC): \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1} \Leftrightarrow x+2y-7=0.$$

(AB) qua A(1;3) có

$$\overrightarrow{AB}=(-4;-4)//\vec{u}=(1;1) \Rightarrow (AB): \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1} \Leftrightarrow x-y+2=0$$

Câu 7.

(S) có tâm I(1; 2; 3) và bán kính R = 9.

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$, $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$

(P) // BC nên

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}=(-1;1;4) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow A=B+4C \Rightarrow \vec{n}=(B+4C;B;C)$$

(P) đi qua A(13; –1; 0)

⇒ phương trình (P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d[I,(P)]=R \Leftrightarrow \dfrac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C=0 \Leftrightarrow (B+2C)(B-4C)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B+2C=0 \\ B-4C=0. \end{array}\right.$$

Với B + 2C = 0 chọn $\begin{cases} B=2 \\ C=-1 \end{cases}$, ta được phương trình

(P): –2x + 2y – z + 28 = 0

Với B – 4C = 0 chọn $\begin{cases} B=4 \\ C=1 \end{cases}$, ta được phương trình

(P): 8x + 4y + z −100 = 0.

Cả hai mặt phẳng (P) tìm được ở trên đều thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8.

PT $\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(2x+1)(2+\sqrt{4+4x+4x^2})=0$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(2x+1)\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right]=(-3x)\left[2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right].$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ trên R.

Ta có pt: $f(2x+1)=f(-3x)$ (*)

$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0, \forall t$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên R.

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 9. Gọi $A=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=2+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ thì $A=f(t)=2+t+\dfrac{1}{t}$.

Với $x,y\in[2;4]\Rightarrow\begin{cases}2\le x\le 4\\ \dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{y}\le 2\Rightarrow t\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Ta có: $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(2)=\dfrac{9}{2}$; $f(1)=4\Rightarrow 4\le A\le\dfrac{9}{2}$ (đpcm).

Đề số 9

Câu 1. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết PTTT với đồ thị (C) của hàm số tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_0 = 2$.

c) Tìm điều kiện của m để phương trình sau có 4 nghiệm:

$x^4 - 6x^2 + 1 + m = 0$.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$;

b) Cho phương trình: $m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$.

Giải phương trình với m = $\frac{1}{2}$. Tìm m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$;

b) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\omega = \frac{z + i}{\overline{z} - i}$, trong đó $\overline{z} = 1 - 2i$.

Câu 4. Chứng minh rằng với $\forall k, n \in Z^+$ thoả mãn $3 \le k \le n$ ta luôn có:

$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 2C_n^{k-2} = C_{n+3}^k - C_n^{k-3} - C_n^{k-2}$.

Câu 5. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, AA' = b và AA' tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Câu 6. Cho tam giác ABC có diện tích S=$\frac{3}{2}$, hai đỉnh A(2;-3), B(3;-2) và trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng 3x-y-8 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và mặt phẳng (P): $x-y+z-4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Hãy viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 8. Giải bpt: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$.

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\sqrt{\log_2^2 x+1}+\sqrt{\log_2^2 y+1}+\sqrt{\log_2^2 z+4}$ trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $xyz=8$.

Giải

Câu 1. a) $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=2x^3-6x,\quad y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0;\quad y=\dfrac{3}{2}\\ x=\pm\sqrt{3};\ y=-3\end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x_{CD}=0, y_{CD}=\dfrac{3}{2}$, cực tiểu tại $x_{CT}=\pm\sqrt{3}, y_{CT}=-\sqrt{3}$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$,

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT -3	↗	CĐ $\dfrac{3}{2}$	↘	CT -3	↗	$+\infty$

b) PTTT với (C) tại $x_0 = 2$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{5}{2}$

$f'(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x_0) = 4$

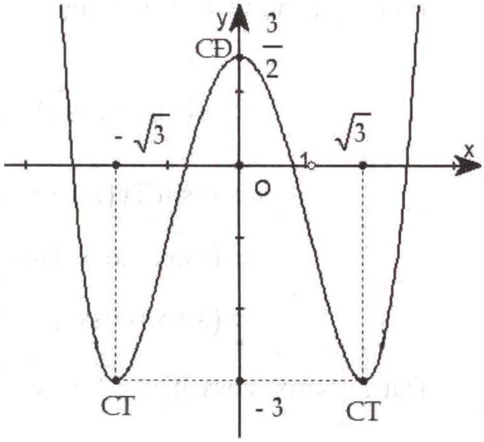
PTTT: $y = 4x - \dfrac{21}{2}$.

c) Tìm m để pt sau có 4 nghiệm:

$x^4 - 6x^2 + 1 + m = 0$.

Ta có: $x^4 - 6x^2 + 1 + m = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2} = 1 - \dfrac{m}{2}$.



Đặt: $y = -x^3 + 3x + 1$, đồ thị (C) vừa vẽ và $y = 1 - \dfrac{m}{2}$: đồ thị là đường thẳng (d) cùng phương Ox.

Số nghiệm của PT bằng số giao điểm của (C) & (d).

Phương trình có 4 nghiệm $\Leftrightarrow -3 < 1 - \dfrac{m}{2} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -1 < m < 8$.

Câu 2. a) Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$ ta được:

$2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \dfrac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0.$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$, điều kiện t > 0. Khi đó phương trình trở thành:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

b)

+) Giải phương trình với m = $\dfrac{1}{2}$. Điều kiện $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x\sin x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1+\sin x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)[m\sin 2x+1]+[\sin 2x+1]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)[m\sin 2x+1]+[\sin x+\cos x]^2=0$$

Đặt $t=\sin x+\cos x; |t|\le\sqrt{2}$ ta có $t\left[m\left(t^2-1\right)+1\right]+t^2=0$ (*)

Khi $m=\frac{1}{2}$ có $t\left[\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)+1\right]+\left[1+\left(t^2-1\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow t(t+1)^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z).$$

Đối chiếu điều kiện PT có nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

+) Nếu: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)\Leftrightarrow\sin x+\cos x\in\left(1;\sqrt{2}\right)$$

Do đó ta tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow t\left[m(t-1)(t+1)+1+t\right]=0 \Leftrightarrow t(t+1)\left[m(t-1)+1\right]=0.$

có nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{2}\right)$.

+ Với t=0 và t=−1 ta đã có nghiệm như trên và các nghiệm đó không thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

+ Còn phương trình: m(t−1)=−1 , t=1 không là nghiệm (vì: 0=−1 vô lý).

Cho nên ta xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{t-1}=m \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}>0$.

f(t) đồng biến, cho nên phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $m<f\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow m<\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Kết quả $m<\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Câu 3. a) Đặt $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x} \Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x$

$\Rightarrow 2tdt=3\sin 2xdx \Leftrightarrow \sin 2xdx=\frac{2}{3}tdt$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\int_1^2\frac{2}{3}tdt.\frac{1}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\left(\frac{2}{3}t\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$

b) $\bar{z}=1-2i \Rightarrow z=1+2i$

Ta có, $\omega=\frac{z+i}{\bar{z}-i}=\frac{1+2i+i}{1-2i-i}=\frac{1+3i}{1-3i}$

$$=\frac{(1+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+6i+9i^2}{1-9i^2}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$$

Vậy, phần thực của ω là $-\frac{4}{5}$, phần ảo của ω là $\frac{3}{5}$.

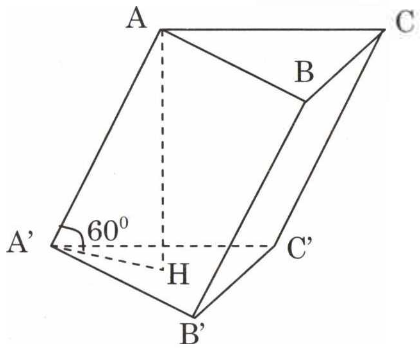
Câu 4. Ta có:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 2C_n^{k-2} = C_{n+3}^k - C_n^{k-3} - C_n^{k-2} \Leftrightarrow C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \ (1)$$

$$VT(1) = C_n^k + C_n^{k-1} + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}$$

$$= \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) = C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k.$$

Câu 5.



Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của lăng trụ.

Khi đó, A'H là hình chiếu của AA' trên mp(A'B'C')

Xét tam giác AA'H vuông tại H có:

Sin A' = $\dfrac{AH}{AA'}$

$\Rightarrow$ AH = AA'. Sin A' = AA'.

Sin $60^0 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

Do tam giác A'B'C' là tam giác đều nên chiều cao của tam giác là:

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác A'B'C': $S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{2}a.h = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Thể tích ABC.A'B'C': V = $\dfrac{1}{3}$.AH. $S_{A'B'C'} = \dfrac{3}{8}a^2b$.

Câu 6.

Giả sử $M\left(x_0; y_0\right)$ là trung điểm BC.

Vì G thuộc d suy ra G(t;3t-8) $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (2-t; 5-3t) \\ \overrightarrow{GM} = (x_0 - t; y_0 + 8 - 3t). \end{cases}$

Theo tính chất trọng tâm của tam giác:

$$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}\Rightarrow\begin{cases}2-t=-2x_0+2t\\5-3t=-2y_0-16+6t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0=3t-2\\2y_0=9t-21.\end{cases}$$

Theo tính chất trung điểm ta có tọa độ của $C(3t-5;9t-19)$.

AB qua A(2;-3) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$

$$\Rightarrow AB:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}\Leftrightarrow x-y-5=0.$$

Đồng thời: $AB=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ C đến AB $=\dfrac{|3t-5-9t+19-5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|6t-9|}{\sqrt{2}}$.

Theo giả thiết:

$$S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|6t-9|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow|6t-9|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(1;-1)\\C(-2;-10).\end{array}\right.$$

Vậy $C(1;-1)$ hoặc $C(-2;-10)$.

Câu 7.

+) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$, $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)$.

Vì (Q) qua A,B và vuông góc với (P) nên (Q) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{AB}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\2&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\-2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}\right)=(0;4;4).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là:

$4(y-2)+4(z-0)=0\Leftrightarrow y+z-2=0.$

Vậy phương trình (Q): $y+z-2=0$.

+) Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Hãy viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng.

Gọi I(x;y) là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, ta có:

$$3\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-x) = 2(3-x) \\ 3(2-y) = 2(4-y) \\ 3(0-z) = 2(-2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}.$$ Suy ra: $I(-3;-2;4)$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P).

Bán kính của mặt cầu (S) là:

$$R = d(I,(P)) = \frac{|-3+2+4-4|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \frac{1}{3}$.

Câu 8.

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+35} - \sqrt{x^2+24} < 5x-4$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24}} < 5x-4$$

$$\Leftrightarrow 11 < (5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24}).$$

Từ BPT trên suy ra $5x-4>0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}$

Hàm số $y = (5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})$ với $x > \frac{4}{5}$

$$y' = 5(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24}) + x(5x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+35}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+24}}\right) > 0,\ \forall x > \frac{4}{5}.$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall x > \frac{4}{5}$ mà $y(1) = 11$

Nên BPT trên $\Leftrightarrow y(x) > y(1) \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy nghiệm của BPT là $x > 1$.

Câu 9. Sử dụng phương pháp vectơ

Đặt $\vec{u} = (\log_2 x;1)$; $\vec{v} = (\log_2 y;1)$ và $\vec{w} = (\log_2 z;2)$

Ta có $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z; 4) = (\log 2(xyz); 4) = (3; 4)$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{w}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 4} \geq 5$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$; $\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 y = \frac{1}{2}\log_2 z \Leftrightarrow x = y = \sqrt[4]{8}$ và $z = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 $\Leftrightarrow x = y = \sqrt[4]{8}$ và $z = 2\sqrt{2}$.

Đề số 10

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của m, đường thẳng (d) $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn AB.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log_4\left(2x^2+3x+2\right)+1\rangle \log_2\left(2x^2+3x+2\right)}$;

b) Giải phương trình: $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

Câu 3.

a) Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$;

b) Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ trên tập số phức. Hãy xác định $A = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

Câu 4. Tìm hệ số x^3 trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^n$ biết n thoả mãn:

$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^{23}$.

Câu 5. Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên hợp với đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp đó.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm $H\left(\frac{13}{5};\frac{13}{5}\right)$, các đường thẳng AB và AC lần lượt có phương trình là: $4x - y - 3 = 0$, $x + y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Câu 7. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm *M*(1; –1; 0), cắt đường thẳng (*d*): $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$ và tạo với mặt phẳng (*P*): $2x - y - z + 5 = 0$ một góc 30^0.

Câu 8. Tìm a để hệ sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+2}=a\\ x+y=3a\end{cases}$.

Câu 9. Cho a, b, c > 0 thoả mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{35}{35+2b}\le\frac{4c}{4c+57}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A = a.b.c.

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên:

* Tiệm cận:

+) Vì $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-2}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-2}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x-1}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

* Chiều biến thiên:

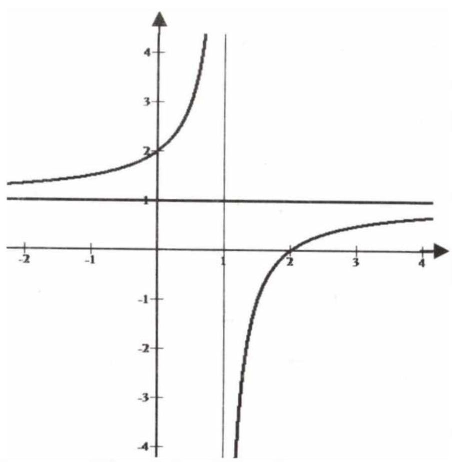
+) Ta có: $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Vẽ đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$\frac{x-2}{x-1} = -x + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m - 2 = 0 \ (1) \end{cases}$$

PT (1) có $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0, \forall m \\ 1^2 - m.1 + m - 2 = -1 \neq 0, \forall m \end{cases}$

nên luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 1 với mọi m.

Do đó đường thẳng d luôn cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt A, B.

Ta có $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]}$$

$$= \sqrt{2(m^2 - 4m + 8)} = \sqrt{2(m-2)^2 + 8} \geq \sqrt{8}.$$

Vậy AB ngắn nhất nếu $AB = 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = 2$.

Câu 2. a) Đặt $t = \sqrt{\log_4\left(2x^2 + 3x + 2\right)} \geq 0.$

Khi đó $t^2 = \frac{1}{2}\log_2\left(2x^2 + 3x + 2\right) \Leftrightarrow \log_2\left(2x^2 + 3x + 2\right) = 2t^2.$

BPT trở thành

$t + 1 > 2t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\log_4\left(2x^2 + 3x + 2\right)} < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \log_4\left(2x^2 + 3x + 2\right) < 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2x^2 + 3x + 2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2} \\ -2 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq -1 \\ -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của BPT là $-2 < x \leq -1$, $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq -1 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (*)$

Phương trình: $\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{(1 - \cos x)\left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)}{(1 - \sin x)\left(1 + \sin x + \sin^2 x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{1-\sin x}\left[\frac{\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}-\frac{\left(1+\cos x\right)}{\left(1+\sin x\right)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos x}{1-\sin x}\right)\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x+\sin x\cos x\right)}{\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)\left(1+\sin x\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \sin x=\cos x\\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0.\end{array}\right.$$

Trường hợp: $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x,\ |t|\le\sqrt{2}$

Ta có $t+\dfrac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{2}<-\sqrt{2}\,(l)\\ t=-1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Khi $t=\sqrt{2}-1\Rightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\quad\left(\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}};k\in Z\right).$$

Vậy PT có 4 họ nghiệm.

Câu 3.

a) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$.

Đặt $t=1+\sin^2 x\Rightarrow dt=\sin 2x dx$

Ta có $\sin^2 x=t-1$; Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

Vậy $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x.\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t - \ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

b) Phương trình $z^2 + z + 1 = 0\,(*)$ có biệt thức

$\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

Suy ra, phương trình (*) có 2 nghiệm phức:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = -1 \;\&\; z_1.z_2 = 1$

Vậy $A = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1.z_2} = \dfrac{-1}{1} = -1.$

Câu 4.

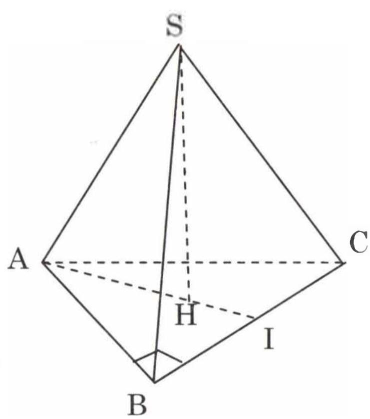
Xét khai triển: $(1+x)^{2n}$, thay x = 1; x = –1 và kết hợp giả thiết ta được n = 12.

Khai triển: $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^{24-3k}$ có hệ số x^3 là: $C_{12}^7 2^7$=101376.

Câu 5.

Kẻ SH ⊥ (ABC)

Gọi I là giao điểm của AH và BC



Do S.ABC là hình chóp đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.

$\Rightarrow \mathrm{AI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{AH} = \dfrac{2}{3}\mathrm{AI} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a.$

Do AH là hình chiếu của SA trên mp(ABC) nên SAH = 60^0.

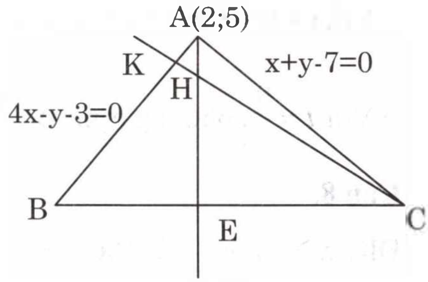
Xét tam giác SAH vuông tại H ta có:

$\tan 60^0 = \dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{AH}} \Rightarrow \mathrm{SH} = \mathrm{AH}.\tan 60^0 = a$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}SH.\ S_{ABC} = \frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Câu 6.



Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y - 3 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: A(2;5).

$\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \left(-\frac{3}{5};\frac{12}{5}\right) // \vec{u}(1;-4)$.

Suy ra (AH) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;-4)$.

(BC) vuông góc với (AH) cho nên (BC) có $\vec{n} = \vec{u}(1;-4)$ suy ra

(BC): x-4y+m=0 (*).

Vì C thuộc (AC) suy ra C(t;7-t) và

$\overrightarrow{CH} = \left(\frac{13}{5} - t; t - \frac{22}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = (1;4) \perp \overrightarrow{CH}$.

Cho nên ta có: $\frac{13}{5} - t + 4\left(t - \frac{22}{5}\right) = 0 \to t = 5 \Leftrightarrow C(5;2)$.

Vậy (BC) qua C(5;2) có véc tơ pháp tuyến

$\vec{n} = (1;-4) \Rightarrow (BC):(x-5) - 4(y-2) = 0.$

(BC): $x - 4y + 3 = 0$.

Câu 7.

Gọi $N = (d) \cap \Delta \Rightarrow N(2+2t;t;-2+t)$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (1+2t;t+1;-2+t)$ và mp(P) có vtpt $\vec{n} = (2;-1;-1)$

(d) tạo với (P) góc 30^0 nên:

$$\sin 30^0 = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN},\vec{n}\right)\right| = \frac{|2+4t-t-1+2-t|}{\sqrt{(1+2t)^2+(t+1)^2+(t-2)^2}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+3|}{\sqrt{6t^2+2t+6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 10t^2-18t=0 \Leftrightarrow t=0;\ t=\frac{9}{5}$$

+ Với t = 0, phương trình $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$.

+ Với $t=\dfrac{9}{5}$, phương trình $\Delta: \dfrac{x-1}{23} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z}{-1}$.

Câu 8.

ĐK: $x \geq -1; y \geq -2$. Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1; u \geq 0$ và

$v = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = v^2 - 2; v \geq 0$

Ta có hệ $\begin{cases} u - v = a \\ u^2 + v^2 = 3a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = a \\ (u-v)^2 + 2uv = 3a + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = a \\ uv = \dfrac{a^2-3a-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + (-v) = a \\ u(-v) = -\dfrac{a^2-3a-3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow u$ và $(-v)$ là các nghiệm của pt: $X^2 - aX - \dfrac{a^2-3a-3}{2} = 0\ (*)$

Vì $u \geq 0; -v \leq 0$ nên (*) phải có hai nghiệm và

$$X_1 \leq 0 \leq X_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{3-\sqrt{21}}{2} \vee a \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Câu 9. Ta có: $\dfrac{4c}{4c+57} \geq \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{35}{35+2b} \geq 2.\sqrt{\dfrac{35}{(1+a)(2b+35)}} > 0\ (1)$

Mặt khác $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{35}{35+2b} \leq \dfrac{4c}{4c+57}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{4c}{4c+57} \leq -\frac{35}{35+2b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{4c}{4c+57} + 1 \le 1 - \frac{35}{35+2b} = \frac{2b}{35+2b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b}{35+2b} \ge \frac{1}{1+a} + \frac{57}{4c+57} \ge 2.\sqrt{\frac{57}{(1+a)(4c+57)}} > 0 \qquad (2)$$

Ta có: $1 - \frac{1}{1+a} \ge 1 - \frac{4c}{4c+57} + \frac{35}{35+2b}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+a} \ge \frac{57}{4c+57} + \frac{35}{35+2b} \ge 2.\sqrt{\frac{35.57}{(4c+57)(35+2b)}} > 0 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{8abc}{(1+a)(4c+57)(2b+35)} \ge 8.\frac{35.57}{(1+a)(2b+35)(4c+57)}$$

Do đó $abc \ge 35.57 = 1995$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = 35$ và $c = \frac{57}{2}$.

Vậy min (abc) = 1995.

Đề số 11

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm m để đường thẳng (Δ): $y = (2m-1)x - 4m$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm *M, N* phân biệt và *M, N* cùng với điểm $P(-\frac{5}{2};\frac{5}{8})$ tạo thành tam giác *MNP* nhận gốc tọa độ làm trọng tâm.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $2\log_2(x-2) + \log_{0,5}(2x-1) = 0$;

b) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$.

Câu 4. Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Câu 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có C(1;2), hai đường cao xuất phát từ A và B lần lượt có phương trình là x + y = 0 và 2x – y + 1 = 0. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (*P*) và đường thẳng (*d*) lần lượt có phương trình:

(P): $2x - y - 2z - 2 = 0$; (*d*): $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (Δ), cách mặt phẳng (*P*) một khoảng bằng 2 và cắt mặt phẳng (*P*) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3. Viết phương trình mặt phẳng (*Q*) chứa đường thẳng (Δ) và tạo với mặt phẳng (*P*) một góc nhỏ nhất.

Câu 8. Giải pt: $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

Câu 9. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $abc+a+c=b$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$.

Giải

Câu 1. a) TXĐ: D=R

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$;

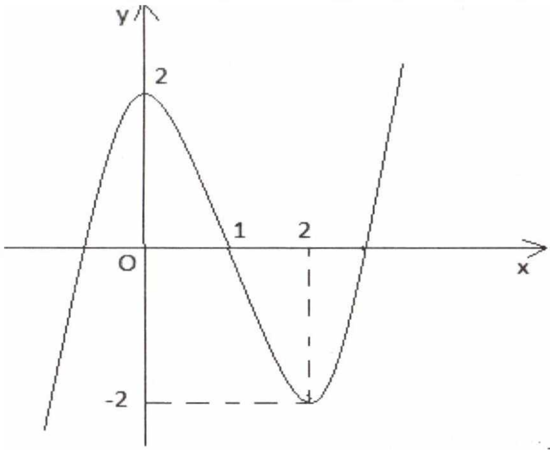
Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

$y_{CĐ} = 2$ tại $x = 0$; $y_{CT} = -2$ tại $x = 2$.

+) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

+) Đồ thị: Giao với Oy tại (0; 2); Giao với Ox tại (1; 0) và $\left(1 \pm \sqrt{3};0\right)$.



b) Hoành độ giao của (C) và (Δ) là nghiệm của phương trình:

$x^3 - 3x^2 - (2m-1)x + 4m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = x^2 - x - 2m - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$

(Δ) cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt M, N

$\Leftrightarrow$ (1) phải có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} 2 \neq x_1 = x_2 \\ x_1 = 2 \neq x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta = 0\\ -\dfrac{b}{2a} \neq 2\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta > 0\\ f(2) = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8m+5=0\\ \dfrac{1}{2} \neq 2\end{cases}\\ \begin{cases}8m+5>0\\ -2m+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{5}{8}\\ m = \dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Với $m = -\frac{5}{8}$ *ta có* $M(\frac{1}{2};\frac{11}{8}); N(2;-2)$ khi đó trọng tâm của ΔMNP là G(0;0) trùng với gốc tọa độ O.

Với $m = \frac{1}{2}$ ta có $M(-1;-2); N(2;-2)$ khi đó trọng tâm của ΔMNP là $G\left(-\frac{1}{2};-\frac{9}{8}\right)$ không trùng với gốc tọa độ O.

Vậy: $m = -\frac{5}{8}$ thỏa mãn Δ MNP nhận O làm trọng tâm.

Câu 2. a) $2\log_2(x-2) + \log_{0,5}(2x-1) = 0$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} x-2>0\\ 2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Khi đó, (*)

$\Leftrightarrow \log_2(x-2)^2 - \log_2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x-2)^2 = \log_2(2x-1)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (2x-1) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)}\\ x = 5 \text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\\ \tan x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\dfrac{\pi}{2}\\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases}$ (*)

Khi đó ta có $\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}+\sin x(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x(\cos x-\sin x)-\sin x(\cos x-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ 1-\sin x\cos x+\sin^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\sin x\\ 1-\sin x\cos x+\sin^2 x=0.\end{array}\right.$$

+) $\cos x=\sin x \Leftrightarrow \tan x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (Thỏa mãn điều kiện).

+) $1-\sin x\cos x+\sin^2 x=0$

$$\Leftrightarrow 2-\sin 2x+1-\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Câu 3.a) Đặt $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos t dt$

$x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$\sqrt{4-x^2}=2\cos t$

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin t)^3.2\cos t dt}{2\cos t}$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\sin t dt=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 t\right)d(-\cos t)$$

$$=8\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}-3\sqrt{3}$$

b) Đặt $t = z^2$, phương trình trở thành

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 9 \\ z^2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 3 \\ z = \pm 2i. \end{array}\right.$$

Câu 4.

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam.

Bước 1: chọn ra 1 trong 3 nữ có 3 cách.

Bước 2: chọn ra 2 trong 5 nam có C_5^2 cách.

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn.

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam.

Bước 1: chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

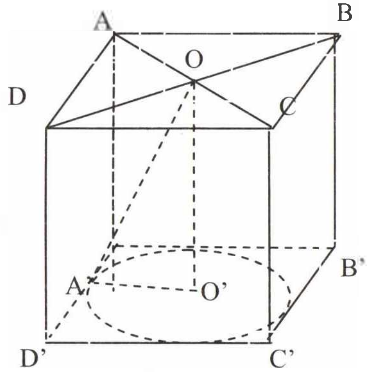
Bước 2: chọn ra 1 trong 5 nam có 5 cách.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ có 1 cách.

Vậy có $3C_5^2 + 5C_3^2 + 1 = 46$ cách chọn.

Câu 5.



Khối nón có chiều cao a và có bán kính đáy

$r = \dfrac{a}{2}$.

Độ dài đường sinh: $l = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích xung quanh của khối nón:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}.$$

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.a = \dfrac{\pi a^3}{12}$.

Câu 6.

Ta có AC qua C(1;2) và vuông góc với đường cao BK cho nên:

$$\vec{u}=(2;-1)\Rightarrow(AC):\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}\Leftrightarrow x+2y-5=0.$$

Do AC cắt AH tại A:

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{11}{5}\end{cases}\Leftrightarrow A\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right)\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vì BC qua C(1;2) và vuông góc với AH suy ra

$$\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)\Rightarrow(BC):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\end{cases}$$

Mà BC cắt đường cao AH tại B

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\x+y=0\end{cases}\rightarrow t=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Khoảng cách từ B đến AC: $\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{2\sqrt{5}}$.

Vậy $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{5}}{5}.\dfrac{9}{2\sqrt{5}}=\dfrac{9}{20}$.

Câu 7.

+) Đường thẳng (Δ) có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t;\quad t\in R.\\z=2+t\end{cases}$

Gọi tâm mặt cầu là I. Giả sử $I(-t;\,-1+2t;\,2+t)\in(\Delta)$.

Vì tâm mặt cầu cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3 nên:

$$d(I;\Delta)=\frac{|-2t+1-2t-4-2t-2|}{3}=\frac{|6t+5|}{3}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \\ t=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có hai tâm mặt cầu: $I\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ và $I\left(\frac{7}{3};-\frac{17}{3};-\frac{1}{7}\right)$

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính bằng 4 nên mặt cầu có bán kính là $R = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=25 \text{ và } \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y+\frac{17}{3}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=25.$$

+) Đường thẳng (Δ) có VTCP $\vec{u}=(-1;2;1)$; PTTQ: $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+z-2=0. \end{cases}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(2;-1;-2)$

Góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (P) là:

$$\sin\alpha=\frac{|-2-2-2|}{3.\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (Q) cần tìm là:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Giả sử (Q) đi qua (Δ) có dạng: $m(2x+y+1)+n(x+z-2)=0$ $(m^2+n^2>0)$

$\Leftrightarrow (2m+n)x+my+nz+m-2n=0.$

Vậy góc giữa (P) và (Q) là: $\cos\alpha=\frac{|3m|}{3.\sqrt{5m^2+2n^2+4mn}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow m^2+2mn+n^2=0 \Leftrightarrow (m+n)^2=0 \Leftrightarrow m=-n.$

Chọn $m=1$, $n=-1$, ta có: mặt phẳng (Q) là: $x+y-z+3=0$.

Câu 8. Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2},\ u>0 \\ v=\sqrt{x^2+2x+3},\ v>0. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} u^2=x^2+2 \\ v^2=x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2-u^2=2x+1 \\ x=\dfrac{v^2-u^2-1}{2}. \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow (v-u)\left[v+u+\dfrac{u}{2}(v+u)+\dfrac{v}{2}(v+u)+\dfrac{1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow v-u=0$

(biểu thức trong ngoặc vuông dương)

$\Leftrightarrow v-u=0 \Leftrightarrow v=u \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 9. Điều kiện $abc+a+c=b \Leftrightarrow b=\dfrac{a+c}{1-ac}$ vì $ac\neq 1$ và $a,b,c>0$

Đặt $a=\tan A, c=\tan C$ với $A,C\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in Z$. Ta được $b=\tan(A+C)$.

Ta có: $P=\dfrac{2}{\tan^2 A+1}-\dfrac{2}{\tan^2(A+C)+1}+\dfrac{3}{\tan^2 C+1}$

$=2\cos^2 A-2\cos^2(A+C)+3\cos^2 C=\cos 2A-\cos(2A+2C)+3\cos^2 C$

$=2\sin(2A+C).\sin C+3\cos^2 C.$

Do đó: $P\le 2|\sin C|-3\sin^2 C+3=\dfrac{10}{3}-\left(|\sin C|-\dfrac{1}{3}\right)^2\le\dfrac{10}{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} |\sin C|=\dfrac{1}{3} \\ |\sin(2A+C)|=1 \\ \sin(2A+C).\sin C>0 \end{cases}$

Từ $|\sin C|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \tan C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Từ $|\sin(2A+C)|=1\Leftrightarrow\cos(2A+C)=0$ được $\tan A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\max P=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow\left(a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; b=\sqrt{2}; c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right).$

Đề số 12

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = –2.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình. $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \geq 14$;

b) Giải phương trình

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x + \sin 3x\cos^3 x\right) = \sin x\sin^2 3x.$$

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$;

b) Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính: $1 + z + z^2$.

Câu 4. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \ldots + a_{11}$. Tìm hệ số a_5.

Câu 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua các đỉnh hình chóp.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $2x + y + 5 = 0$, d_2: $3x + 2y - 1 = 0$ và điểm G(1;3). Tìm tọa độ các điểm B thuộc d_1 và C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm. Biết A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho hai đường thẳng *d* và *d'* lần lượt có phương trình: *d*: $x = \frac{y-2}{-1} = z$ và *d'*: $\frac{x-2}{2} = y - 3 = \frac{z+5}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua *d* và tạo với *d'* một góc 30^0.

Câu 8. Giải bpt: $\sqrt{x^2-x-2} + 3\sqrt{x} \leq \sqrt{5x^2-4x-6}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+1}$.

Tìm p, q để $\max\limits_{x\in R} f(x)=9$, $\min\limits_{x\in R} f(x)=-1$.

Giải

Câu 1.

a) Với $m=-2$ thì $y=x^4-4x^2+2$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y'=4x^3-8x=4x\left(x^2-2\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

HS đồng biến trên $(-\sqrt{2};0)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$

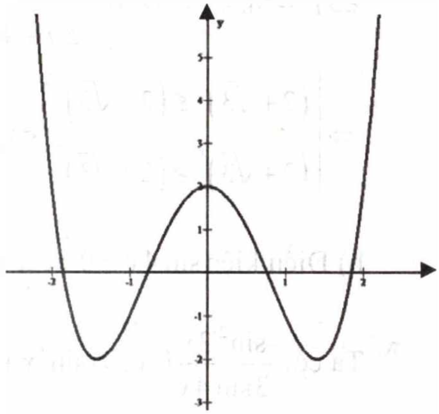
HS nghịch biến trên $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\sqrt{2})$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4-4x^2+2\right)=+\infty$; $y_{CĐ}=y(0)=2$; $y_{CT}=y(\pm\sqrt{2})=-2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Đồ thị



2) Ta có $y'=4x^3+4mx$;

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi m < 0.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}.\end{array}\right.$

Gọi A(0; m^2+m); B($\sqrt{-m}$; m);

C($-\sqrt{-m}$; m) là các điểm cực trị.

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{-m};-m^2)$; $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{-m};-m^2)$.

ΔABC cân tại A nên góc 120^0 chính là $\widehat{A}$.

$$\widehat{A}=120^0 \Leftrightarrow \cos A=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m}+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2m+2m^4=m-m^4 \Leftrightarrow 3m^4+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \quad \text{(loại)} \\ m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}. \end{array}\right.$$

Vậy m = $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thoả mãn bài toán.

Câu 2.

a) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \ge 14$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right)^x+\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)^x \ge 14$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x \ge 14$$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$ ta có bpt $\frac{1}{t}+t \ge 14$

$$\Leftrightarrow t^2-14t+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t \le 7-4\sqrt{3} \\ t \ge 7+4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(2+\sqrt{3}\right)^x \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{-2} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^x \ge \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 2. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện $\sin 4x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{4}$.

Ta có: $\frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x\right)$

$$=\frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left[\sin^3 x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)+\cos^3 x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\right]$$

$$=\frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left[3\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\right]$$

$$=\frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}.\frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{\sin^2 3x}{\sin 4x}\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{1}{4}\sin^2 3x$$

Do đó có phương trình: $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x.\sin^2 3x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x.\sin^2 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x-2.\frac{1}{2}\sin x\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin^4 3x+\frac{1}{4}\sin^2 3x-\frac{1}{4}\sin^4 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x\cos^2 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\sin^2 3x\\ \sin^2 3x.\cos^2 3x=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \sin 3x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos 3x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\pi\\ x=k\frac{\pi}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin^2 3x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+l2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.\\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+l2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+l2\pi.\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có 2 nghiệm: $x=\frac{\pi}{6}+l2\pi$; $x=\frac{5\pi}{6}+l2\pi$.

Câu 3.

a) Có $I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{1}{2}(J-K)(1)$

+ Tính $J=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$.

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$

$x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; $1+x^2=1+\tan^2 t$.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

+ Tính $K=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3}$.

Đặt $x=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow dx=\sqrt{3}\frac{dt}{\cos^2 t}$

$x=0\Rightarrow t=0; x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

Vậy $K=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t.3\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}dt=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Do đó $I=\frac{1}{2}\left(J-K\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

b) Ta có $z^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Do đó: $1+z+z^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$.

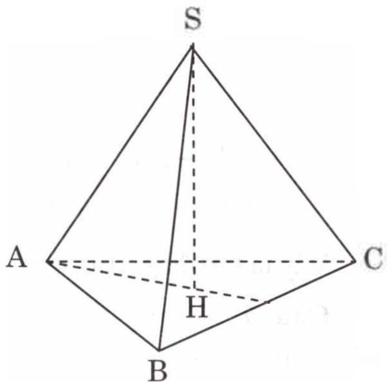
Câu 4.

Ta có: $(x+1)^{10}=C_{10}^0x^{10}+C_{10}^1x^9+...+C_{10}^9x+C_{10}^{10}$

$\Rightarrow (x+1)^{10}(x+2) = ... + \left(C_{10}^5 + 2C_{10}^4\right)x^6 + ...$

$\Rightarrow a_5 = C_{10}^5 + 2C_{10}^4 = 672$.

Câu 5.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Do SABC là hình chóp đều nên tâm O của mặt cầu nằm trên SH.

Gọi I là trung điểm của SA.

Trong mp(SAH) dựng IO vuông góc với SA cắt SH tại O.

Khi đó: O là tâm mặt cầu đi qua các đỉnh hình chóp.

Xét hai tam giác đồng dạng SIO và SHA ta có: $\frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH} \Rightarrow SO = \frac{SA^2}{2SH} = r$

Mà $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2$

nên $SH = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Vậy: $r = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{b^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

Câu 6.

Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 17 \end{cases} \Rightarrow A(-11;17)$

Nếu C thuộc $d_1 \Rightarrow B(t;-2t-5), C \in d_2 \Rightarrow C(1+2m;-1-3m)$

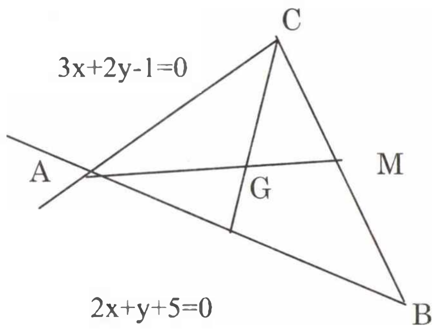
Theo tính chất trọng tâm của tam giác ABC khi G là trọng tâm thì:

$$\begin{cases} \dfrac{t+2m-10}{3}=1 \\ \dfrac{11-2t-3m}{3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2m=13 \\ 2t+3m=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=13-2m \\ 2(13-2m)+3m=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=13-2m \\ m=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-35 \\ m=24. \end{cases}$$

Vậy ta tìm được: B(-35;65) và C(49;-53).



Câu 7. Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;-1;1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;3;-5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(2;1;-1)$.

Mp(α) phải đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}$ và $|\cos(\vec{n};\vec{u'})| = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$. Bởi vậy nếu đặt $\vec{n}=(A;B;C)$ thì ta phải có:

$$\begin{cases} A-B+C=0 \\ \dfrac{|2A+B-C|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=A+C \\ 2|3A|=\sqrt{6}\sqrt{A^2+(A+C)^2+C^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=A+C \\ 2A^2-AC-C^2=0 \end{cases}$$

Ta có $2A^2-AC-C^2=0 \Leftrightarrow (A-C)(2A+C)=0$.

Vậy $A=C$ hoặc $2A=-C$.

Nếu $A=C$, ta có thể chọn $A=C=1$, khi đó $B=2$, tức là $\vec{n}=(1;2;1)$ và $mp(\alpha)$ có phương trình $x+2(y-2)+z=0$ hay $x+2y+z-4=0$

Nếu $2A=-C$ ta có thể chọn $A=1, C=-2$, khi đó $B=-1$, tức là $\vec{n}=(1;-1;-2)$ và $mp(\alpha)$ có phương trình $x-(y-2)-2z=0$ hay $x-y-2z+2=0$.

Câu 8. ĐK: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 5x^2 - 4x - 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

Bình phương hai vế BPT ta được

$6\sqrt{x(x+1)(x-2)} \le 4x^2 - 12x - 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{(x+1)(x^2-2x)} \le 2(x^2-2x) - 2(x+1)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{(x^2-2x)}{x+1}} \le 2\dfrac{x^2-2x}{x+1} - 2.$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x(x-2)}{x+1}} \ge 0$, ta được bpt $2t^2 - 3t - 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le \dfrac{-1}{2} \\ t \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t \ge 2$ (do $t \ge 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x(x-2)}{x+1}} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 3 - \sqrt{13} \\ x \ge 3 + \sqrt{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 3 + \sqrt{13}$ (do $x \ge 2$)

Vậy BPT có nghiệm $x \ge 3 + \sqrt{13}$.

Câu 9. Gọi y_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số f(x).

Khi đó, phương trình $\dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + 1} = y_0$ (1) có nghiệm.

Ta có, (1) $\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 - px + (y_0 - q) = 0$ (2)

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm, xét 2 trường hợp:

TH 1: $y_0 = 1$ thì (2) có nghiệm khi $p \ne 0$ hoặc p = 0 và q = 1.

TH 2: $y_0 \ne 1$ thì (2) có nghiệm khi $\Delta = p^2 - 4(y_0 - 1)(y_0 - q) \ge 0$

$\Leftrightarrow 4y_0^2 - 4(q+1)y_0 - (p^2 - 4q) \le 0.$

Ta có $4y_0(1) = -4p^2 \le 0$ nên BPT trên luôn có nghiệm $y_1 \le y_0 \le y_2$ và $y_1 \le 1 \le y_2$.

Kết hợp hai trường hợp ta có để (1) có nghiệm là $y_1 \le y_0 \le y_2$.

Khi đó, ta có $\min\limits_{x\in R} f(x) = y_1, \max\limits_{x\in R} f(x) = y_2$.

Theo viét ta có $\begin{cases} y_1 + y_2 = q+1 = 8 \\ y_1.y_2 = \dfrac{p^2 - 4q}{4} = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 7 \\ p = \pm 8. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} q = 7 \\ p = \pm 8 \end{cases}$

Đề số 13

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB cân tại gốc tọa độ O.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $3^{3x} - 6.3^x - \dfrac{8}{3^{3x}} + \dfrac{12}{3^x} = 1$;

b) $\tan 2x + \tan 3x + \dfrac{1}{\sin x \cos 2x \cos 3x} = 0$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

b) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$.

Câu 4. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Câu 5. Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có chiều cao bằng h và góc $\widehat{ASB} = 2\varphi$. Hãy tính thể tích khối chóp.

Câu 6. Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng: 2x – 5y + 1 = 0, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng: 12x – y – 23 = 0. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm (3;1).

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng: $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ và $(d_2): \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ các điểm M thuộc (d_1) và N thuộc (d_2) sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 2010 = 0$ độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{2}$.

Câu 8. Giải hệ pt: $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: $D = R \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

Sự biến thiên:

* Chiều biến thiên: Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{3}{2}$.

Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

* Tiệm cận:

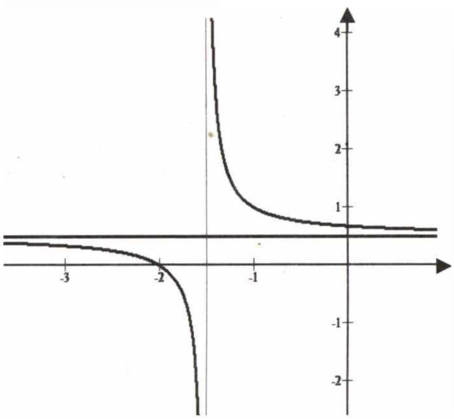
+) Vì $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^-} \dfrac{x+2}{2x+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} \dfrac{x+2}{2x+3} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3/2		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	1/2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1/2

Vẽ đồ thị:



b) ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến song song với một trong hai đường thẳng y = x hoặc y = –x.

Nghĩa là: $f'(x_0) = \pm 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Δ_1: y – 1 = –1(x + 1) ⇔ y = –x (loại);

Δ_2: y – 0 = –1(x + 2) ⇔ y = –x – 2 (nhận).

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là y = –x –2.

Câu 2. a) Viết lại phương trình có dạng: $\left(3^{3x}-\frac{2^3}{3^{3x}}\right)-6\left(3^x-\frac{2}{3^x}\right)=1$ (1)

Đặt $t=3^x-\frac{2}{3^x}\Rightarrow 3^{3x}-\frac{2^3}{3^{3x}}=\left(3^x-\frac{2}{3^x}\right)^3+3.3^x.\frac{2}{3^x}\left(3^x-\frac{2}{3^x}\right)=t^3+6t$

Khi đó phương trình (1) có dạng: $t^3+6t-6t=1\Leftrightarrow t=1$

Với $t=1\Rightarrow 3^x-\frac{2}{3^x}=1\Leftrightarrow 3^{2x}-3^x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=-1\\3^x=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\log_3 2$.

b) Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x\neq\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\end{cases}(*)$.

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+\frac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}=0$

$\Leftrightarrow\frac{\sin 2x\cos 3x+\sin 3x.\cos 2x}{\cos 2x\cos 3x}+\frac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}=0$

$\Leftrightarrow\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}+\frac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}=0$

$\Leftrightarrow\frac{\sin 5x.\sin x+1}{\sin x\cos 2x\cos 3x}=0$

$\Leftrightarrow\sin 5x.\sin x+1=0$

$\Leftrightarrow\frac{\cos 4x-\cos 6x}{2}+1=0\Leftrightarrow\cos 4x-\cos 6x=-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 4x=-1\\ \cos 6x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{k\pi}{3}.\end{cases}$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 3. a) Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \text{costdt}.$

Đổi cận $x=0 \to t=0$; $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}.$

$\sqrt{1-x^2} = \text{cost}.$

Vậy $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\text{cost}}\text{costdt}$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{8}.$

b) Giải phương trình đã cho ta được các nghiệm: $z_1 = 1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i, z_2 = 1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

Suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$; $z_1 + z_2 = 2$.

Do đó: $\dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1+z_2)^2} = \dfrac{11}{4}$.

Câu 4. ***Cách 1:***

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 4 nam.

Bước 1: chọn 1 trong 5 nữ có 5 cách.

Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Bước 3: chọn 2 trong 13 nam còn lại có C_{13}^2 cách.

Suy ra có $5A_{15}^2.C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp 1.

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 3 nam.

Bước 1: chọn 2 trong 5 nữ có C_5^2 cách.

Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Bước 3: chọn 1 trong 13 nam còn lại có 13 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2.C_5^2$ cách chọn cho trường hợp 2.

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ và 2 nam.

Bước 1: chọn 3 trong 5 nữ có C_5^3 cách.

Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Suy ra có $A_{15}^2.C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy có $5A_{15}^2.C_{13}^2 + 13A_{15}^2.C_5^2 + A_{15}^2.C_5^3 = 111300$ cách.

Cách 2:

Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Bước 2: chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

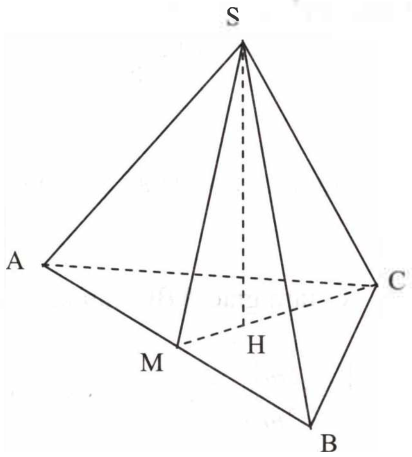
Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam có $5.C_{13}^2$ cách.

Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam có $13.C_5^2$ cách.

Trường hợp 3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2\left(5.C_{13}^2 + 13.C_5^2 + C_5^3\right) = 111300$ cách.

Câu 5.



Tính $V_{S.ABC}$:

+ Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC).

Vì: SA = SB = SC $\Rightarrow$ HA = HB = HC

$\rightarrow$ H là tâm của tam giác đều ABC.

+ Gọi M là giao điểm của CH và AB thì M là trung điểm của AB và SM $\perp$ AB.

+ Đặt AB = 2x $\Rightarrow$ AM = BM = x (x > 0).

+ gt: $\widehat{ASB} = 2\varphi$

$\Rightarrow \widehat{ASM} = \widehat{BSM} = \varphi \quad (0^0 < \varphi < 90^0)$.

+ ΔASM, $\widehat{M} = 1v \Rightarrow SM = AM \cot \widehat{ASM} = x\cot\varphi$

$MH = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}AB.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.2x.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

+ ΔSHM, $\widehat{H} = 1v \Rightarrow SH^2 + MH^2 = SM^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{x^2}{3} = x^2\cot^2\varphi$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3h^2}{3\cot^2\varphi - 1}}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB.CM\right).h = \frac{1}{6}h.2x.\frac{2x\sqrt{3}}{2}$

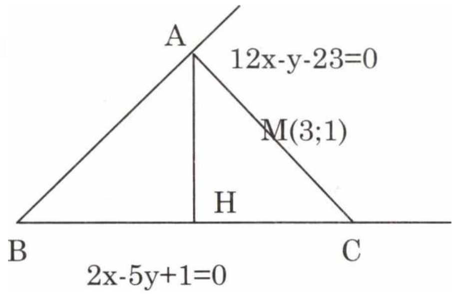
$= x^2h.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}h^3}{3\cot^2\varphi - 1}$ (đvtt).

Câu 6. Đường AB cắt BC tại B nên tọa độ B là nghiệm $\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ 12x - y - 23 = 0. \end{cases}$

Suy ra B(2;-1).

Đường thẳng AB có hệ số góc k=12, đường thẳng BC có hệ số góc k'=$\frac{2}{5}$, do đó

ta có: $\tan B = \left|\frac{12 - \frac{2}{5}}{1 + 12.\frac{2}{5}}\right| = 2$.



Gọi (AC) có hệ số góc là m thì ta có: $\tan C = \left|\frac{\frac{2}{5} - m}{1 + \frac{2m}{5}}\right| = \left|\frac{2 - 5m}{5 + 2m}\right|$.

Vì tam giác ABC cân tại A cho nên tanB = tanC, hay ta có:

$\left|\frac{2 - 5m}{5 + 2m}\right| = 2 \Leftrightarrow |2 - 5m| = 2|2m + 5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 5m = 4m + 10 \\ 2 - 5m = -4m - 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{8}{9} \\ m = 12. \end{array}\right.$

+ Trường hợp: $m = -\frac{9}{8} \Rightarrow AC : y = -\frac{9}{8}(x - 3) + 1 \Leftrightarrow 9x + 8y - 35 = 0.$

+ Trường hợp: m=12 suy ra AC: y=12(x-3)+1 hay AC: 12x-y-25=0 (loại vì nó //AB).

Vậy phương trình đường thẳng AC là 9x+8y-35=0.

Câu 7.

+ $M, N \in (d_1), (d_2)$ nên ta giả sử

$M(t_1; t_1; 2t_1)$, $N(-1-2t_2; t_2; 1+t_2) \Rightarrow \overline{NM} = (t_1 + 2t_2 + 1; t_1 - t_2; 2t_1 - t_2 - 1)$.

+ *MN* song song mp(*P*) nên:

$\overline{n_P}.\overline{NM} = 0 \Leftrightarrow 1.(t_1 + 2t_2 + 1) - 1.(t_1 - t_2) + 1(2t_1 - t_2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t_2 = -t_1 \Rightarrow \overline{NM} = (-t_1 + 1; 2t_1; 3t_1 - 1)$.

+ Ta có: $MN = \sqrt{2} \Leftrightarrow (-t_1 + 1)^2 + (2t_1)^2 + (3t_1 - 1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow 7t_1^2 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_1 = \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

+ Suy ra: $M(0; 0; 0)$, $N(-1; 0; 1)$ hoặc $M(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{8}{7})$, $N(\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{3}{7})$.

+ Kiểm tra lại thấy cả hai trường hợp trên không có trường hợp nào $M \in (P)$.

KL: Vậy có hai cặp *M, N* như trên thoả mãn.

Câu 8. Ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 & (1) \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x + y \geq 0, x - y \geq 0$.

PT$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \Leftrightarrow x + y = 4 + x - y + 4\sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow y - 2 = 2\sqrt{x-y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ (y-2)^2 = 4(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y^2 = 4x - 4 \end{cases}$ thế vào (2)

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 4} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 4} + \sqrt{(x-2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 4} + |x - 2| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 4} + x - 2 = 4$, (vì $x \geq y \geq 2$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-4}=6-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 6 \\ x^2+4x-4=(6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow y^2=6 \Rightarrow y=\sqrt{6}$ (vì $y\ge 2$).

Vậy hệ có một nghiệm $\left(\frac{5}{2};\sqrt{6}\right)$.

Câu 9. Gọi y_0 là một giá trị tùy ý của f(x).

Khi đó, phương trình $\frac{3+4x^2+3x^4}{(1+x^2)^2}=y_0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (y_0-3)x^4+2(y_0-2)x^2+y_0-3=0$ (1)

Để (1) có nghiệm xét hai trường hợp:

TH 1: $y_0=3$ khi đó (1) trở thành $x^2=0$. Vậy (1) có nghiệm.

TH 2: Nếu $y_0\ne 3$ đặt $t=x^2$ ta có $\begin{cases} t\ge 0 \\ (y_0-3)t^2+2(y_0-2)t+y_0-3=0 \quad (2) \end{cases}$

Để (1) có nghiệm thì (2) phải có nghiệm $t\ge 0$ mà (2) có P = 1 > 0 $\Rightarrow$ (2) nếu có nghiệm thì 2 nghiệm cùng dấu.

Khi đó, (2) có nghiệm $t\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le y_0\le 3$.

Kết hợp hai trường hợp (1) có nghiệm khi $\frac{5}{2}\le y_0\le 3$.

Vậy Max $y=3$, Min $y=\frac{5}{2}$.

Đề số 14

Câu 1. Cho hàm số: $y=-x^3+3x^2-1$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

b) Dùng đồ thị (C), xác định k để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt $x^3 - 3x^2 + k = 0$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}+1>\log_3\left(3x^2-4x+2\right)$;

b) Giải phương trình tanx + tan2x = -sin3xcos2x.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\sin^2 x\right)\cos x dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức

$x^2-(3+4i)x+(-1+5i)=0$.

Câu 4. Tìm *a* và *n* nguyên dương thỏa mãn:

$aC_n^0+\frac{a^2}{2}C_n^1+\frac{a^3}{3}C_n^2+......+\frac{a^{n+1}}{(n+1)}C_n^n=\frac{127}{7}$ và $A_n^3=20n$.

Câu 5. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5. Hạ $AK \perp A_1D \quad (K \in A_1D)$. Chứng minh AK = 2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho cho hai đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0$ và d_2: 3x +6y – 7 = 0. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm *P*(2; -1) sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng.

Câu 7. Trong không gian (oxyz), cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$ và mặt phẳng (P): x - 2y + 2z - 3 = 0. Tìm những điểm M $\in$ (S), N $\in$ (P) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

Câu 8. Giải pt: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$.

Câu 9. Cho bất phương trình $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\geq 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Giải

Câu 1.

a) TXĐ: D=R.

Ta có $y' = -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$;

Hàm số đồng biến trên (0;2).

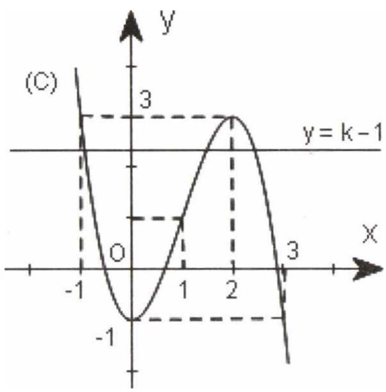
$y_{CĐ}=3$ tại $x=2$; $y_{CT}=-1$ tại $x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:



b) $x^3-3x^2+k=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-1=k-1$.

Đây là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và đường thẳng $(d): y=k-1$.

Căn cứ vào đồ thị, ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -1<k-1<3 \Leftrightarrow 0<k<4$.

Câu 2.

a) Đặt $t=\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}\geq 0$

$\Rightarrow t^2=\frac{1}{2}\log_3\left(3x^2-4x+2\right).$

Ta có:

$$t+1>2t^2\Leftrightarrow 2t^2-t-1<0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<t<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}<1$$

$$\Leftrightarrow 0\leq \log_9\left(3x^2-4x+2\right)<1\Leftrightarrow 1\leq 3x^2-4x+2<9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-4x+1\geq 0\\ 3x^2-4x-7<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \frac{1}{3}\vee x\geq 1\\ -1<x<\frac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\leq \frac{1}{3}\\ 1\leq x<\frac{7}{3}\end{array}\right.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}(*)$

Phương trình trở thành: $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-\sin 3x.\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x\cos 2x+\sin 2x.\cos x}{\cos x\cos 2x}=-\sin 3x.\cos 2x\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}+\sin 3x.\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x\left(\frac{1+\cos x.\cos^2 2x}{\cos x\cos 2x}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ 1+\cos x.\cos^2 2x=0.\end{array}\right.$$

Trường hợp: $\sin 3x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}\left(k\in Z\right)$ là một họ nghiệm, thỏa mãn điều kiện (*)

Trường hợp:

$$1+\cos x.\cos^2 2x=0\Leftrightarrow 1+\frac{\cos x\left(1+\cos 4x\right)}{2}=0\Leftrightarrow 2+\cos x+\frac{\cos 5x+\cos 3x}{2}=0$$

$\Leftrightarrow 4+2\cos x+\cos 5x+\cos 3x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x=-1 \\ \cos 5x=-1 \\ \cos x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 x-3\cos x=-1 (1) \\ \cos 5x=-1 (2) \\ \cos x=-1 (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=-1 \\ \cos 5x=-1 \end{cases}.$$

(Do thay (3) vào (1) thỏa mãn)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pi+l2\pi \\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{m2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \exists : l,m\in Z \leftrightarrow \frac{\pi}{5}+\frac{m2\pi}{5}=\pi+2l\pi$$

$1+2m=5+10l \Leftrightarrow m=5l+2 \Rightarrow x=\pi+l2\pi \quad (l\in Z)$.

Vậy phương trình có thêm nghiệm nữa là: $x=\pi+l2\pi \quad (l\in Z)$.

Câu 3. a) Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx = J+\frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=J+\frac{1}{3} \qquad (1)$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x)=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Thay vào (1): $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\sin^2 x\right)\cos x dx=\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$

b) Xét phương trình $x^2-(3+4i)x+(-1+5i)=0$ (*)

Ta có: $\Delta=(3+4i)^2-4.1.(-1+5i)$

$$=9+24i+16i^2+4-20i=-3+4i=(1+2i)^2$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm phức:

$$x_1=\frac{(3+4i)+(1+2i)}{2}=\frac{4+6i}{2}=2+3i.$$

$$x_2=\frac{(3+4i)-(1+2i)}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i.$$

Câu 4.

$A_n^3 = 20n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 20n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow$ n = 6 và n = –3 (loại)

Khi đó: $a.C_6^0 + \frac{a^2}{2}.C_6^1 + ... + \frac{a^7}{7}C_6^6 = \frac{127}{7}$

Ta có: $(1+x)^6 = C_6^0 + C_6^1x + C_6^2x^2 + C_6^3x^3 + C_6^4x^4 + C_6^5x^5 + C_6^6x^6$

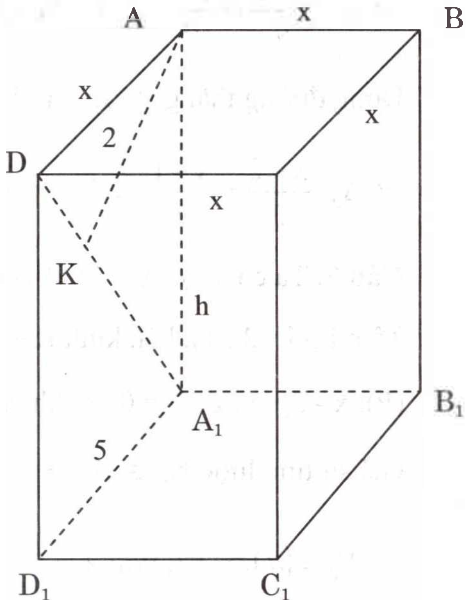
Nên $\int_0^a (1+x)^6 dx = C_6^0 [x]_0^a + C_6^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + ... + C_6^6 \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a$

$\Leftrightarrow \left[\frac{(1+x)^7}{7}\right]_0^a = a.C_6^0 + \frac{a^2}{2}.C_6^1 + ... + \frac{a^7}{7}C_6^6$

$\Leftrightarrow \frac{(1+a)^7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{127}{7} \Rightarrow (1+a)^7 = 128 \Rightarrow (1+a)^7 = 2^7 \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy a = 1 và n = 6.

Câu 5.



+) Chứng minh AK = 2:

$AB \perp (ADD_1A_1) \Rightarrow AB \perp AK$ và Gt: $AK \perp A_1D$

$\Rightarrow$ AK là đoạn vuông góc chung của AB và A_1D.

Vậy $AK = d(AB, A_1D) \Rightarrow AK = 2.$

+) Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$:

Đặt h = AA_1 là chiều cao của khối lăng trụ; x là cạnh đáy hình vuông.

Gt AK = 2; $A_1D = 5$.

ΔDAA_1 vuông tại A có AK là đường cao nên:

$AK.A_1D = AD.AH \Leftrightarrow 10 = x.h$ và $AD^2 + AA_1^2 = A_1D^2 \Leftrightarrow x^2 + h^2 = 25.$

Giải hệ: $\begin{cases} x^2 + h^2 = 25 \\ xh = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+h)^2 = 45 \\ xh = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + h = 3\sqrt{5} \\ xh = 10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{5}; h = \sqrt{5} \Rightarrow V = x^2h = 20\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}; h = 2\sqrt{5} \Rightarrow V = x^2h = 10\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Câu 6. Phương trình 2 đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}} = -\dfrac{2x-y+5}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2x-y+5}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x+3y+8=0 \\ 3x-9y+22=0. \end{array}\right.$$

Dựng đường thẳng Δ_1 qua P(2;-1) và vuông góc với phân giác 9x+3y+8=0.

$$\Rightarrow \Delta_1 : \frac{x-2}{9} = \frac{y+1}{3} \Leftrightarrow x - 3y - 5 = 0.$$

Dựng đường thẳng Δ_2 qua P(2;-1) và vuông góc với phân giác 3x-9y+22=0

$$\Rightarrow \Delta_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-9} \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0.$$

Câu 7. Ta có: (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

Tâm I (-1 ; 2 ; 1), bán kính R = 1.

(P): x - 2y + 2z - 3 = 0 $\Rightarrow$ khoảng cách $d(I;(P)) = 2 \Rightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$.

Giả sử tìm được $N_0 \in (P) \Rightarrow N_0$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Rightarrow N_0 = (d) \cap (P), \text{ với: } \begin{cases} (d) \ni I(-1;2;1) \\ (d) \perp (P). \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (1;-2;2) \Rightarrow (d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Tọa độ N_0 là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \\ x-2y+2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow N_0\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \\ x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0. \end{cases}$

$\Rightarrow M_1\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$

$M_1N_0 = 1 < M_2N_0 = 3$

$M \in (S)$ để MN_0 nhỏ nhất $\Rightarrow M_0 \equiv M_1$.

Vậy, những điểm cần tìm thoả mãn yêu cầu bài toán:

$M\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $N\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Câu 8. ĐK: $x \in [-1;1]$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{1+x} \\ b=\sqrt{1-x} \end{cases}$ điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0. \end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \sqrt{1+ab}\left(a^3-b^3\right)=2+ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \sqrt{1+ab}(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)=2+ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \sqrt{1+ab}(a-b)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2; a>b \\ (1+ab)\left(a^2+b^2-2ab\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2; a>b \\ (1+ab)(2-2ab)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2; a>b \\ a^2b^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b^2=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy PT có nghiệm $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Xét bất phương trình: $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\geq 0\ (1)$

Điều kiện: $x^2-2x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in R$.

Theo đề bài ta xét $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Đặt $t=t(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$, ta có:

$t'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $t'=0\Leftrightarrow x=1\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

$t(0)=\sqrt{2}$, $t(1)=1$, $t(1+\sqrt{3})=2$.

Suy ra: $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]\Leftrightarrow t\in[1;2]$.

Do $t=\sqrt{x^2-2x+2}\Leftrightarrow x(2-x)=2-t^2$ nên bất phương trình đã cho trở thành: $m(t+1)\geq t^2-2 \Leftrightarrow m\geq \frac{t^2-2}{t+1}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$, ta có:

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[1;2].$$

Suy ra: $\min\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(1) = -\dfrac{1}{2}$, $\max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) nghiệm đúng $\forall t \in [1;2]$.

$\Leftrightarrow\ m \geq \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) \Leftrightarrow\ m \geq \dfrac{2}{3}$.

Vậy, giá trị m thỏa đề bài là: $m \geq \dfrac{2}{3}$.

Đề số 15

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ (*1*), với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

b) Chứng minh đồ thị hàm số (*1*) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m < 0$.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $2\log_3^2 x + \log_{\sqrt{3}}(3x) - 14 = 0$;

b) $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $iz^2 + 4z + 4 - i = 0$.

Câu 4. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Câu 5. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BAD} = 45^0$ Các đường chéo AC_1 và DB_1 lần lượt tạo với đáy những góc 45^0 và 60^0. Hãy tính thể tích của khối lăng trụ nếu biết chiều cao của nó bằng 2.

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1): 4x - 3y - 12 = 0 và (d_2): 4x + 3y - 12 = 0. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh, mỗi cạnh nằm trên (d_1), (d_2) và trục Oy.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2;1;0) và đường thẳng d với d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M, cắt và vuông góc với đường thẳng d và tìm toạ độ của điểm M' đối xứng với M qua d.

Câu 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases}$

Câu 9. Cho các số thực $a,b,c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}.$$

Giải

Câu 1.

a) Với m = 1 ta có $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

HS đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

HS nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và (0; 1).

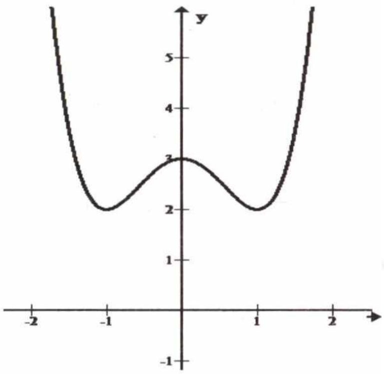
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4 - 2x^2 + 3\right) = +\infty.$

$y_{CĐ} = y(0) = 3$; $y_{CT} = y(\pm 1) = 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị



b) Hoành độ giao điểm của đồ thị (1) và trục Ox là nghiệm của phương trình:

$x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m = 0$ (*).

Đặt $t = x^2\left(t \geq 0\right)$, ta có:

$t^2 - 2m^2t + m^4 + 2m = 0\,(**)$

Ta có: $\Delta' = -2m > 0$ và $S = 2m^2 > 0$ với mọi $m < 0$ nên PT (**) luôn có nghiệm dương.

$\Rightarrow$ PT (*) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt (đpcm).

Câu 2.

a) $2\log_3^2 x + \log_{\sqrt{3}}(3x) - 14 = 0$

Điều kiện: $x > 0$

Khi đó, $2\log_3^2 x + \log_{\sqrt{3}}(3x) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3^2 x + 2\log_3(3x) - 14 = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3^2 x + 2(1 + \log_3 x) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3^2 x + 2\log_3 x - 12 = 0$ (*)

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình (*) trở thành

$$2t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = -3 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{27} \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm: $x = 9$ và $x = \dfrac{1}{27}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$.

Khi đó phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

$\Leftrightarrow 3(\cot x - \cos x) - 3(\tan x - \sin x) = 2 + 2(\tan x - \sin x)$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x + \sin x\right) = 2 + 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos x - \sin x)\left(\frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} - 1\right) = 2\left(\frac{\cos x + \sin x - \sin x\cos x}{\cos x}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[(\cos x + \sin x) - \sin x\cos x\right]\left(3\frac{1}{\sin x\cos x} - \frac{2}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ (\cos x + \sin x) - \sin x\cos x \\ 3\cos x - \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ t - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0, t = \cos x + \sin x, |t| \leq \sqrt{2} \\ \cos x(3 - 2\sin x) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ t = 1 - \sqrt{2} \vee t = 1 + \sqrt{2} > \sqrt{2} \quad \text{(loại)} \\ \cos x = 0 \vee \sin x = \dfrac{3}{2} > 1 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$$

Các nghiệm trên thỏa mãn điều kiện do đó là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3. a) Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2tdt = dx.$

Đổi cận $x = 0 \to t = 0; x = \dfrac{\pi^2}{4} \to t = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t^2\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t^2d\left(\sin t\right)=2t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}4t\sin t dt$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}-J=\frac{\pi^2}{2}-J(1)$$

Tính:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4t\sin t dt=-4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\left(\cos t\right)\right]=-4\left(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt\right)=-4\left(0+\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-4.$$

Vậy thay vào (1) ta có: $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=\frac{\pi^2}{2}+4$

b) $iz^2+4z+4-i=0$ (*)

Ta có, $\Delta'=2^2-i.(4-i)=4-4i+i^2=(2-i)^2$

Vậy, phương trình (*) có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1=\frac{-1-(2-i)}{i}=\frac{-3+i}{i}=1+3i.$$

$$z_2=\frac{-1+(2-i)}{i}=\frac{1-i}{i}=-1-i.$$

Câu 4. Loại 1: chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách.

Loại 2: chọn 10 câu có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.

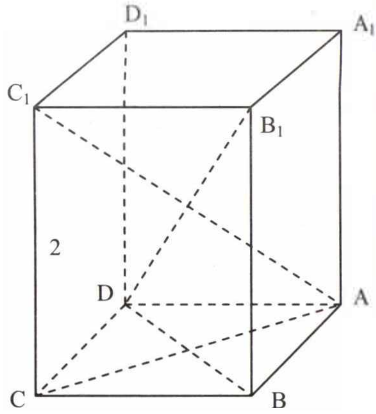
Trường hợp 1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} cách.

Trường hợp 2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách.

Trường hợp 3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách.

Vậy có $C_{20}^{10}-\left(C_{16}^{10}+C_{13}^{10}+C_{11}^{10}\right)=176451$ đề kiểm tra.

Câu 5.



Gt: (AC_1, (ABCD)) = 45^0

= (AC_1,AC) = $\widehat{C_1AC}$.

(DB_1, (ABCD)) = 60^0

= (DB_1, DB) = $\widehat{B_1DB}$.

$\Delta ACC_1, \widehat{C} = 90^0$

$\Rightarrow AC = CC_1.\cot\widehat{C_1AC} = 2.\cot 45^0 = 2.$

$\Delta DBB_1, \widehat{B} = 90^0 \Rightarrow BD = BB_1.\cot\widehat{B_1DB} = 2.\cot 60^0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Đặt AD = BC = x; AB = DC = y

ΔADC có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2.AD.DC.\cos\widehat{ADC}$

$\Leftrightarrow 4 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 135^0 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 45^0$ (1)

ΔBCD có: $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2.BC.CD.\cos\widehat{BCD}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3} = x^2 + y^2 - 2xy\cos 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{16}{3} = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{8}{3}$ thay

vào (2) có: $\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3} - 2xy.\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow xy = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}.$

$S_{ABCD} = 2.S_{BCD} = 2.\dfrac{1}{2}BC.CD.\sin C$

$= xy.\sin 45^0 = \dfrac{xy\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2}{3}.$

Vậy V = $S_{ABCD}.CC_1 = \dfrac{2}{3}.2 = \dfrac{4}{3}$ (đvdt).

Câu 6. Gọi A là giao của $d_1, d_2 \Rightarrow A: \begin{cases} 4x-3y-12=0 \\ 4x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(3;0) \in$ Ox.

Vì BC thuộc Oy cho nên gọi B là giao của d_1 với Oy: cho x=0 suy ra y=-4, B(0;-4) và C là giao của d_2 với Oy: C(0;4). Chứng tỏ B, C đối xứng nhau qua Ox, mặt khác A nằm trên Ox vì vậy tam giác ABC là tam giác cân đỉnh A. Do đó tâm I đường tròn nội tiếp tam giác thuộc Ox suy ra I(a;0).

Theo tính chất phân giác trong: $\frac{IA}{IO} = \frac{AC}{AO} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{IA+IO}{IO} = \frac{5+4}{4} \Leftrightarrow \frac{OA}{IO} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow IO = \frac{4OA}{9} = \frac{4.3}{9} = \frac{4}{3}$. Vậy tọa độ I($\frac{4}{3}$;0).

Tính r: $S = \frac{1}{2}BC.OA = \frac{1}{2}.5.3 = \frac{15}{2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{(AB+BC+CA)}{r} = \frac{1}{2}\frac{(5+8+5)}{r} \Rightarrow r = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}.$$

Câu 7. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d, ta có MH là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d.

d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -t \end{cases}$

Vì H $\in$ d nên tọa độ H (1+2t; −1+t ; −t).

Suy ra: $\overrightarrow{MH}$ = (2t − 1; − 2 + t; −t).

Vì MH $\perp$ d và d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ = (2; 1; −1), nên:

2.(2t − 1) + 1.(− 2 + t) + (− 1).(−t) = 0 $\Leftrightarrow$ t = $\frac{2}{3}$.

Vì thế, $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{u_{MH}} = 3\overrightarrow{MH} = (1;-4;-2)$$

Suy ra, phương trình chính tắc của đường thẳng MH là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Theo trên có $H(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$ mà H là trung điểm của MM' nên toạ độ M' $(\frac{8}{3};-\frac{5}{3};-\frac{4}{3})$.

Câu 8. Điều kiện: $x \geq -1$, $y \geq 1$.

Đặt $a=\sqrt{x+1} \Rightarrow x=a^2-1; a \geq 0$; $b=\sqrt{y-1} \Rightarrow y=b^2+1; b \geq 0$.

Ta có hệ $\begin{cases} a+b=4 \\ \sqrt{a^2+5}+\sqrt{b^2+5}=6,(*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow a^2+b^2+10+2\sqrt{(a^2+5)(b^2+5)}=36$

$\Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+2\sqrt{a^2b^2+25+5\left[(a+b)^2-2ab\right]}=26$

$\Rightarrow 16-2ab+2\sqrt{a^2b^2+25+5[16-2ab]}=26$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2-10ab+105}=5+ab \Leftrightarrow ab=4$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5. \end{cases}$

Câu 9. Ta có $\mathrm{P}=\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2}{\mathrm{c}^2+4\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{b})+4\mathrm{ab}} \geq \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2}{\mathrm{c}^2+4\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{b})+(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2}=\mathrm{M}$.

Do $a,b,c \in [1;2]$ nên $a+b \neq 0$, nên chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được: $M=\dfrac{1}{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2+4\left(\dfrac{c}{a+b}\right)+1}=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ với $t=\dfrac{c}{a+b}$.

Với $a,b,c \in [1;2] \Leftrightarrow t \in \left[\dfrac{1}{4};1\right]$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-2(t+2)}{(t^2+4t+1)^2}<0,\ \forall t \in \left[\dfrac{1}{4};1\right] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

Do đó $\forall\ t \le 1 \Rightarrow f(t) \ge f(1) = \frac{1}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 \Leftrightarrow (a;b;c) = (1;1;2)$.

Vậy Min $P = \frac{1}{6}$ khi $(a;b;c) = (1;1;2)$.

Đề số 16

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình

$\left(3+\sqrt{5}\right)^{2x-x^2} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2x-x^2} - 2^{1+2x-x^2} \le 0$;

b) Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2+2\cos 2x}$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$;

b) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 2 + 2\sqrt{2}i = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai nhận $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ làm nghiệm.

Câu 4. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $P = (x^2 + x - 1)^6$.

Câu 5. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'BC). Tính $\tan\alpha$ và tính thể tích khối chóp A'.BB'C'C.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết A(2; - 3), B(3; - 2), có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm thuộc đường thẳng Δ: 3x – y – 8 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho các điểm $C(0;0;2)$, $K(6;-3;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C, K sao cho (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 3.

Câu 8. Giải bpt: $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x > \sqrt{3}$.

Câu 9. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2+1} = 1 \\ x + y + \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = a^2 \end{cases}.$$

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: $D = R\setminus\{1\}$

Sự biến thiên:

* Chiều biến thiên:

+) Ta có: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

* Tiệm cận:

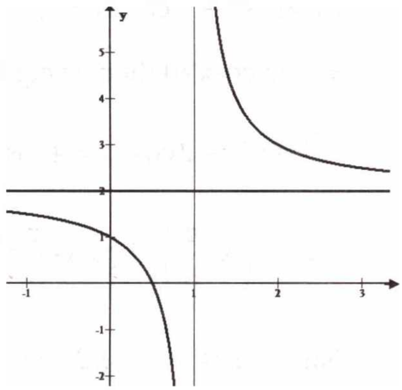
+) Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

+) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

Đồ thị



b) Giao điểm của hai tiệm cận là I(1; 2).

Gọi M(a; b) $\in$ (C) $\Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1}$ (a $\neq$ 1).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M:

$$y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{a-1}.$$

Phương trình đường thẳng MI:

$$y=\frac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2.$$

Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có:

$$-\frac{1}{(a-1)^2}.\frac{1}{(a-1)^2}=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\ (b=1) \\ a=2\ (b=3). \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm cần tìm $M_1(0;1)$, $M_2(2;3)$.

Câu 2. a) $\left(3+\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}-2^{1+2x-x^2}\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}\leq 2.2^{2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}\leq 2.$$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}>0$ ta có bất phương trình $t+\frac{1}{t}-2\le 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ t^2-2t+1\le 0\end{cases}\Rightarrow t=1\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

Vậy BPT có nghiệm là $x=0$ hoặc $x=2$.

b) Vì $\sqrt{2+2\cos 2x}=\sqrt{2(1+\cos 2x)}=\sqrt{2.2\cos^2 x}=2|\cos x|$.

+ Nếu cosx>0 thì phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4\cos x\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$$

Nhưng $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=-\frac{1}{2}<0$ nên: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in Z)$ bị loại.

+ Nếu cosx<0 thì

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=-4\cos x\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-\cos x=-2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=-1$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi.$$

Nhưng $\cos\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}>0$.

Cho nên: $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in Z)$. Loại.

+ Nếu Cosx=0 thì là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in Z)$.

Câu 3. a) Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ v = \dfrac{1}{4} x^4 \end{cases}$

Ta có $I = \dfrac{1}{4} x^4 \ln^2 x \Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2} J (1)$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv' = x^3 dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v' = \dfrac{1}{4} x^4 \end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{4} . \dfrac{1}{4} x^4 \Big|_1^e$

$= \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{16}\left(e^4 - 1\right) = \dfrac{3e^4 + 1}{16}.$

Thay các kết quả vào (1) ta có: $I = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3e^4+1}{16}\right) = \dfrac{5e^4 - 1}{32}.$

b) Với z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 + 2\sqrt{2}i = 0$

thì $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 . z_2 = 2 + 2\sqrt{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 2 \\ \overline{z}_1 . \overline{z}_2 = 2 - 2\sqrt{2}i. \end{cases}$

Do đó, $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 - 2\sqrt{2}i = 0$.

Câu 4. Theo công thức nhị thức Niu-tơn, ta có:

$P = C_6^0 (x-1)^6 + C_6^1 x^2 (x-1)^5 + \ldots + C_6^k x^{2k} (x-1)^{6-k} + \ldots + C_6^5 x^{10}(x-1) + C_6^6 x^{12}.$

Suy ra, khi khai triển P thành đa thức, x^2 chỉ xuất hiện khi khai triển $C_6^0(x-1)^6$ và $C_6^1 x^2 (x-1)^5$.

Hệ số của x^2 trong khai triển $C_6^0(x-1)^6$ là: $C_6^0 . C_6^2$.

Hệ số của x^2 trong khai triển $C_6^1 x^2 (x-1)^5$ là: $-C_6^1 . C_5^0$.

Vì vậy, hệ số của x^2 trong khai triển P thành đa thức là: $C_6^0 . C_6^2 - C_6^1 . C_5^0 = 9.$

Câu 5.

* Tính tanα:

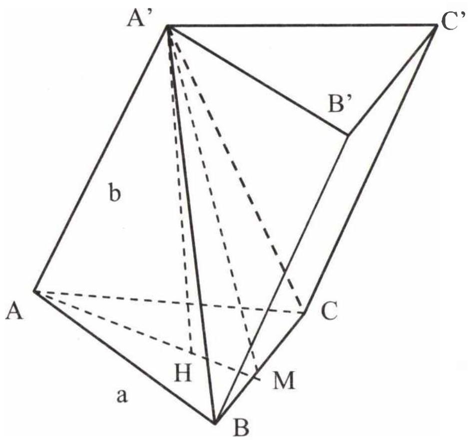
+ Gọi H là tâm tam giác đều ABC. Do A'.ABC là hình chóp tam giác đều nên hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) trùng với H.

+ Gọi M là giao điểm của AH với BC thì AM$\perp$BC.

Mặt khác: A'B = A'C = A'A = b $\Rightarrow A'M \perp BC$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'BC) là: $\alpha = \widehat{AMA'}$

ΔA'HM vuông tại H (vì A'H$\perp$(ABC))



$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{AMA'} = \dfrac{A'H}{MH}$

ΔABC đều có cạnh a nên

$AM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ A'H

$= \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}}$

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{A'H}{MH} = \sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}} : \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$

* Tính thể tích V của khối chóp A'BB'C'C:

$V = V_{A'B'C'ABC} - V_{A'.ABC} = S_{ABC}.A'H - \dfrac{1}{3}S_{ABC}.A'H$

$= \dfrac{2}{3}S_{ABC}.A'H = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right).\sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}}$

$V = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$ (đvtt)

Câu 6. Ta có trọng tâm G của tam giác thuộc Δ nên G(t;3t-8).

AB qua A(2;-3) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1;1)$

nên AB: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x - y - 5 = 0$.

Gọi M là trung điểm của AB: $M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{5}{2} - t; -\frac{5}{2} - 3t + 8\right) = \left(\frac{5}{2} - t; \frac{11}{2} - 3t\right)$.

Giả sử $C(x_0; y_0)$, theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - t = -2\left(\frac{5}{2} - t\right) \\ y_0 - 3t + 8 = -2\left(\frac{11}{2} - 3t\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -5 + 3t \\ y_0 = 9t - 19 \end{cases} \Rightarrow C(3t-5; 9t-19) (1)$$

Ngoài ra ta còn có: AB=$\sqrt{2}$, $d(C,AB) = \frac{|(3t-5)-(9t-19)-5|}{\sqrt{2}} = \frac{|6t-9|}{\sqrt{2}}$.

Theo giả thiết:

$$S = \frac{1}{2}AB.d(C,AB) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|6t-9|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |9-6t| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow C(-2;-10)$;

Với $t = 2 \Rightarrow C = (1;-1)$.

Câu 7. Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), (ab \neq 0) \Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1$.

Do $K \in (P) \Leftrightarrow \frac{6}{a} - \frac{3}{b} = 1 \Leftrightarrow 6b - 3a = ab (*)$.

Mặt khác $OABC$ là tứ diện vuông tại A nên

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}|a|.|b|.2 = 3 \Leftrightarrow |ab| = 9 \quad (**)$$

Giải hệ phương trình $(*),(**)$:

$$\begin{cases} 6b-3a=ab \\ |ab|=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6b-3a=ab \\ ab=9 \end{cases} \\ \begin{cases} 6b-3a=ab \\ ab=-9 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2b-3 \\ 2b^2-3b-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2b+3 \\ 2b^2+3b+9=0 \text{ (vn)} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, b=3 \\ a=-6, b=-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:

$(P_1): 2x+2y+3z-6=0$; $(P_2): x+4y-3z+6=0$;

Câu 8. ĐK có nghiệm: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)>0, (*) \end{cases}$

Khi x > 1, (*) $\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow 1>\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2<2 \Rightarrow x\in\left(1;\sqrt{2}\right)$.

Khi x <-1, (*) $\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2-1}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}>1 \Leftrightarrow x^2>2 \Rightarrow x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)$.

Vậy đk có nghiệm là $x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$.

BPT $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)^2>3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2-1}-2\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x^2>3$

Đặt $t=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2=t^2+1; t>0$.

Ta có bpt: $\dfrac{t^2+1}{t^2}-2\dfrac{t^2+1}{t}+t^2+1>3$

$\Leftrightarrow t^2+\dfrac{1}{t^2}-2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)-1>0 \Leftrightarrow \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)-3>0 \Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}>3$ (vì t >0)

$$\Leftrightarrow t^2-3t+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x^2-1}<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>\dfrac{18+6\sqrt{5}}{4} \\ x^2<\dfrac{18-6\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|>\dfrac{1}{2}\sqrt{18+6\sqrt{5}} \\ |x|<\dfrac{1}{2}\sqrt{18-6\sqrt{5}}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là:

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{18-6\sqrt{5}};-1\right)\cup\left(1;\frac{1}{2}\sqrt{18-6\sqrt{5}}\right).$$

Câu 9. Ta có $\begin{cases} 3x-a\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+y+\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=a^2 \end{cases}$ (I)

Vì $\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$ nên hệ (I)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-a\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+\sqrt{y^2+1}=a^2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Điều kiện cần

Thấy rằng nếu có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm $(x_0, -y_0)$.

Bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_0 = 0$.

Thay $y_0 = 0$ vào (II) ta có $\begin{cases} 3x-a=1 \\ x+1=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

Điều kiện đủ

Với a = -1, hệ (II) trở thành $\begin{cases} 3x+\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+\sqrt{y^2+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0.$

Với $a = \dfrac{4}{3}$, hệ (II) trở thành $\begin{cases} 3x - \dfrac{4}{3}\sqrt{y^2+1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2+1} = \dfrac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = 0 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy tập hợp các giá trị của a tương thích với yêu cầu bài toán là:

$\left\{ a = -1; a = \dfrac{4}{3} \right\}$.

Đề số 17

Câu 1. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (C), xác định m để phương trình $x^3 - 3x + 2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2. Giải phương trình

a) $2^{4x+3} + 2^{5x+4} = 2^{9x+7} + 1$;

b) $8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x \sin 3x - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^2 \left|x^2 + 2x - 3\right| dx$;

b) Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $-5z^3 + 2z^2 - z = 0$.

Câu 4. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

Câu 5. Khối chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC); đáy là ΔABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD = a, cạnh SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt (SAD) góc β. Tính thể tích khối chóp.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết A(3;0), đường cao từ đỉnh B có phương trình x+y+1=0, trung tuyến từ đỉnh C có phương trình: 2x-y-2=0. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3). Viết phương trình m phẳng (P) qua O,C sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng khoảng cách từ B đến (P).

Câu 8. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}} > x - \dfrac{1}{2}$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$.

Giải

Câu 1. a) TXĐ : D=R

Ta có $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$;

Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.

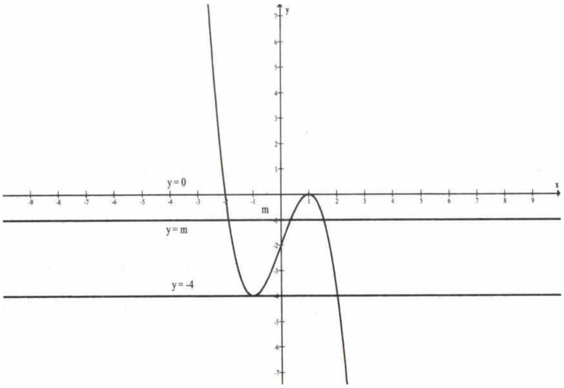
$y_{CĐ} = 0$ tại $x = 1$; $y_{CT} = -4$ tại $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		-4		0		$-\infty$

Đồ thị:



b) Do $x^3 - 3x + 2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x - 2 = m$ nên số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d): y = m.

Dựa vào đồ thị, ta suy ra được: Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Câu 2. Giải phương trình:

a) Viết lại phương trình dưới dạng: $2^{4x+3} + 2^{5x+4} = 2^{4x+3}.2^{5x+4} + 1$.

Đặt $\begin{cases} u = 2^{4x+3} \\ v = 2^{5x+4} \end{cases}, u, v > 0$

Khi đó phương trở thành: $u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1(tm) \\ v = 1(tm) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{4x+3} = 1 \\ 2^{5x+4} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3=0 \\ 5x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{4} \\ x = -\dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = -\dfrac{3}{4}$ và $x = -\dfrac{4}{5}$.

b) $8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x \sin 3x - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) + 6\sqrt{2}\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) = 1$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x\right) + 6\sqrt{2}\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 1$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\cos 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)-6\sqrt{2}\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\cos 2x\text{-}2\sqrt{2}\sin^2 2x\cos 2x-6\sqrt{2}\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos 2x\text{-}2\sqrt{2}\sin^2 2x\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos 2x\left(1\text{-}\sin^2 2x\right)=1 \Leftrightarrow \cos^3 2x=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi \quad (k\in Z).$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi, (k\in Z)$.

Câu 3. a) Vì

$f(x)=x^2+2x-3=0 \to x=1, x=-3 \Rightarrow f(x)>0 \forall x\in[1;2]; f(x)<0 \forall x\in[0;1]$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1\left(3-2x-x^2\right)dx+\int_1^2\left(x^2+2x-3\right)dx$$

$$=\left(3x-x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right)\Bigg|_1^2=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right]=5.$$

b) $-5z^3+2z^2-z=0$

$-5z^3+2z^2-z=0 \Leftrightarrow z(-5z^2+2z-1)=0 \Leftrightarrow z=0$

hoặc $-5z^2+2z-1=0$ (2)

Giải (2): $-5z^2+2z-1=0$

Ta có, $\Delta=2^2-4.(-5).(-1)=-16=(4i)^2$

Như vậy, phương trình (2) có 2 nghiệm: $z_{1,2}=\dfrac{-2\pm 4i}{-10}=\dfrac{1}{5}\mp\dfrac{2}{5}i.$

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$z_1=0$, $z_2=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$, $z_3=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i.$

Câu 4.

+ Loại 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách bầu loại 1.

+ Loại 2: bầu 4 người toàn nam.

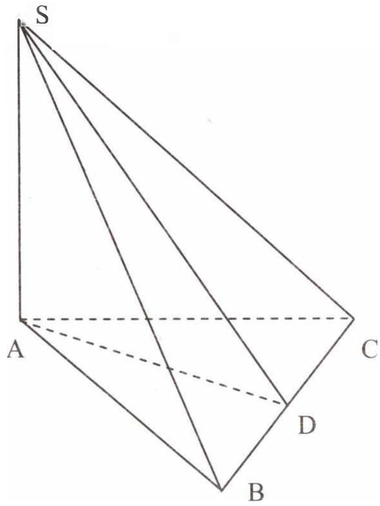
Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2.C_5^2$ cách bầu loại 2.

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2 - A_7^2.C_5^2 = 5520$ cách.

Câu 5.



+ SA ⊥ (ABCD) nên AB là hình chiếu SB trên (ABC) $\Rightarrow \widehat{ABS} = \alpha = (SB,(ABC))$

+ BC ⊥ AD và BC ⊥ SA ⇒ BC ⊥ (SAD) nên SD là hình chiếu của SB trên (SAD) $\Rightarrow \widehat{BSD} = \beta = (SB,(SAD))$.

+ ΔSAB, $\widehat{A} = 1v \Rightarrow AB = SB.\cos\alpha$;

+ ΔSDB, $\widehat{D} = 1v \Rightarrow BD = SB.\sin\beta$;

+ ΔADB, $\widehat{D} = 1v \Rightarrow AD^2 = AB^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow a^2 = SB^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta) \Rightarrow SB = \dfrac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

Vậy $BD = \dfrac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$;

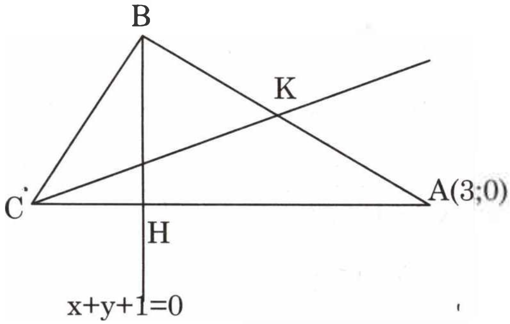
$SA = SB\sin\alpha = \dfrac{a.\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$;

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{AD.BC}{2}.SA=\frac{1}{3}.AD.BD.SA$$

$$=\frac{1}{3}a.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}=\frac{1}{3}.\frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}\text{ (đvtt).}$$

Câu 6. Đường thẳng d qua A(3;0) và vuông góc với BH cho nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$ do đó

d: $\begin{cases}x=3+t\\y=t\end{cases}$



Đường thẳng d cắt (CK) tại C:

$\begin{cases}x=3+t\\y=t\\2x-y-2=0\end{cases}$

$\rightarrow t=-4\Leftrightarrow C(-1;-4)$.

Vì K thuộc CK: K(t;2t-2) và K là trung điểm của AB cho nên B đối xứng với A qua K suy ra B(2t-3;4t-4).

Mặt khác K lại thuộc BH cho nên : (2t-3)+(4t-4)+1=0 suy ra t=1 và tạo độ B(-1;0).

Gọi (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0\left(a^2+b^2-c=R^2>0\right)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Cho (C) qua lần lượt A, B, C ta được hệ : $\begin{cases}9-6a+c=0\\1+2a+c=0\\17+2a+8b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-3\end{cases}$

Vậy (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

Câu 7. $(P): ax+by+cz+d=0$, $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$

$\begin{cases}O(0;0;0)\in(P)\\C(0;0;3)\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\3c+d=0\end{cases}\Rightarrow c=d=0.$

Vậy $(P): ax+by=0$

$$d\left(A,(P)\right)=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\quad d\left(B,(P)\right)=\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Mà $d\left(A,(P)\right)= d\left(B,(P)\right)\Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow |a|=2|b|\Leftrightarrow a=\pm 2b.$

+ $a=2b$ chọn $a=2,b=1$ khi đó ta có mp (P): 2x + y = 0.

+ $a=-2b$ chọn $a=2,b=-1$ khi đó ta có mp (P): 2x - y = 0.

Câu 8. ĐK: $x\in[-1;3]\backslash\{1\}$, ta có:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}>x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x})}{2(x-1)}>x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}>x-\frac{1}{2}(*)$$

+ $1<x\le 3$ (I),

$(*)\Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}>2x^2-3x+1$

$\Leftrightarrow 2(-x^2+2x+3)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6>0.$

Đặt t = $\sqrt{-x^2+2x+3}\ge 0$

Giải BPT tìm được $t>\frac{3}{2}$, từ đó tìm được $x\in(\frac{2-\sqrt{7}}{2};\frac{2+\sqrt{7}}{2})$.

Kết hợp điều kiện (I) ta được $x\in(1;\frac{2+\sqrt{7}}{2})$

+ $-1\le x<1$ (II),

$(*)\Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}<2x^2-3x+1$

$\Leftrightarrow 2(-x^2+2x+3)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6<0.$

Đặt t = $\sqrt{-x^2+2x+3}\ge 0$, giải BPT tìm được $0\le t<\frac{3}{2}$, từ đó tìm được

$x\in[-1;\frac{2-\sqrt{7}}{2})\cup(\frac{2+\sqrt{7}}{2};3]$.

Kết hợp điều kiện (II) ta được $x \in [-1; \frac{2-\sqrt{7}}{2})$.

Kết luận tập nghiệm của BPT đã cho: $T = [-1; \frac{2-\sqrt{7}}{2}) \cup (1; \frac{2+\sqrt{7}}{2})$.

Câu 9. Hàm số có TXĐ: $D = [-1;1]$

Với mọi $x \in D$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{1-x}.\sqrt[4]{1+x} \le \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2} \qquad (1)$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1-x}.1 \le \frac{\sqrt{1-x}+1}{2} \qquad (2)$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1+x}.1 \le \frac{\sqrt{1+x}+1}{2} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta có $f(x) \le 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ (4) với mọi $x \in D$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi dấu " = " ở (1), (2) và (3) cùng xảy ra.

Mà dấu " = " ở (1), (2) và (3) xảy ra khi và chỉ khi x = 0.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, với mọi $x \in D$, ta có:

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x}.1 \le \frac{1-x+1}{2} \qquad (5)$$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+x}.1 \le \frac{1+x+1}{2} \qquad (6)$$

Suy ra, $f(x) \le 1+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1} \le 1+\frac{2-x}{2}+\frac{2+x}{2} = 3$ (7)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi dấu " = " trong (5) và (6) xảy ra. Dấu " = " trong (5) và (6) xảy ra khi và chỉ khi x = 0.

Từ (4) và (7 suy ra, $f(x) \le 3$ với mọi $x \in D$ mà f(0) = 3 và $0 \in D$ nên $\max\limits_{x \in D} f(x) = 3$.

Đề số 18

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (C) hãy tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $5^{\log_{\frac{1}{2}} \log_2\left(3^{2\log_3 x} - 3x + \log_3 9\right)} < 1$.

b) Giải phương trình $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$;

b) Cho $z = (1 - 2i)(2 + i)^2$. Tính môđun của số phức $\overline{z}$.

Câu 4. Tìm hệ số x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ biết tổng các hệ số khai triển bằng 1024.

Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền $AB = \sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn, góc giữa mặt phẳng (A_1AC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Hãy tính thể tích của khối lăng trụ.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành ABCD có C(3; -1), đường thẳng chứa BD và đường thẳng chứa đường phân giác của góc DAC lần lượt có phương trình là: x – 2y – 1 = 0 và x – 1 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Câu 7. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là $d_1:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$, $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$, d là đường thẳng đi qua I(2;2;-1) cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Câu 8. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Câu 9. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}.$$

Giải

Câu 1. a) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y'=32x^3-18x=2x\left(16x^2-9\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\frac{3}{4}. \end{array}\right.$

HS đồng biến trên $(-\frac{3}{4};0)$ và $(\frac{3}{4};+\infty)$.

HS nghịch biến trên $(-\infty;-\frac{3}{4})$ và $(0;\frac{3}{4})$.

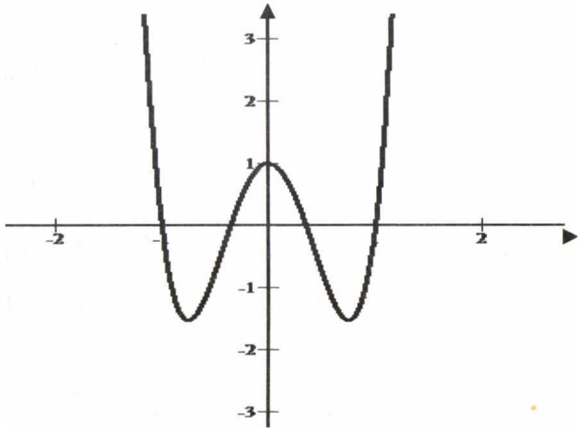
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(8x^4-9x^2+1\right)=+\infty;$

$y_{CĐ}=y(0)=1;$ $\qquad y_{CT}=y(\pm\frac{3}{4})=-\frac{49}{32}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{49}{32}$	↗	1	↘	$-\frac{49}{32}$	↗	$+\infty$

Đồ thị



b) Xét phương trình

$8cos^4 x - 9cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$ (1)

Đặt $t = cosx$, phương trình (1) trở thành:

$$8t^4 - 9t^2 + m = 0 \quad (2)$$

Vì $x \in [0;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)

Gọi (C_1): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1;1]$ và (d): y = 1 – m.

Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (d).

Đồ thị (C_1) là 1 phần của đồ thị (C) trong miền $-1 \le t \le 1$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$-\frac{49}{32} \le m - 1 \le 1 \Leftrightarrow -\frac{17}{32} \le m \le 2.$$

Câu 2. a) ĐK $x > 0$. Khi đó ta có

$$-\log_2 \log_2\left(3^{2\log_3 x} - 3x + \log_3 9\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3^{2\log_3 x} - 3x + \log_3 9\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{2\log_3 x} - 3x + \log_3 9 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Vậy BPT có nghiệm là $x > 3$.

b) Điều kiện: $\sin x \neq 0$.

Khi đó phương trình là:

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin^2 x}+2\sqrt{2}\sin^2 x-3=(2+3\sqrt{2})\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{2}\sin^4 x-3\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3+\left(1-\cos^2 x\right)\left[2\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)-3\right]=(2+3\sqrt{2})\cos x\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x; |t|\le 1 \\ 2\sqrt{2}t^4+\left(2+3\sqrt{2}\right)t^3+\left(3-4\sqrt{2}\right)t^2-\left(2+3\sqrt{2}\right)t+2\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x, |t|\le 1 \\ 2\sqrt{2}\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)+\left(2+3\sqrt{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{t}\right)+3-4\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=t-\dfrac{1}{t} \\ 2\sqrt{2}\left(u^2+2\right)+\left(2+3\sqrt{2}\right)u+3-4\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=t-\dfrac{1}{t} \\ 2\sqrt{2}u^2+\left(2+3\sqrt{2}\right)u+3=0. \end{cases}$$

Ta có: $\Delta=\left(2+3\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}.3=\left(3\sqrt{2}-2\right)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=\dfrac{-2-3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2} \\ u_2=\dfrac{-2-3\sqrt{2}-2+3\sqrt{2}}{2}=-2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-\dfrac{1}{t}=-3\sqrt{2} \\ t-\dfrac{1}{t}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2+3\sqrt{2}t-1=0 \\ t^2+2t-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}}{2}<-1 \text{ (loại) và } t=\dfrac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2} \\ t=-1-\sqrt{2}<-1 \text{ (loại) và } t=\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \cos x=\dfrac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2}=\cos\alpha \\ \cos x=\sqrt{2}-1=\cos\beta \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\alpha+k2\pi \\ x=\pm\beta+k2\pi \end{array}\right., \left(k\in Z, \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2}, \cos\beta=\sqrt{2}-1\right).$$

Câu 3.

a) $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx=\int\limits_0^{\pi}|\cos x-\sin x|\,dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right]=2\sqrt{2}.$$

b) $z=(1-2i)(2+i)^2=(1-2i)(4+4i+i^2)$

$=(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2=11-2i$

$\Rightarrow \overline{z}=11+2i\Rightarrow |\overline{z}|=\sqrt{11^2+2^2}=5\sqrt{5}.$

Vậy $|\overline{z}|=5\sqrt{5}$.

Câu 4. Ta có:

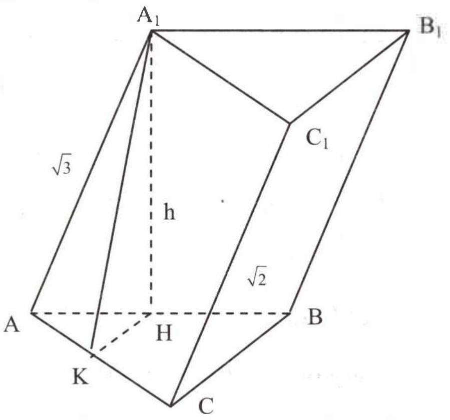
$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=1024 \Leftrightarrow (1+1)^n=1024 \Leftrightarrow 2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$

$\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\sum\limits_{k=o}^{10}C_{10}^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-k}.\left(x^3\right)^k$; ....

Hạng tử chứa x^6 ứng với k = 4 và hệ số cần tìm bằng 210 .

Câu 5. $(A_1AB) \perp (ABC)$. Từ A_1 dựng A_1H vuông góc AB tại H thì $A_1H \perp (ABC) \Rightarrow A_1H$ là chiều cao lăng trụ. Đặt $A_1H = h$.

Dựng $HK \perp AC$ tại K (HK // BC). ΔAKH cũng vuông cân tại K



$\Rightarrow AH = HK.\sqrt{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$\Delta A_1HA,\ \widehat{H} = 1v \Rightarrow A_1H^2 + HA^2 = A_1A^2$

$\Leftrightarrow h^2 + \dfrac{2h^2}{3} = 3 \Leftrightarrow 5h^2 = 9 \Leftrightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

$V = S_{ABC}.A_1H = \dfrac{1}{2}CA.CB.h$

$= \dfrac{1}{2}CA^2.\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3CA^2}{2\sqrt{5}}$.

ΔACB có: $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AC^2 = 2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 1$. Vậy V = $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (đvdt).

Câu 6. Gọi C' là điểm đối xứng với C qua đường phân giác của góc $DAC \Rightarrow C'(-1;-1)$.

Gọi A(1; a), khi đó tâm hình bình hành $I\left(2;\dfrac{a-1}{2}\right)$ là trung điểm của AC và thuộc BD nên: $2 - 2(\dfrac{a-1}{2}) - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Khi đó A(1; 2), I$\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Phương trình AC': 3x – 2y + 1 = 0.

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Ta được D(-1; -1) $\Rightarrow$ B(5; 2).

Vậy: A(1; 2), B(5; 2), D(-1; -1).

Câu 7.

d cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B =>A(1+t;3-t;t), B(3+b;1+b;-2+b) mà d đi qua I nên A, B, I thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = k(b+1) \\ 1-t = k(b-1) \\ t+1 = k(b+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-kb-k=1 \\ -t-kb+k=-1 \\ t-kb-3k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ k=1 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow A(3;1;2), B(3;1;-2).$$

Gọi C là trung điểm AB=>C(3;1;0), BC=2.

Mặt cầu đường kính AB có tâm C, bán kính R=BC có phương trình là

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$.

Câu 8. Để phương trình có nghiệm thì:

$$\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2+5} = 3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}.$$

Ta nhận thấy: x=2 là nghiệm của phương trình, như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $(x-2)A(x)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm, tách các số hạng như sau:

$$\sqrt{x^2+12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2+5} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Dễ dàng chứng minh được: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < 0, \forall x > \dfrac{5}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình là x=2.

Câu 9. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$a^3+a^3+1\geq 3a^2; b^3+b^3+1\geq 3b^2; c^3+c^3+1\geq 3c^2$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq a^2+b^2+c^2-1.$$

Nên $P\geq a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}-1$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca-3}{a^2+b^2+c^2+3}$$

$$=\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6}.$$

Ta thấy $9=(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$,

vì thế nếu $t=a^2+b^2+c^2$ thì $t\in[3;9)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+3t+3}{2t+6}$ với $t\in[3;9)$.

Ta có $f'(t)>0\forall t\in[3;9)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến với mọi $t\in[3;9)$ và $P\geq f(t)\geq f(3)=\dfrac{5}{2}$.

Có $P=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$ nên GTNN của P là $\dfrac{5}{2}$.

Đề số 19

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m:

$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$.

Câu 2. Giải phương trình

a) $\log_2(x-5) + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+2} = 3$;

b) $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4} dx$;

b) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = 4\sqrt{2}$ và $\left|\frac{z+1}{\overline{z} + i}\right| = 1$.

Câu 4. Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách.

Câu 5. Cho tứ diện ABCD có DA = 5a và DA vuông góc với mp(ABC). Tam giác ABC vuông tại B và AB = 3a, BC = 4a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua các đỉnh của tứ diện. Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm M (2; 1) và đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua M cắt Δ ở 2 điểm A, B phân biệt sao cho ΔMAB vuông tại M và có diện tích bằng 2.

Câu 7. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(13; -1; 0)$, $B(2; 1; -2)$, $C(1; 2; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với BC và tiếp xúc mặt cầu (S).

Câu 8. Giải pt: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Câu 9. Cho ba số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2a + b + \sqrt{8bc}} - \frac{8}{\sqrt{2b^2 + 2(a+c)^2 + 3}}.$$

Giải

Câu 1.

a) TXĐ: D=R.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$

$y_{CĐ} = 5$ tại $x = -2$; $y_{CT} = 1$ tại $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

+) BBT:

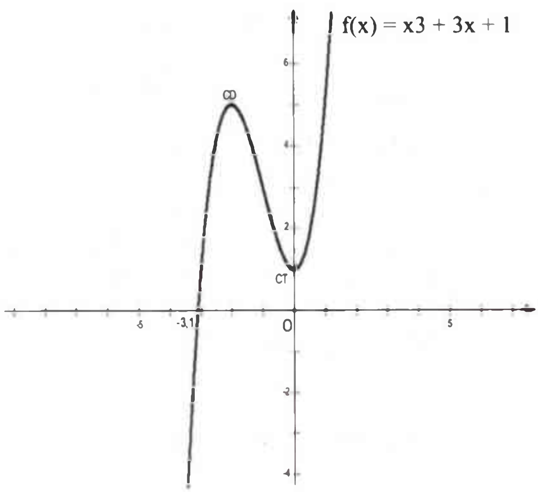
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

+) Đồ thị: Giao O*y* tại (0; 1)

b) Biện luận số nghiệm của PT:

$x^3+3x^2+1 = \dfrac{m}{2}$ (1)

Số nghiệm của pt (1) là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = \dfrac{m}{2}$; nên ta có:



+ Nếu $\dfrac{m}{2} > 5$ hoặc $\dfrac{m}{2} < 1$. Hay m > 10 hoặc m < 2 thì PT (1) có nghiệm duy nhất.

+ Nếu m = 10 hoặc m = 2 thì PT (1) có 2 nghiệm.

+ Nếu 2<m<10 thì pt (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2.

a) $\log_2(x-5)+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+2}=3$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases}x-5>0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>5\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow x>5.$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow \log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=8$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\x=-3\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=6$.

b) $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\cos^3 4x+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 3x4\cos^3 x-\sin 3x4\sin^3 x=4\cos^3 4x+1$

$\Leftrightarrow \cos 3x(\cos 3x+3\cos x)-\sin 3x(3\sin x-\sin 3x)=4\cos^3 4x+1$

$\Leftrightarrow (\cos^2 3x+\sin^2 3x)+3(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x)=4\cos^3 4x+1$

$\Leftrightarrow 1+3\cos 4x=4\cos^3 4x+1 \Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 4x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\2(1+\cos 8x)=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\\cos 8x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\8x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\x=\pm\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right. \quad (k\in Z).$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$; $x=\pm\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}$.

Câu 3. a) Phân tích: $f(x)=\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=x+2+\frac{1}{x^2+4}$.

Vậy $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+J=6+J(1)$

Tính $J=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$.

Đặt: $x=2\tan t\Rightarrow dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt$;

$x=0\to t=0, x=2\to t=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^2 t.4\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$.

Thay vào (1): $I=6+\frac{\pi}{8}$.

b) Giả sử $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Ta có

$|z-3+3i|=4\sqrt{2}\Leftrightarrow|a+bi-3+3i|=4\sqrt{2}\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+3)^2=32$ (1)

Và $\left|\frac{z+1}{\overline{z}+i}\right|=1\Leftrightarrow|z+1|=|\overline{z}+i|\Leftrightarrow(a+1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\Leftrightarrow a=-b$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được $(b+3)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=-7\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=7.\end{array}\right.$

Vậy $z=-1+i$ hoặc $z=7-7i$.

Câu 4. Xét 3 loại ghế gồm 1 ghế có 3 chỗ, 1 ghế có 2 chỗ và 2 ghế có 1 chỗ ngồi.

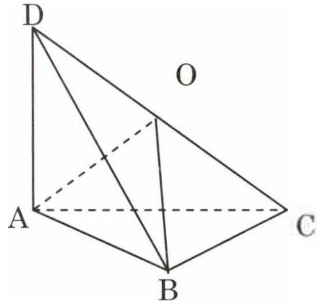
Bước 1: do 2 ghế có 1 chỗ không phân biệt nên chọn 2 trong 4 vị trí để sắp ghế 2 và 3 chỗ ngồi có $A_4^2=12$ cách.

Bước 2: sắp 3 nam vào ghế 3 chỗ có 3! = 6 cách.

Bước 3: sắp 2 nữ vào ghế 2 chỗ có 2! = 2 cách.

Vậy có 12.6.2 = 144 cách sắp.

Câu 5.



Gọi O là trung điểm DC.

Do DA ⊥ (ABC) nên DA ⊥ AB, DA ⊥ AC

$\Rightarrow \Delta$ DAC vuông tại A

$\Rightarrow OA = OC = OD = \dfrac{CD}{2}$ (1)

Ta có: BC ⊥ BA, BC ⊥ DA

$\Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD \Rightarrow OB = \dfrac{CD}{2}$ (2)

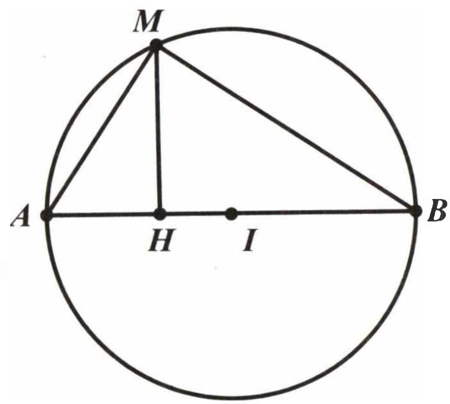
Từ (1 và (2) suy ra: A, B, C, D thuộc mặt cầu tâm O, bán kính $r = \dfrac{CD}{2}$.

$$r = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi r^2 = 50\pi a^2$.

Thể tích của khối cầu tương ứng: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{125a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. Đường tròn (C) tâm I(a, b) bán kính R có phương trình:



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

ΔMAB vuông tại M nên AB là đường kính suy ra Δ qua I do đó:

a - b + 1 = 0 (1)

Hạ MH ⊥ AB có

$$MH = d_{(M,\Delta)} = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}MH.AB \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}.2R.\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

Vì đường tròn qua M nên $(2-a)^2 + (1-b)^2 = 2$ (2)

Ta có hệ $\begin{cases} a-b+1=0 & (1) \\ (2-a)^2+(1-b)^2=2 & (2) \end{cases}$

Giải hệ được a = 1; b = 2.

Vậy (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

Câu 7. (S) có tâm I(1; 2; 3) và bán kính R = 9.

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$, $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$

(P) // BC nên

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}=(-1;1;4) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow A=B+4C \Rightarrow \vec{n}=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua A(13; –1; 0) ⇒ phương trình

(P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d[I,(P)]=R \Leftrightarrow \dfrac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C=0 \Leftrightarrow (B+2C)(B-4C)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B+2C=0 \\ B-4C=0 \end{array}\right.$

Với B + 2C = 0 chọn $\begin{cases} B=2 \\ C=-1 \end{cases}$, ta được phương trình (P): –2x + 2y – z + 28 = 0.

Với B – 4C = 0 chọn $\begin{cases} B=4 \\ C=1 \end{cases}$, ta được phương trình (P): 8x + 4y + z –100 = 0.

Cả hai mặt phẳng (P) tìm được ở trên đều thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8.

ĐK: $x \in [-1;1]$. PT đã cho $\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-x\sqrt{1-x^2}\right)=x\sqrt{1-x^2}.\sqrt{2}$

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta có pt: $t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)=\dfrac{t^2-1}{2}.\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}.t^2-3t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=-\sqrt{2}+1 \\ t=-\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$$

Với $t=\sqrt{2}$

$\Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-x$

$\Leftrightarrow 1-x^2=\left(\sqrt{2}-x\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x\sqrt{2}+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn)

Với $t=-\sqrt{2}+1$

$\Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}+1-x \geq 0 \\ 1-x^2=\left(-\sqrt{2}+1-x\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1-\sqrt{2} \\ x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1-\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1-\sqrt{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{(thỏa mãn)}$$

Với $t=-\sqrt{2}-1 \Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}-1$, vô nghiêm vì

$x \geq -1 \Rightarrow x+\sqrt{1-x^2} \geq -1$.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2}$.

Câu 9. Áp dụng BĐT Côsi cho hai số b và 2c ta có: $\sqrt{8bc} \leq b+2c$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}} \geq \frac{1}{2(a+b+c)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi b = 2c.

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có:

$$(a+c+b)^2 \le (1+1)\left[(a+c)^2+b^2\right] \Rightarrow a+b+c \le \sqrt{2(a+c)^2+2b^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi a + c = b.

$$\Rightarrow \frac{8}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3} \le \frac{8}{a+b+c+3}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{2(a+b+c)} - \frac{8}{a+b+c+3}$$

Đặt $t = a+b+c,\ \ t>0$ thì $P \ge \frac{1}{2t} - \frac{8}{t+3}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2t} - \frac{8}{t+3}$ với $t>0$

Có $f'(t) = -\frac{1}{2t^2} + \frac{8}{(t+3)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \text{(thỏa mãn)} \\ t=-\frac{3}{5} & \text{(loại)} \end{array}\right.$

BBT:

t	0		1		+∞
$f'(t)$	‖	-	0	+	
$f(t)$	‖ +∞	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	0

Vậy $\min P = -\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} t = a+b+c = 1 \\ b = 2c \\ a+c = b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Đề số 20

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$ (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

b) Tìm m để (C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Câu 2. a) Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{x} > 2\log_4 8$;

b) Giải phương trình

$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$.

Câu 3. a) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x dx$;

b) Tính môđun của số phức z biết $\frac{5\overline{z}}{1-2i} + (1+2z)i = 1+3i$.

Câu 4. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có 1 tấm mang số chia hết cho 10.

Câu 5. Khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA $\perp (ABC)$, SC = a. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất.

Câu 6. Cho Elip (E): $x^2 + 9y^2 = 9$ và điểm M(a;b) thuộc (E). Chứng minh rằng đường thẳng (d): ax +9by=9 tiếp xúc với (E). Tìm tọa độ điểm M sao cho (d) tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng: $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ và $(d_2): \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ các điểm M thuộc (d_1) và N thuộc (d_2) sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 2010 = 0$ và độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{2}$.

Câu 8. Giải bất phương trình: $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

Câu 9. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x}+\frac{\sqrt{z+x}}{y}+\frac{\sqrt{x+y}}{z} \geq \frac{4(x+y+z)}{\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}}, \forall x,y,z>0.$$

Giải

Câu 1.

a) Với m = 2 ta có $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 6x = 2x\left(2x^2-3\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên $(-\frac{\sqrt{6}}{2};0)$ và $(\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{2})$ và $(0;\frac{\sqrt{6}}{2})$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4-3x^2+2\right) = +\infty$;

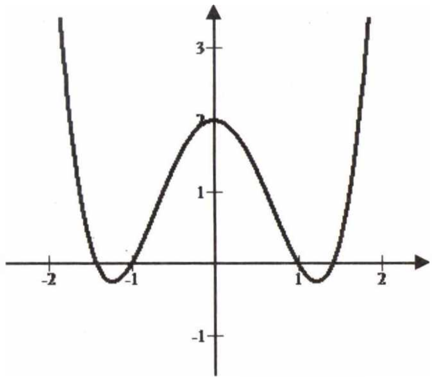
$y_{CĐ} = y(0) = 2$; $\qquad y_{CT} = y(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

b) Xét phương trình $x^4-(m+1)x^2+m=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2-m=0. \end{array}\right.$



Để đồ thị cắt ox tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $x^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Leftrightarrow 0<m\neq 1$.

Khi m>1 để 3 đoạn bằng nhau thì $\sqrt{m}-1=1-(-1) \Leftrightarrow m=9.$

Khi 0<m<1 để 3 đoạn bằng nhau thì $1-\sqrt{m}=\sqrt{m}-(-\sqrt{m}) \Leftrightarrow m=\frac{1}{9}.$

KL: $m=\frac{1}{9}$ hoặc $m=9$.

Câu 2.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{16}\right)^{x}>2\log_4 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}>3$

$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}>3.$

Đặt $t=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}>0$ ta có bpt $t^2-4t+3<0$

$\Leftrightarrow 1<t<3 \Leftrightarrow 1<\left(\frac{1}{4}\right)^{x}<3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} 3<x<0.$

b) $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$

$\Leftrightarrow \cos x-\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^3 x-\sin^3 x+\cos^4 x-\sin^4 x=0$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1+\cos x+\sin x+1+\sin x\cos x+\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x-\sin x=0 \\ 2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+2=0. \end{array}\right.$

+) $\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \text{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

+) $2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+2=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Ta có $2t+\frac{t^2-1}{2}+2=0 \Leftrightarrow t^2+4t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2-\sqrt{7} \quad \text{(loại)} \\ t=-2+\sqrt{7}. \end{array}\right.$

Với $t=-2+\sqrt{7}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2+\sqrt{7} \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy PT có 3 nghiệm.

Câu 3. a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos 2x dx$

Tính: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\right).$

Tính: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)d(\sin 2x)$

$$=\frac{2x-1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=0+\frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1\right).$

b) Ta có $\dfrac{5\bar{z}}{1-2i}+(1+2z)i=1+3i$ (1).

Giả sử $z=a+bi; a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{z}=a-bi$.

$(1)\Leftrightarrow(1+2i)\bar{z}+(1+2z)i=1+3i\Leftrightarrow(1+2i)(a-bi)+(1+2(a+bi))i=1+3i$

$\Leftrightarrow a-bi+2ai+2b+(1+2a)i-2b=1+3i\Leftrightarrow a+(1+4a-b)i=1+3i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1+4a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2.\end{cases}$$

Vậy $z=1+2i\Rightarrow|z|=\sqrt{5}$.

Câu 4. Gọi A là biến cố lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ có: C_{30}^{10} cách chọn.

Ta phải chọn:

5 tấm thẻ mang số lẻ trong 15 tấm mang số lẻ.

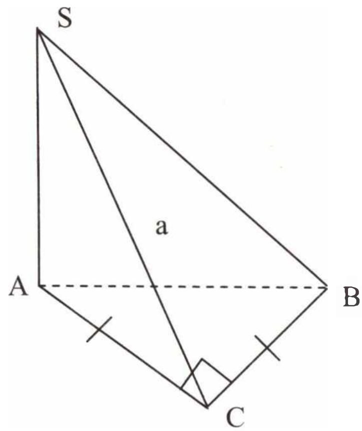
1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 trong 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

4 tấm thẻ mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10 trong 12 tấm như vậy.

theo quy tắc nhân, số cách chọn thuận lợi để xảy ra biến cố A là: $C_{15}^5C_{12}^4C_3^1$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{C_{15}^5C_{12}^4C_3^1}{C_{30}^{10}}=\dfrac{99}{667}$.

Câu 5.



+ gt: $SA\perp(ABC)\,\&\,AC\perp CB\Rightarrow SC\perp CB$

+ Gọi $\alpha=((SCB),(ABC))$

$\Rightarrow\alpha=\widehat{SCA}\quad(0^0<\alpha<90^0)$

+ ΔSAC, $\hat{A}=90^0$

$$\Rightarrow\begin{cases}SA=SC.\sin\widehat{SCA}=a\sin\alpha\\AC=SC.\cos\widehat{SCA}=a\cos\alpha\end{cases}$$

$+ V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AC^2.SA = \frac{1}{6}a^2\cos^2\alpha.a\sin\alpha;$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}a^3\cos^2\alpha.\sin\alpha.$

+ Xét hàm số: $f(\alpha) = \cos^2\alpha.\sin\alpha, \quad 0^0 < \alpha < 90^0$

$$f'(\alpha) = -2\cos\alpha.\sin^2\alpha + \cos^3\alpha = -2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) + \cos^3\alpha$$

$$= 3\cos^3\alpha - 2\cos\alpha = \cos\alpha\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \sqrt{2}\right)$$

Vì: $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \sqrt{2}\right) > 0$

Do đó: $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta; \left(\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}; 0^0 < \beta < 90^0\right)$$

Lập bảng biến thiên hàm số f(α) trên khoảng $\left(0^0; 90^0\right)$:

α	0^0		β		90^0
f'(α)	||	+	0	-	||
f(α)	||0	$\nearrow$	f_{max}	$\searrow$	0||

Ta có f(α) lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vậy thể tích S.ABC lớn nhất $\Leftrightarrow$ f(α) lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 6. Ta có

$$x^2 + 9y^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3} \\ y = -\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow M(a;b) \in (E) \Leftrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{9-a^2}}{3}$$

Xét: $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\Rightarrow y'(a)=-\frac{a}{3\sqrt{9-a^2}}$

$$\Rightarrow (d): y=-\frac{a}{3\sqrt{9-a^2}}(x-a)+\frac{\sqrt{9-a^2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow (d): 3\sqrt{9-a^2}\,y=-ax+a^2+9-a^2 \Leftrightarrow (d): ax+9by=9$$

Tương tự với $y=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$.

Tiếp tuyến với (E) tại M(a;b) là $ax+9by=9$

Vậy (d): $ax+9by=9$ là tiếp tuyến của (E) tại M(a;b).

(d) cắt Ox tại $A\left(\frac{9}{a};0\right)$; (d) cắt Oy tại $B\left(0;\frac{1}{b}\right)$ => $OA=\frac{9}{|a|};OB=\frac{1}{|b|}$.

Diện tích tam giác OAB: $dt(OAB)=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{9}{2|ab|}$.

Theo BĐT Côsi: $a^2+9b^2\geq 2.3|a||b|$

$$M(a;b)\in(E)\Rightarrow 9\geq 6|a||b|\Rightarrow \frac{9}{2|ab|}\geq 3\Rightarrow dtOAB\geq 3$$

Min(dtOAB) = 3 khi $\begin{cases}a^2=9b^2\\ a^2+9b^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{9}{2}\\ b^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\\ b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow M\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Có 4 điểm thỏa mãn bài toán: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 7.

+ $M,N\in(d_1),(d_2)$ nên ta giả sử $M(t_1;t_1;2t_1)$, $N(-1-2t_2;t_2;1+t_2)$

$$\Rightarrow \overline{NM}=(t_1+2t_2+1;t_1-t_2;2t_1-t_2-1).$$

+ MN song song mp(P) nên: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{NM} = 0$

$\Leftrightarrow 1.(t_1 + 2t_2 + 1) - 1.(t_1 - t_2) + 1(2t_1 - t_2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t_2 = -t_1 \Rightarrow \overrightarrow{NM} = (-t_1 + 1; 2t_1; 3t_1 - 1).$

+ Ta có:

$$MN = \sqrt{2} \Leftrightarrow (-t_1 + 1)^2 + (2t_1)^2 + (3t_1 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 7t_1^2 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_1 = \dfrac{4}{7}. \end{array}\right.$$

+ Suy ra: $M(0; 0; 0)$, $N(-1; 0; 1)$ hoặc $M(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{8}{7})$, $N(\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{3}{7})$.

+ Kiểm tra lại thấy cả hai trường hợp trên không có trường hợp nào $M \in (P)$.

KL: Vậy có hai cặp M, N như trên thoả mãn.

Câu 8. Điều kiện $x \geq -\dfrac{3}{2}$. Ta có: $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1 - \sqrt{3+2x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)4(x+1)^2}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 1 < \dfrac{2x+10}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2 < 2x+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x + 4 + 2\sqrt{3+2x} < 2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$S = \left[-\dfrac{3}{2}; 3\right) \backslash \{-1\}.$

Câu 9. BĐT $\Leftrightarrow$

$$P=(y+z)\sqrt{\frac{(z+x)(x+y)}{x^2}}+(z+x)\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)}{y^2}}+(x+y)\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)}{z^2}}$$

$\geq 4(x+y+z)$.

Có: $\dfrac{(z+x)(x+y)}{x^2}=\dfrac{x^2+x(y+z)+yz}{x^2}\geq\dfrac{x^2+2x\sqrt{yz}+yz}{x^2}=\left(\dfrac{x+\sqrt{yz}}{x}\right)^2$

$$\Rightarrow (y+z)\sqrt{\frac{(z+x)(x+y)}{x^2}}\geq (y+z)\left(1+\frac{\sqrt{yz}}{x}\right)=y+z+(y+z)\frac{\sqrt{yz}}{x}\geq y+z+2\frac{yz}{x}\ (1)$$

Chứng minh tương tự có: $\begin{cases}(z+x)\sqrt{\dfrac{(x+y)(y+z)}{y^2}}\geq z+x+2\dfrac{zx}{y}\ (2)\\ (x+y)\sqrt{\dfrac{(y+z)(z+x)}{z^2}}\geq x+y+2\dfrac{xy}{z}\ (3)\end{cases}$

Từ (1), (2), (3) có: $P\geq 2(x+y+z)+2\left(\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\right)$ (4)

Áp dụng BĐT: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, có:

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\geq\sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}}=x+y+z\quad(5)$$

Từ (4), (5) $\Rightarrow P\geq 4(x+y+z)$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$.

Đề số 21

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (m là tham số) (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 2.

b) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Câu 2. Giải phương trình

a) $(x+4)9^x-(x+5)3^x+1=0$;

b) $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x+\cos x\right)\cos x dx$;

b) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$. Tìm phần thực, phần ảo và tính môđun của số phức z.

Câu 4. Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C. Chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

Câu 5. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông ABCD cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng (ABCD) tạo với đáy hình trụ góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(1;0), B(-2;4)$, $C(-1;4), D(3;5)$ và đường thẳng (d): $3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích của khối tứ diện AMNP.

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}12x+3y-4\sqrt{xy}=16\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}=6\end{cases}$

Câu 9. Cho các số thực x, y phân biệt thỏa mãn $(x-2)^2+(y+2)^2-2xy\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^3-y^3-(x-y)(7+3xy)+\dfrac{4}{x-y}+4xy$.

Giải

Câu 1.

a) Khi m = 2 ta có $y = x^3 - 3x^2 + 4$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

– Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$;

nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

– Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 0$;

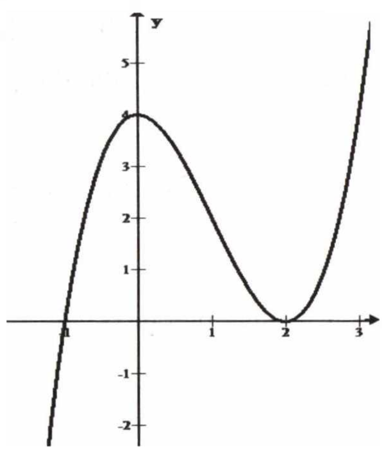
đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 4$

– Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			4				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Đồ thị



b) Ta có $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m.$

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ y'(1) = -5m + 7 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ \dfrac{5}{4} < m < \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$$

Câu 2. a) Đặt $t = 3^x$, điều kiện t > 0.

Ta có phương trình $(x+4)t^2 - (x+5)t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{x+4} \end{array}\right.$ (vì $x = -4$ không là nghiệm).

Với $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $t = \dfrac{1}{x+4} \Rightarrow 3^x = \dfrac{1}{x+4}$ (*)

Vế trái của (*) là một hàm đồng biến, vế phải của (*) là một hàm nghịch biến và khi $x = -1$ thì vế trái bằng vế phải. Do đó (*) có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 0$.

b) Điều kiện $x \neq k\pi$. Khi đó: $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$

$$\Leftrightarrow (2\sin x\text{-}1) + \left(\frac{\text{cosx}}{\sin x} - 4\sin x\text{cosx}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\text{sinx-}1) + \text{cosx}\left(\frac{1-4\sin^2 x}{\text{sinx}}\right) = 0 \Leftrightarrow (2\text{sinx-}1)\left[1 - \frac{\text{cosx}}{\text{sinx}}(1+2\sin x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\text{sinx-}1)\frac{\text{sinx-cosx-sin2x}}{\text{sinx}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \text{sinx - cosx - sin2x} = 0 \end{array}\right.$$

Với $\sin x = \frac{1}{2}$ thì $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Với sinx - cosx - sin2x = 0 thì đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); |t| \le \sqrt{2}$

Có PT: $t - (1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu ĐK lấy $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy PT có 4 nghiệm: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$,

$x = \frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$.

Câu 3.

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = J + K$.

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\sin x) = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\cos x)$$

$$\Rightarrow J = e^{\frac{\pi}{2}} + e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - J; \Rightarrow 2J = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Leftrightarrow J = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy $I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$.

b) $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow 2i(2-i)z=8+i+(1+2i)z$

$\Leftrightarrow 2(2i+1)z=8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow (1+2i)z=8+i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=\dfrac{(8+i)(1-2i)}{1^2-(2i)^2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{10-15i}{5}=2-3i.$

Phần thực của z là $a=2$, phần ảo của z là -3 và môđun của z là

$|z|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 4.

+ Trường hợp 1: 1 khối có 3 học sinh và 2 khối còn lại mỗi khối có 1 học sinh.

Bước 1: chọn 1 khối có 3 học sinh có 3 cách.

Bước 2: trong khối đã chọn ta chọn 3 học sinh có $C_4^3=4$ cách.

Bước 3: 2 khối còn lại mỗi khối có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.4.4.4 = 192 cách.

+ Trường hợp 2: 2 khối có 2 học sinh và khối còn lại có 1 học sinh.

Bước 1: chọn 2 khối có 2 học sinh có $C_3^2=3$ cách.

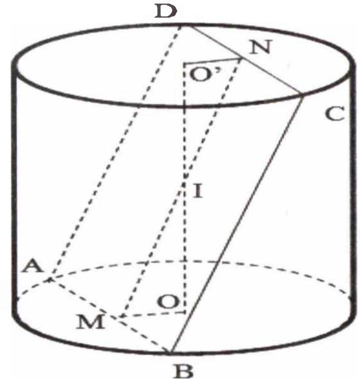
Bước 2: trong 2 khối đã chọn ta chọn 2 học sinh có $C_4^2=6$ cách.

Bước 3: khối còn lại có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.6.6.4 = 432 cách.

Vậy có 192 + 432 = 624 cách.

Câu 5.



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó $OM \perp AB$ và $O'N \perp CD$.

Giả sử I là giao điểm của MN và OO'.

Đặt R = OA và h = OO'. Khi đó:

ΔIOM vuông cân tại O nên:

$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}IM \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$

$\Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi.\frac{3a^2}{8}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$, và

$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}.$

Câu 6. Vì M thuộc đường thẳng d nên M(a; 3a-5).

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} = (-3;4) \Rightarrow AB = 5, (AB): \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = (4;1) \leftrightarrow CD = \sqrt{17}; (CD): \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{1} \Leftrightarrow x - 4y + 17 = 0.$

Tính: $h_1 = d(M, AB) = \frac{|4a + 3(3a-5) - 4|}{5} = \frac{|13a - 19|}{5}$

$$h_2 = \frac{|a - 4(3a-5) + 17|}{\sqrt{17}} = \frac{|37 - 11a|}{\sqrt{17}}.$$

Diện tích 2 tam giác bằng nhau nên:

$$\frac{1}{2}AB.h_1 = \frac{1}{2}CD.h_2 \Leftrightarrow \frac{5.|13a-19|}{5} = \frac{\sqrt{17}.|37-11a|}{\sqrt{17}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 13a-19=37-11a \\ 13a-19=11a-37 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{7}{3} \\ a=-9. \end{array}\right.$$

Vậy trên đường thẳng d có 2 điểm: $M_1\left(\dfrac{7}{3};-2\right), M_2(-9;-32)$ thỏa mãn.

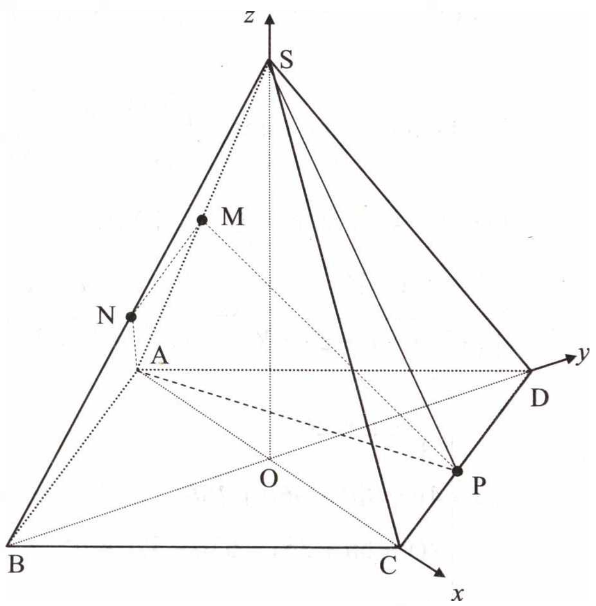
Câu 7. Gọi O là tâm của ABCD. Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ với

O(0;0;0), C($\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0),

A($-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0), D(0;$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0),

B(0; $-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0), S(0;0;$\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$)

($SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$).



M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD $\Rightarrow$ M($-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;0; $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$),

N(0; $-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;$\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$), P($\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;$\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;0).

Khi đó: $\overrightarrow{MN}=(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0)$,

$\overrightarrow{SP}=(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SP}=\dfrac{2a^2}{16}-\dfrac{2a^2}{16}+0.(-\dfrac{a\sqrt{6}}{2})=0$.

$\Rightarrow MN \perp SP$

Mặt khác, ta lại có $\overrightarrow{AM}=(\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4})$,

$$\overrightarrow{AP}=(\frac{3a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0),\ \overrightarrow{AN}=(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4})$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right].\overrightarrow{AN}=-\frac{a^3\sqrt{6}}{8}\neq 0\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

Câu 8. Điều kiện $x\geq-\frac{5}{4}, y\geq-5, xy\geq 0$.

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases}3(4x+y)-2\sqrt{4xy}=16\\4x+y+2\sqrt{4xy+5(4x+y)+25}=26.\end{cases}$

Đặt $u = 4x + y$, $v = 4xy$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases}3u-2\sqrt{v}=16\\u+2\sqrt{v+5u+25}=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{v}=3u-16\\2\sqrt{v+5u+25}=26-u\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{16}{3}\leq u\leq 26\\4v=9u^2-96u+256\\4(v+5u+25)=676-52u+u^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{16}{3}\leq u\leq 26\\4v=9u^2-96u+256\\u^2-3u-40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8\\v=16.\end{cases}$$

Do đó $\begin{cases}4x+y=8\\4xy=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4.\end{cases}$

Câu 9. Từ điều kiện đầu tiên suy ra

$(x-y)^2-4(x-y)\leq 0\Leftrightarrow 0<x-y\leq 4\ (x\neq y)$.

Ta luôn có $4xy\geq-(x-y)^2$ nên

$$P=(x-y)^3+4xy-7(x-y)+\frac{4}{x-y}\geq(x-y)^3-(x-y)^2-7(x-y)+\frac{4}{x-y}.$$

Xét $f(t)=t^3-t^2-7t+\frac{4}{t}$ trên $(0;4]$.

Suy ra: $f'(t)=3t^2-2t-7-\dfrac{4}{t^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Tìm được $\min\limits_{t\in(0;4]} f(t)=f(2)=-8$.

Vậy min $P=-8$ khi $x=1; y=-1$.

Đề số 22

Câu 1. Cho hàm số: $y=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2-2m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $\left(4x^2-16x+7\right)\log_3\left(x-3\right)>0$;

b) Giải phương trình:

$$\sin 2x\left(\cos x+3\right)-2\sqrt{3}\cos^3 x-3\sqrt{3}\cos 2x+8\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)-3\sqrt{3}=0.$$

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$;

b) Tìm môđun của số phức z biết rằng $\left(1-2i\right)z+(4-5i)=1+3i$.

Câu 4. Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Câu 5. Cho mặt cầu đường kính AB=2R. Gọi I là điểm trên AB sao cho AI = h. Một mặt phẳng vuông góc với AB tại I cắt mặt cầu theo đường tròn (C).

Tính thể tích khối nón đỉnh A và đáy là (C). Xác định vị trí điểm I để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho hai đường tròn cùng đi qua $M(1;\ 0)$ là $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng qua *M* cắt hai đường tròn $(C), (C')$ lần lượt tại *A, B* sao cho *MA= 2MB.*

Câu 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, BA = BC = *a*, AD = 2*a*. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Câu 8. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x+1} + 3\sqrt{1-5x} - 8 = 0$.

Câu 9. Cho các số thực $a, b, c \in [1;2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$.

Giải

Câu 1.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -x^3 + 4x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2+4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2), (0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;0), (2;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CD} = 4$ tại $x_{CD} = \pm 2$; đạt cực tiểu $y_{CT} = 0$ tại $x_{CT} = 0$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

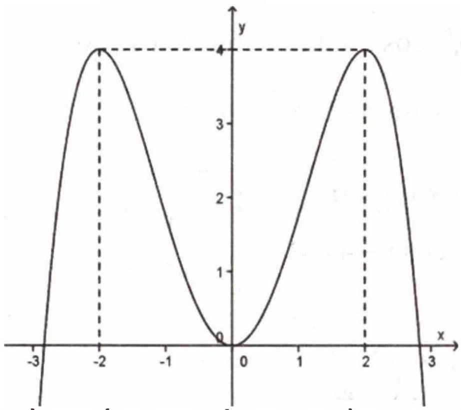
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Giao điểm với trục hoành:

$$y=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4+2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Giao điểm với trục tung: cho $x=0 \Rightarrow y=0$

* Đồ thị:



b) Số nghiệm của PT bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y=2m-1$. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì:

$$0<2m-1<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}.$$

Câu 2.

a) $\left(4x^2-16x+7\right)\log_3(x-3)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2-16x+7<0 \\ \log_3(x-3)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2-16x+7>0 \\ \log_3(x-3)>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{2} \\ 3 < x < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \vee x > \dfrac{7}{2} \\ x > 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x < \dfrac{7}{2} \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Nghiệm của BPT là $3 < x < \dfrac{7}{2}$, $x > 4$.

b) $\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}.\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos^2 x + 6\sin x.\cos x - 2\sqrt{3}.\cos^3 x - 6\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3}.\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 6.\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(-2\cos^2 x - 6\cos x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \\ \cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -4 \quad (vn) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Câu 3.a) Đặt $u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx; dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v = \tan x$

$$\Rightarrow I = \tan x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\tan x dx$$

$$= \sqrt{3}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{1}{2} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - \frac{3\ln 2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}.$$

b) Ta có $(1-2i)z+(4-5i)=1+3i$

$$\Leftrightarrow (1-2i)z=1+3i-(4-5i) \Leftrightarrow (1-2i)z=-3+8i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-3+8i}{1-2i} \Leftrightarrow z=\frac{(-3+8i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-3-6i+8i+16i^2}{1^2+2^2} \Leftrightarrow z=\frac{-19+2i}{5}=\frac{-19}{5}+\frac{2}{5}i.$$

Do đó $|z|=\left|\frac{-19}{5}+\frac{2}{5}i\right|=\sqrt{\left(\frac{-19}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{73}{5}}=\frac{\sqrt{365}}{5}$.

Câu 4. Mỗi số ứng với chỉnh hợp chập 5 của 6 phần tử đã cho. Vậy có $A_6^5=720$ số.

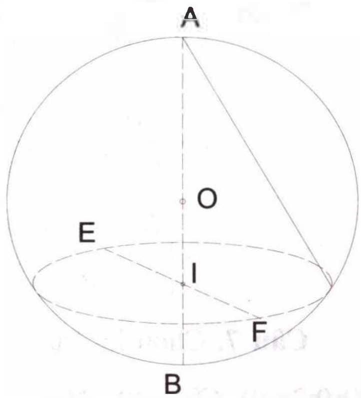
Mỗi một trong các chữ số đã cho có số lần xuất hiện ở hàng đơn vị là như nhau và là $\frac{720}{6}=120$.

Suy ra tổng các chữ số ở hàng đơn vị của 120 số đang xét là:

120(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) = 3360.

Đó cũng là tổng các chữ số ở hàng chục, trăm, nghìn,... nên tổng của 720 số đang xét là: $3360\,(1+10+10^2+10^3+10^4+10^5) = 3360.(11111) = 37332960$.

Câu 5.



Gọi EF là 1 đường kính cua (C) ta có: IE.IF = IA.IB hay IE^2 = IA.IB = h(2R-h). Gọi r là bán kính của (C) thì: r = IE = $\sqrt{h(2R-h)}$.

Thể tích cần tính là:

V= $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}\left(2Rh^2-h^3\right)$, với 0<h<2R

$V'=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$; $V'=0 \Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

$V_{max} \Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$ hay AI=$\frac{4R}{3}$.

Câu 6. Gọi d là đường thẳng qua M có véc tơ chỉ phương

$\vec{u}=(a;b)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+at\\ y=bt.\end{cases}$

Đường tròn $(C_1):I_1(1;1),R_1=1.(C_2):I_2(-2;0),R_2=3$, suy ra:

$(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=1,(C_2):(x+2)^2+y^2=9.$

Nếu d cắt (C_1) tại A: $\Rightarrow(a^2+b^2)t^2-2bt=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\to M\\ t=\dfrac{2b}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Rightarrow A\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2};\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Nếu d cắt (C_2) tại B: $\Rightarrow(a^2+b^2)t^2+6at=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\to M\\ t=-\dfrac{6a}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow B\left(1-\frac{6a^2}{a^2+b^2};-\frac{6ab}{a^2+b^2}\right).$$

Theo giả thiết: MA=2MB $\Leftrightarrow MA^2=4MB^2\,(*)$

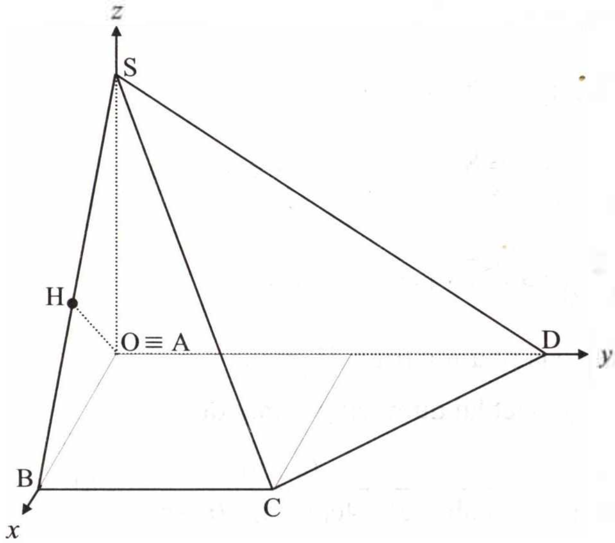
Ta có : $\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=4\left[\left(\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)^2\right]$

$$\Leftrightarrow\frac{4b^2}{a^2+b^2}=4.\frac{36a^2}{a^2+b^2}\Leftrightarrow b^2=36a^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-6a\to d:6x+y-6=0\\ b=6a\to d:6x-y-6=0.\end{array}\right.$$

Câu 7. Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* như hình vẽ, với $A\equiv O(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a\sqrt{2})$.

Khi đó $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a\sqrt{2}),\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)\Rightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow SC\perp CD$, hay tam giác SCD vuông tại C.



Mặt khác (SCD) có VTPT là $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2)$

$\Rightarrow (SCD): 1.(x-a)+1.(y-a)+\sqrt{2}.(z-0)=0$

hay (SCD): $x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

Đường thẳng SB có phương trình tham số là $\begin{cases} x=a+t \\ y=0 \\ z=-\sqrt{2}t. \end{cases}$

$H\in SB \Rightarrow H(a+t;0;-\sqrt{2}t)$.

$AH\perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{a}{3}$.

Vậy $H(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3})$.

Từ đó suy ra khoảng cách từ H đến (SCD) là

$$d(H,(SCD))=\frac{\left|\dfrac{2a}{3}+\dfrac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{a}{3}.$$

Câu 8. Điều kiện: $x \le \frac{1}{5}$.

Đặt $u = \sqrt[3]{3x+1},\ v = \sqrt{1-5x} \ge 0.$

Ta có $\begin{cases} 5u^3 + 3v^2 = 8 \\ 2u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u^3 + (8-2u)^2 = 24 \\ 3v = 8-2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 \\ 3v = 8-2u \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+1} = -2 \Leftrightarrow x = -3$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x = -3.

Câu 9. P được viết lại dưới dạng tương đương là

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + 4ab} \ge \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M.$$

Do $a,b,c \in [1;2]$ nên $a+b \ne 0$, nên chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a,b,c \in [1;2] \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{4};1\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Ta có $f'(t) = \frac{-2(t+2)}{(t^2+4t+1)^2} < 0,\ \forall t \in \left[\frac{1}{4};1\right]$

$\Rightarrow f'(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Do đó $\forall\ t \le 1 \Rightarrow f(t) \ge f(1) = \frac{1}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 \Leftrightarrow (a;b;c) = (1;1;2)$.

Vậy Min $P = \frac{1}{6}$ khi $(a;b;c) = (1;1;2)$.

Đề số 23

Câu 1. Cho hàm số: $y = 3x - x^3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3.

Câu 2. Giải phương trình:

a) $\log_{0,5}(x^2+5) + 2\log_2(x+5) = 0$;

b) $2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$.

Câu 3. a) Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

b) Giải phương trình: $(z^2 - z)(z+3)(z+2) = 10$, $z \in C$.

Câu 4. Giải phương trình: $C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + ... + (2^n - 1)C_n^n = 3^{2n} - 2^n - 6480$.

Câu 5. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Trên đường tròn đó lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Biết $\widehat{AOM} = \alpha$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (OAM) có số đo bằng β và khoảng cách từ O đến (SAM) bằng a. Tính thể tích khối nón theo a, α, β.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc (E) ta đều có $2 \le OM \le 3$. Tìm các điểm M thuộc (E) nhìn đoạn F_1F_2 dưới một góc 60°.

Câu 7. Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* vuông, *AB* = *BC* = *a*, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính theo *a* thể tích của khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AM*, *B'C*.

Câu 8. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+91} > \sqrt{x-2} + x^2$

Câu 9. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$.

Giải

Câu 1.

a) TXĐ: D=R

Ta có $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$;

Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.

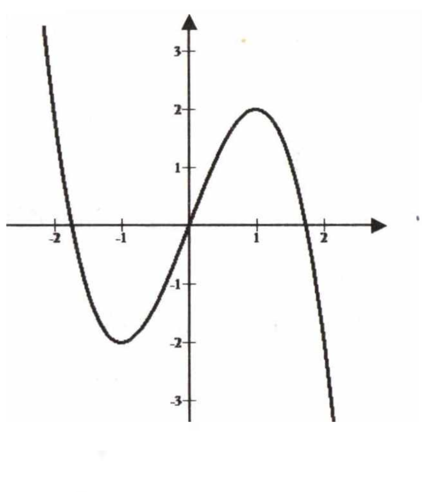
$y_{CĐ} = 2$ tại $x = 1$; $y_{CT} = -2$ tại $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị



b) Ta có $y' = -3x^2 + 3 = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Với $x = -\sqrt{2}$ thì $y = -\sqrt{2}$ có $M\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ tiếp tuyến tại M là:

$$y = -3\left(x + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -3x - 4\sqrt{2}.$$

Với $x = \sqrt{2}$ thì $y = \sqrt{2}$ có $N\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ tiếp tuyến tại N là:

$$y = -3\left(x - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -3x + 4\sqrt{2}.$$

Câu 2.

a) $\log_{0.5}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 5 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5.$

Khi đó, $\log_{0.5}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_{2^{-1}}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x^2 + 5) + \log_2(x + 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 5)^2 = \log_2(x^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = x^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 10x = -20 \Leftrightarrow x = -2(\text{tm}).$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -2$.

b) Điều kiện $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$2(\tan x + 1 - \sin x) + 3(\cot x + 1 - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1 - \sin x\right) + \left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1 - \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sin x + \cos x - \cos x.\sin x)}{\cos x} + \frac{3(\sin x + \cos x - \cos x.\sin x)}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\cos x}+\frac{3}{\sin x}\right)(\cos x+\sin x-\cos x.\sin x)=0.$$

Xét $\frac{2}{\cos x}+\frac{3}{\sin x}=0\Leftrightarrow \tan x=\frac{-3}{2}=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi.$

Xét: sinx + cosx – sinx.cosx = 0. Đặt t = sinx + cosx với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$t-\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow t=1-\sqrt{2};\ t=1+\sqrt{2}\text{ (loại)}.$$

Suy ra:

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\cos\beta\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\beta+k2\pi.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 3.

a) Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow 2tdt=-2xdx\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{tdt}{x^2}$

$$\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{tdt}{1-t^2}=\frac{tdt}{t^2-1}.$$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2};x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

$$I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2-1}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{1-t}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}\right).$$

b) PT $\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3)=10\Leftrightarrow(z^2+2z)(z^2+2z-3)=10.$

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-3t-10=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=5\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\pm i\\z=-1\pm\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z=-1\pm\sqrt{6}$; $z=-1\pm i$.

Câu 4. Điều kiện: $n \in N^*$.

Xét $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1.x + C_n^2.x^2 + C_n^3.x^3 + ... + C_n^n.x^n$.

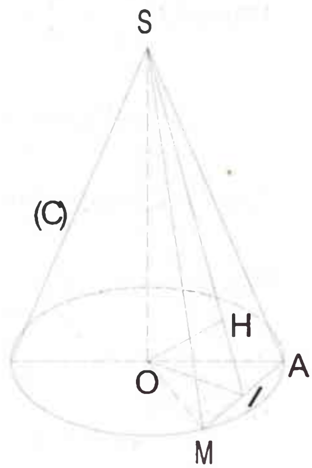
Với $x = 2$ ta có: $\quad 3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + ... + 2^n C_n^n \quad (1)$

Với $x = 1$ ta có: $\quad 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n \quad (2)$

Lấy (1) – (2) ta được: $\quad C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + ... + (2^n - 1)C_n^n = 3^n - 2^n$

PT $\Leftrightarrow 3^n - 2^n = 3^{2n} - 2^n - 6480 \Leftrightarrow 3^{2n} - 3^n - 6480 = 0 \Rightarrow 3^n = 81 \Leftrightarrow n = 4$.

Câu 5.



Gọi I là trung điểm AM.

ΔSAM cân nên SI ⊥ AM.

ΔOAM cân nên OI ⊥ AM.

$\begin{cases} (OAM) \supset OI, OI \perp AM \\ (SAM) \supset SI, SI \perp AM \end{cases} \Rightarrow$ Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (OAM) bằng $\widehat{SIO} = \beta$.

$MA \perp OI$ và $MA \perp SO$

$\Rightarrow MA \perp (SOI) \Rightarrow (SAM) \perp (SOI)$

Và $(SAM) \cap (SOI) = OI$.

Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAM) \Rightarrow d(O,(SAM)) = OH = a$.

$$\Delta OHI, \widehat{H} = 90^0 \rightarrow OI = \frac{OH}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta};$$

$$\Delta OMI, \hat{I} = 90^0 \rightarrow OM = \frac{OI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}.\sin\beta}; = R$$

$$SO = OI\tan\beta = \frac{a}{\cos\beta}$$

$$V = \frac{1}{3}.SO.\pi.OM^2$$

$$= \frac{\pi}{3}.\frac{a}{\cos\beta}.\frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta} = \frac{\pi a^2}{3\sin^2\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Câu 6. Giả sử $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \quad (1)$

Ta có: $\frac{y_0^2}{4} \geq \frac{y_0^2}{9} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \geq \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{9}$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x_0^2 + y_0^2}{9} \Leftrightarrow 9 \geq OM^2 \Rightarrow OM \leq 3. (1)$$

Tương tự: $\frac{x_0^2}{9} \leq \frac{x_0^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \leq \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{4}$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_0^2 + y_0^2}{4} \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \geq 4 \Rightarrow OM^2 \geq 4 \Rightarrow OM \geq 2$$

Tóm lại với mọi M thuộc (E) ta luôn có: $2 \leq OM \leq 3$.

Dấu đẳng thức: $\left[\begin{array}{l} y_0 = 0, x_0 = \pm 3 \\ x_0 = 0, y_0 = \pm 2 \end{array}\right.$

Ta có: $MF_1 = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0, MF_2 = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0$

$$\Rightarrow MF_1.MF_2 = \left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right) = 9 - \frac{5}{9}x_0^2.$$

Theo hệ thức hàm số cosin ta có:

$$\Leftrightarrow (F_1F_2)^2 = MF_1^2 + MF_1^2 - 2MF_1MF_2\cos 60^0 = (MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1MF_2$$

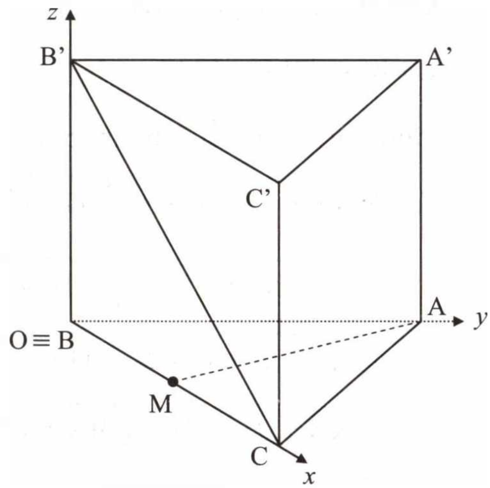
$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 6^2 - 3\left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right) = 36 - 3\left(9 - \frac{5}{9}x_0^2\right) = 9 + \frac{5}{3}x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 20 = 9 + \frac{5}{3}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{33}{5} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{165}}{5}$$

$$\Rightarrow y_0^2 = \frac{4}{9}\left(9 - x_0^2\right) = \frac{4}{9}\left(9 - \frac{33}{5}\right) = \frac{4^2 3}{9} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Như vậy: có 4 điểm thỏa mãn.

Câu 7. Từ giả thiết ta có tam giác đáy ABC vuông cân tại B, kết hợp với tính chất của lăng trụ đứng, ta chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ, với $B \equiv O(0;0;0)$, $C(a;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B'(0;0;a\sqrt{2})$.



Dễ thấy

$$V_{ABC.A'B'C'} = BB'.(\frac{1}{2}.BA.BC) = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Bây giờ ta tính khoảng cách giữa AM và B'C.

M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(\frac{a}{2};0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (\frac{a}{2};-a;0)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{B'C} = (a;0;-a\sqrt{2}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = (a^2\sqrt{2};\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2)$.

Lại có $\overrightarrow{AC} = (a;-a;0) \Rightarrow d(AM,B'C) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \dfrac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 8. Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{x^2+91}-10\right)-\left(\sqrt{x-2}-1\right)-\left(x^2-9\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)(x-3)>0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)\right)>0 \ (*)$$

Ta có $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-(x+3)-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}<0$ với mọi $x \geq 2$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow$ $x < 3$.

Từ đó suy ra nghiệm của bất phương trình là: $2 \leq x < 3$.

Câu 9. Áp dụng các BĐT:

$a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$; $a + b + c \le \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$

(được suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpski).

Ta có: $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2x} \le \sqrt{2\left(1 + x^2 + 2x\right)} = \sqrt{2}(x + 1)$;

$$\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{2y} \le \sqrt{2\left(1 + y^2 + 2y\right)} = \sqrt{2}(y + 1);$$

$$\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{2z} \le \sqrt{2\left(1 + z^2 + 2z\right)} = \sqrt{2}(z + 1);$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3(x + y + z)}.$$

Lại có:

$$A = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$$

$$\Rightarrow A \le \sqrt{2}(x + y + z + 3) + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3(x + y + z)}$$

$\Rightarrow A \le 6 + 3\sqrt{2}$ (do $x + y + z \le 3$).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy $\max A = 6 + 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Đề số 24

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và đồ thị (C) của hàm số.

b) Dựa và đồ thị (C) biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - x = m$.

Câu 2. Giải phương trình

a) $7.2^{x+1} - 5.3^{2x-1} = 0$;

b) $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\left(x^3+1\right)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx$.

b) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$.

Câu 4. Tổ I có 6 nam và 7 nữ, tổ II có 8 nam và 4 nữ. Để lập một đoàn đại biểu, lớp trưởng chọn ngẫu nhiên từ mỗi tổ hai người. Tính xác suất sao cho đoàn đại biểu gồm toàn nam hoặc toàn nữ.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường sinh là l, bán kính đường tròn đáy là r. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón (mặt cầu bên trong hình nón, tiếp xúc với tất cả các đường sinh và đường tròn đáy của nón gọi là mặt cầu nội tiếp hình nón). Tính theo r, l diện tích mặt cầu tâm I. Giả sử độ dài đường sinh của nón không đổi. Với điều kiện nào của bán kính đáy thì diện tích mặt cầu tâm I đạt giá trị lớn nhất?

Câu 6. Trong hệ tọa độ *Oxy,* cho hai đường tròn có phương trình $(C_1):x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2):x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{2y}-y\sqrt{3x+1}=2(x-y) \\ 3x^2+2y^2-5xy+x-y=0 \end{cases}$ $(x\in R, y\in R)$

Câu 9. Cho x, y, z là 3 số thực dương thoả mãn $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh: $\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2}\le\frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$.

Giải

Câu 1.

a) Tập xác định: D=R.

Ta có $y' = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$;

nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $y_{CT} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$,

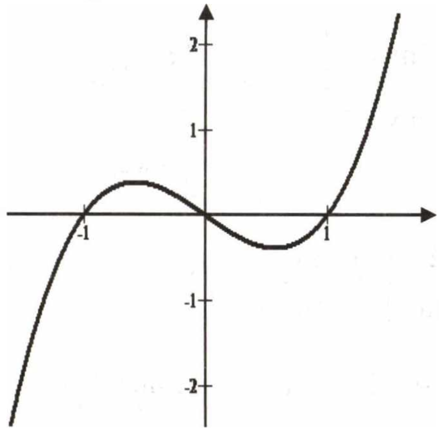
đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $y_{CĐ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

Đồ thị



b) Nếu $\left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \\ m > \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \end{array}\right.$: PT có 1 nghiệm duy nhất.

Nếu m = $\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ PT có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép).

Nếu m$\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{9};\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$: PT có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2.

a) Điều kiện xác định của phương trình: $x \in R$. Với điều kiện đó, ta có:

$7.2^{x+1} - 5.3^{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow 7.2^{x+1} = 5.3^{2x-1} \Leftrightarrow 14.2^{x} = \dfrac{5}{3}.9^{x}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{2}\right)^{x} = \dfrac{42}{5} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{2}}\dfrac{42}{5}$

Vậy $x = \log_{\frac{9}{2}}\dfrac{42}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có PT có 2 nghiệm là: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 3.

a) $I = \displaystyle\int_1^e \dfrac{(x^3+1)\ln x + 2x^2 + 1}{2 + x\ln x}dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e \dfrac{1+\ln x}{2 + x\ln x}dx.$

$\displaystyle\int_1^e x^2 dx = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^e = \dfrac{e^3-1}{3}.$

$\displaystyle\int_1^e \dfrac{1+\ln x}{2+x\ln x}dx = \int_1^e \dfrac{d(2+x\ln x)}{2+x\ln x} = \left(\ln|2+x\ln x|\right)\Big|_1^e = \ln(e+2) - \ln 2 = \ln\dfrac{e+2}{2}.$

Vậy $I = \dfrac{e^3-1}{3} + \ln\dfrac{e+2}{2}$.

b) Giải PT đã cho ta được các nghiệm: $z_1 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i, z_2 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

Suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{2}$; $z_1 + z_2 = 2$.

Do đó $\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = ... = \frac{11}{4}$.

Câu 4. Gọi: A là biến cố: "Đoàn đại biểu được chọn gồm toàn nam hoặc toàn nữ",

B là biến cố: "Đoàn đại biểu được chọn gồm toàn nam",

C là biến cố: "Đoàn đại biểu được chọn gồm toàn nữ".

Ta có: $B \cap C = \varnothing$, A = B $\cup$ C.

Suy ra: P(A) = P(B) + P(C)

Chọn 2 người từ tổ I, có C_{13}^2 cách.

Chọn 2 người từ tổ II, có C_{12}^2 cách.

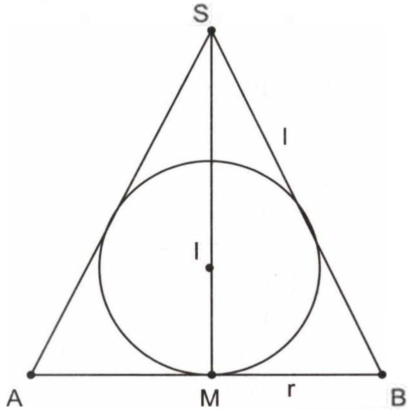
Từ đó không gian mẫu gồm: $C_{13}^2 . C_{12}^2 = 5148$ (phần tử).

$$n(B) = C_6^2.C_8^2 = 420.$$

$$n(C) = C_7^2.C_4^2 = 126.$$

Vậy $P(A) = \frac{420}{5148} + \frac{126}{5148} = \frac{546}{5148} \approx 0,106$.

Câu 5.



+) Gọi r_C là bán kính mặt cầu nội tiếp nón, và cũng là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB.

Ta có:

$$S_{SAB} = pr_C = (l + r).r_C = \frac{1}{2}SM.AB$$

$$\Rightarrow r_C = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}.2r}{2(l + r)} = r\sqrt{\frac{l - r}{l + r}}.$$

+) $S_{cầu} = 4\pi r^2{}_C = 4\pi r^2 \frac{l-r}{l+r} = 4\pi \frac{l.r^2 - r^3}{l+r}$

+) Đặt: $y(r) = \frac{lr^2 - r^3}{l+r}, 0 < r < l;$

$$y'(r) = \frac{-2r(r^2 + rl - l^2)}{(l+r)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}l \text{ (loại)} \\ r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}l \end{array}\right.$$

+) BBT:

r	0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$		l
y'(r)		+	0	-	
y(r)		$\nearrow$	y_{max}	$\searrow$	

+) Ta có max $S_{cầu}$ đạt $\Leftrightarrow$ y(r) đạt max $\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}l$.

Câu 6. Ta có:

$(C_1): x^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow I_1(0;2), R_1 = 3,$

$(C_2): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9 \Rightarrow I_2(3;-4), R_2 = 3.$

- Nhận xét : $I_1I_2 = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \rangle 3 + 3 = 6 \Rightarrow (C_1)$ không cắt (C_2).

- Gọi d: $ax+by+c=0$ ($a^2+b^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung, thế thì:

$$d(I_1, d) = R_1, d(I_2, d) = R_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3(1) \\ \frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3(2) \end{cases} \Rightarrow \frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2b+c| = |3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-4b+c = 2b+c \\ 3a-4b+c = -2b-c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ 3a-2b+2c = 0. \end{array}\right.$$

Mặt khác từ (1): $(2b+c)^2 = 9\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow$

- Trường hợp: a =2b thay vào (1):

$$(2b+c)^2 = 9\left(4b^2+b^2\right) \Leftrightarrow 41b^2 - 4bc - c^2 = 0.$$

$$\Delta'_b = 4c^2 + 41c^2 = 45c^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{2c-3\sqrt{5}c}{41} \\ b = \dfrac{\left(2+3\sqrt{5}\right)c}{41}. \end{array}\right.$$

Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm:

$$d_1: \frac{2\left(2-3\sqrt{5}\right)}{41}x + \frac{\left(2-3\sqrt{5}\right)}{41}y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(2-3\sqrt{5}\right)x + \left(2-3\sqrt{5}\right)y + 41 = 0$$

$$d_1: \frac{2\left(2+3\sqrt{5}\right)}{41}x + \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)}{41}y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(2+3\sqrt{5}\right)x + \left(2+3\sqrt{5}\right)y + 41 = 0$$

- Trường hợp: $c = \dfrac{2b-3a}{2}$, thay vào (1):

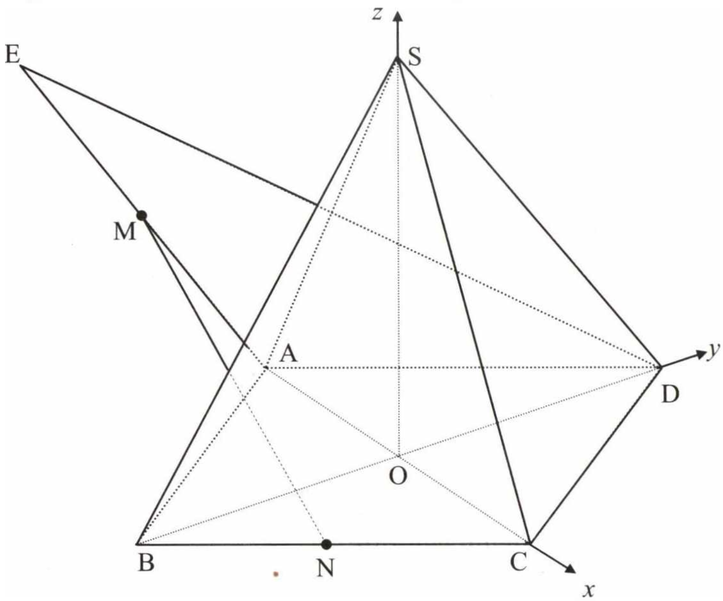
$$\frac{\left|2b + \dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow |2b-a| = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (2b-a)^2 = 4a^2 + 4b^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{-4b}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, c = b \\ a = \dfrac{-4b}{3}, c = 3b. \end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường thẳng : $d_3: y+1=0$, $d_4: 4x-3y-9=0$.

Câu 7. Gọi O là tâm của đáy ABCD.



Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta chọn hệ trục Oxyz với O là gốc tọa độ, tia OC ≡ tia Ox, tia OD ≡ tia Oy, tia OS ≡ tia Oz.

Khi đó ta có: $O(0;0;0)$, $A(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0)$, $C(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0)$,

$B(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$, $D(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$,

$S \in$ tia $Oz \Rightarrow S(0;0;x)\ \ (x>0)$.

E đối xứng với D qua trung điểm của SA

$\Rightarrow$ ADSE là hình bình hành $\Rightarrow E(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};x)$

M là trung điểm của AE $\Rightarrow M(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{x}{2})$

N là trung điểm của BC $\Rightarrow N(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0) \Rightarrow \overline{MN}=(\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{x}{2})$.

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = (0; a\sqrt{2}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$.

Lại có $\overrightarrow{AC} = (a\sqrt{2}; 0; 0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right] = (0; \frac{ax\sqrt{2}}{2}; 0)$.

Mà $\overrightarrow{AN} = (\frac{3a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0)$

$$\Rightarrow d(MN, AC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\frac{a^2x}{4}}{\frac{ax\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 8. ĐK: $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ y \geq 0 \end{cases}$ Từ PT thứ 2 ta có $\left[\begin{array}{l} x = y \\ 2y = 3x + 1 \end{array}\right.$

+) Với x = y thay vào thứ nhất ta có $x\sqrt{2x} - x\sqrt{3x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (tm) \\ \sqrt{2x} - \sqrt{3x+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ x = -1\ \ \text{(loại)} \end{array}\right.$

+) Với 2y = 3x +1 thay vào PT thứ 2 có $\frac{(x+1)}{2}\sqrt{3x+1} = x + 1$

tìm được $x = 1 \Rightarrow y = 2$ (tm).

Vậy HPT có nghiệm là: (0 ;0), (1;2).

Câu 9. Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nên: $\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2}$

$= \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2}$

$= \frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + 3.$

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{z^2}{x^2+y^2} \leq \frac{z^2}{2xy}$.

Tương tự $\frac{x^2}{y^2+z^2} \le \frac{x^2}{2yz}, \frac{y^2}{x^2+z^2} \le \frac{y^2}{2xz}$.

Vậy $\frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + 3 \le \frac{z^2}{2xy} + \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xz} + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz} + 3$, đpcm.

Đề số 25

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.

b) Với giá trị nào của m đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x - 2y - 5 = 0$.

Câu 2. a) Giải bất phương trình $\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \ge 0$;

b) Giải phương trình $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$.

Câu 3.

a) Tính tích phân sau: $I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{1+\ln x} + 1\right)\frac{1}{x}dx$;

b) Trong mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn các điều kiện: $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện trên, tìm số phức có mô đun nhỏ nhất.

Câu 4. Xét dãy số gồm 7 chữ số, mỗi số được chọn từ các chữ số 0, 1, 2,…., 8, 9 thoả mãn các tính chất sau: Chữ số ở vị trí thứ 3 là số chẵn. Chữ số ở vị trí cuối cùng không chia hết cho 5. Các chữ số ở vị trí thứ 4, thứ 5 và thứ 6 đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên như vậy? Giải thích.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO = h, bán kính đáy bằng R. Điểm $M \in SO$ là tâm đường tròn (C), OM = x. Tính thể tích khối nón có đỉnh S và đáy là (C). Tìm x để thể tích này lớn nhất.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ *oxy* cho tam giác *ABC* có $A(2;1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp *S*.ABC có SC = CA = AB = $a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm M, N lần lượt di động trên tia AS và CB sao cho AM = CN = t (0 < t < 2a).

a) Tính độ dài đoạn MN theo a và t. Tìm t sao cho MN ngắn nhất;

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Câu 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{2x^2 + mx} = 3 - x.$$

Câu 9. Chứng minh rằng:

$$\frac{a + b}{\sqrt{a(3a + b)} + \sqrt{b(3b + a)}} \geq \frac{1}{2}$$ với a, b là các số dương.

Giải

Câu 1. a) Với m = 0 ta có hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên

$$y' = 3x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.;\ y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng (0; 2).

Hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{CĐ} = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và $y_{CT} = -4$.

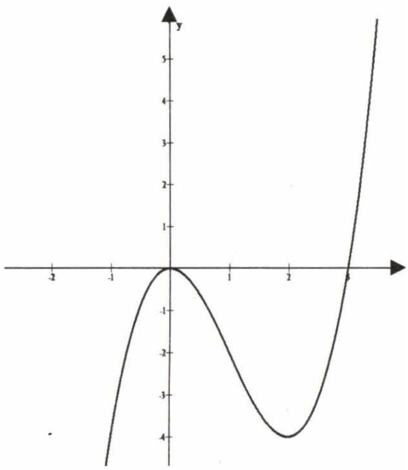
$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}\right) = -\infty.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị



b) Ta có $y = x^3 - 3x^2 + mx \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + m.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$

Ta có: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m.$

Tại các điểm cực trị thì $y'=0$, do đó tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn phương trình: $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m.$

Như vậy đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$ nên Δ có hệ số góc $k_1=\frac{2}{3}m-2$.

d: $x-2y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow$ d có hệ số góc $k_2=\frac{1}{2}$.

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có d $\perp \Delta$

$\Rightarrow k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m-2\right)=-1 \Leftrightarrow m=0.$

Với m = 0 thì đồ thị có hai điểm cực trị là (0; 0) và (2; –4), nên trung điểm của chúng là I(1; –2). Ta thấy I $\in$ d, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.

Vậy m = 0 thỏa mãn.

Câu 2. a) $\log_3\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ \frac{x^2-4x+3}{x^2-x+5}-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le 4\\ \frac{-x^2+4x+3}{x^2-x+5}-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}4<x\le 5\\ \frac{x^2-4x+3}{x^2-x+5}-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>5\\ \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-5}-1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.
\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ \frac{-3x-2}{x^2-x+5}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le 4\\ \frac{-2x^2+5x-2}{x^2-x+5}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}4<x\le 5\\ \frac{-3x-2}{x^2-x+5}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>5\\ \frac{x^2-5x+8}{x^2+x-5}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.
\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\le x\le 2\\ x>5.\end{array}\right.$$

b) $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

$\Leftrightarrow \sin x+\dfrac{\sin 3x+\sin x}{2}+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x+\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{2}$

$\Leftrightarrow 3\sin x+\sin 3x+2\sqrt{3}\cos 3x=4\cos 4x+3\sin x-\sin 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x+2\sqrt{3}\cos 3x=4\cos 4x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=3x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x=-3x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k\in Z).$

Câu 3.

a) $I=\int_1^2 \dfrac{(u-1)du}{u}+\int_1^e \dfrac{dx}{x}=(u-\ln u)\Big|_1^2+\ln x\Big|_1^e=2-\ln 2$ (Với $u=\ln x+1$).

b) Đặt $z = x + yi$; trong đó $x, y \in R$

$|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) - (y + 3)i|$

* $\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$ Tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x - 2y - 3 = 0$ (Δ)

* $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow |\overline{OM}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của điểm $O(0; 0)$ trên (Δ)

$\Leftrightarrow M(\dfrac{3}{5};-\dfrac{6}{5}) \Rightarrow z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i.$

Câu 4. Xét dãy số $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Vì a_3 chẵn nên có 5 cách chọn (0, 2, 4, 6, 8).

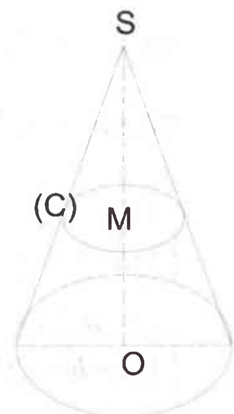
Vì a_7 không chia hết cho 5 nên có 8 cách chọn (trừ 0,5).

Vì a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau nên có A_{10}^3 cách chọn.

Vì a_1, a_2 tùy ý nên mỗi số có 10 cách chọn.

Vậy có $5.8.A_{10}^3.10.10 = 2880000$ dãy số thỏa mãn đầu bài.

Câu 5.



Ta có $\dfrac{SM}{SO}=\dfrac{R'}{R} \Leftrightarrow \dfrac{h-x}{h}=\dfrac{R'}{R} \Leftrightarrow R'=\dfrac{R}{h}(h-x)$.

Thể tích khối nón:

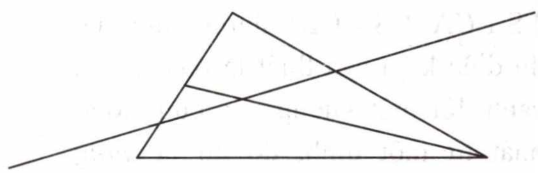
$V=\dfrac{1}{3}\pi R'^2.SM=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2.x=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(x^3-2hx^2+h^2x)$.

$V'=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}\left[3x^2-4hx+h^2\right]$, $V'=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{h}{3} \\ x=h \end{array}\right.$ x= h (loại).

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $V_{Max} \Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$

Câu 6. Ta có: M là trung điểm của AB nên $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. Gọi C(a;b), theo tính chất trọng tam tam giác:



$$\begin{cases} x_G=\dfrac{a+3}{3} \\ y_G=\dfrac{b-1}{3}. \end{cases}$$

Do G nằm trên d: $\dfrac{a+3}{3}+\dfrac{b-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow a+b=4\,(1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-3)$ phương trình đường thẳng AB:

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x-y-5=0$.

Do đó khoảng cách từ C đến AB là $h(C,AB)=\dfrac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}$.

Từ giả thiết: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.h(C,AB)=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}.\dfrac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|3a-b-5|}{2}=13,5$

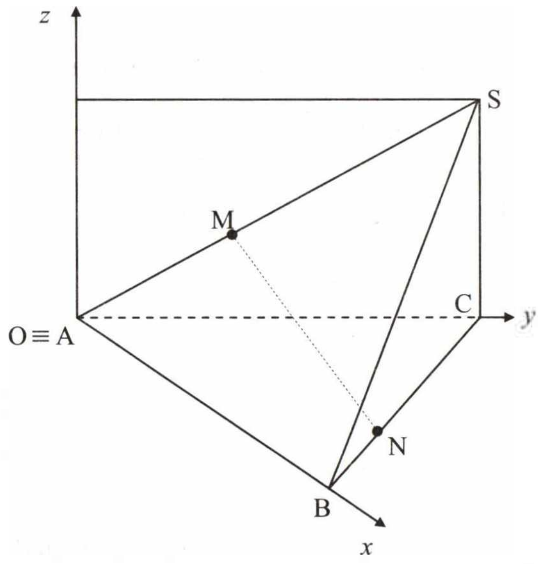
$$\Leftrightarrow |3a-b-5| = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b-5=27 \\ 3a-b-5=-27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b=32 \\ 3a-b=-22. \end{array}\right.$$

Kết hợp với (1) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=4 \\ 3a-b=32 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=4 \\ 3a-b=-22 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=4 \\ 4a=36 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=4 \\ 4a=-18 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-5 \\ a=9 \end{cases} \\ \begin{cases} b=\dfrac{17}{2} \\ a=-\dfrac{9}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow C_1(9;-5), C_2\left(-\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right).$$

Có 2 điểm thỏa mãn bài toán là $C_1(9;-5), C_2\left(-\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$.

Câu 7. *Nhận xét:* tại vị trí điểm A hoặc điểm C ta nhận thấy đã có một cặp cạnh vuông góc ($AB \perp AC$, $CS \perp CA$, $CS \perp CB$) nhưng chưa đạt đủ điều kiện cần thiết là phải có ba cạnh đôi một vuông góc cùng xuất phát từ một đỉnh, do đó ta *dựng đường thẳng qua A và vuông góc với (ABC)* (đường thẳng này song song với SC).



Khi đó, chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ, với:

$A \equiv O(0;0;0)$, $B(a\sqrt{2};0;0)$,

$C(0;\ a\sqrt{2};0)$, $S(0;\ a\sqrt{2};a\sqrt{2})$.

a). Tính độ dài đoạn MN theo a và t.

Tìm t sao cho MN ngắn nhất.

Theo giả thiết M thuộc tia AS và $AM = t$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{AS} \Rightarrow M(0;\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2}).$$

Tương tự, N thuộc tia CB và $CN = t$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{CB} \Rightarrow N(\frac{t\sqrt{2}}{2};a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};0).$$

Vậy ta có $MN = \sqrt{\frac{t^2}{2}+(a\sqrt{2}-t\sqrt{2})^2+\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2a^2-4at+3t^2}$.

Hơn nữa, $MN = \sqrt{2a^2-4at+3t^2} = \sqrt{(\sqrt{3}t-\frac{2a}{\sqrt{3}})^2+\frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{2a}{3}$ (thỏa $0 < t < 2a$).

Vậy $MN_{\min} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}$.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Khi MN ngắn nhất, ta có $t = \frac{2a}{3}$ nên $M(0;\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}), N(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{2a\sqrt{2}}{3};0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};-\frac{a\sqrt{2}}{3})$$

Mặt khác $\overrightarrow{AS} = (0;a\sqrt{2};a\sqrt{2}), \overrightarrow{CB} = (a\sqrt{2};-a\sqrt{2};0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow MN \perp AS, MN \perp CB$$

hay MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

Câu 8. Phương trình $\sqrt{2x^2+mx} = 3-x$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+mx = 9+x^2-6x \\ x \leq 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Xét $x^2+6x-9 = -mx$ (1)

+ Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm.

+ Với $x \neq 0$ (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2+6x-9}{x} = -m$.

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{x^2+6x-9}{x}$ trên $(-\infty;3]\setminus\{0\}$ có $f'(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2}>0\ \forall x\neq 0.$

+ x = 3 $\Rightarrow$ f(3) = 6 , có nghiệm duy nhất khi – m > 6 $\Leftrightarrow$ m < - 6.

Câu 9. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\geq\frac{1}{2}$$ với a, b là các số dương.

Ta có: $$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}=\frac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}}\ (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$$\sqrt{4a(3a+b)}\leq\frac{4a+(3a+b)}{2}=\frac{7a+b}{2}\quad(2)$$

$$\sqrt{4b(3b+a)}\leq\frac{4b+(3b+a)}{2}=\frac{7b+a}{2}\quad(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}\leq 4a+4b\ (4)$

Từ (1) và (4) suy ra: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\geq\dfrac{2(a+b)}{4a+4b}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Đề số 26

Câu 1. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho.

b) Biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình:

$$\left|x^4-4x^2+3\right|=3^k.$$

Câu 2. Giải phương trình:

a) $\log_5\left(9^{x-2}+49\right)-\log_5\left(3^{x-2}+1\right)=2$;

b) $\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Câu 3. a) Tính: $I = \int_4^5 \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 5x^2 + 6}dx$;

b) Giải phương trình (ẩn z) trên tập số phức: $\left(\frac{z+i}{i-z}\right)^3 = 1$.

Câu 4. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển Newton của biểu thức:

$$P = (1 + x^2 - x^3)^8.$$

Câu 5. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, có cạnh $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Chứng minh $OM^2 + MF_1.MF_2$ là một số không đổi với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) và $M \in (E)$. Tìm các điểm M thuộc (E) thỏa $MF_1 = 2.MF_2$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E).

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

Câu 8. Giải BPT $x^2 - 4 \le 2x\sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Câu 9. Cho các số khác không a, b, c. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}.$$

Biết x, y, z thoả mãn điều kiện: $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Giải

Câu 1. a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

HS đồng biến trên $(-\sqrt{2}\,;0)$ và $(\sqrt{2}\,;+\infty)$.

HS nghịch biến trên $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\ \sqrt{2})$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4-4x^2+3\right)=+\infty.$

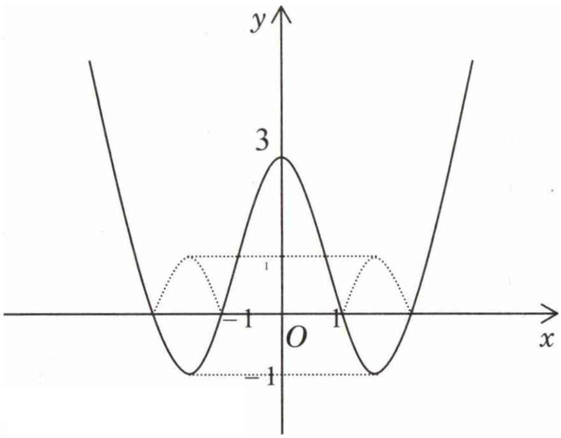
$y_{CĐ}=y(0)=3;$ $\qquad\qquad$ $y_{CT}=y(\pm\sqrt{2})=-1.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị (vẽ chung với ý b)

b) Đồ thị hàm số $y=\left|x^4-4x^2+3\right|$ gồm phần nằm phía trên Ox và đối xứng của phần nằm phía dưới Ox qua Ox của đồ thị (C); $y=3^k$ là đường thẳng song song với Ox. Từ đó ta có kết quả:



* $3^k<1\Leftrightarrow k<0$: phương trình có 8 nghiệm,

* $3^k=1\Leftrightarrow k=0$: phương trình có 6 nghiệm,

* $1<3^k<3\Leftrightarrow 0<k<1$: phương trình có 4 nghiệm,

* $3^k=3\Leftrightarrow k=1$: phương trình có 3 nghiệm,

* $3^k>3\Leftrightarrow k>1$: phương trình có 2 nghiệm.

Câu 2. Giải phương trình:

a) Ta có $\log_5\left(9^{x-2}+49\right)-\log_5\left(3^{x-2}+1\right)=2$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(9^{x-2}+49\right)=2+\log_5\left(3^{x-2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(9^{x-2}+49\right)=\log_5\left[25\left(3^{x-2}+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-2}+49=25\left(3^{x-2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-2}-25.3^{x-2}+24=0$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-2}=1 \text{ hoặc } 3^{x-2}=24.$$

Với $3^{x-2}=1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2;$

Với $3^{x-2}=24 \Leftrightarrow x=2+\log_3 24.$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=2; x=2+\log_3 24$.

b) $\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right) \Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}-2x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ \frac{\pi}{6}-2x=\frac{3\pi}{4}-x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{17\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right. (k\in Z).$$

Câu 3.

a) Ta có: $I=\frac{1}{2}\int_4^5\frac{x^2+3}{(x^2-2)(x^2-3)}dx^2=\frac{1}{2}\int_4^5\frac{x^2-2+5}{(x^2-2)(x^2-3)}dx^2$

$$=\frac{1}{2}\int_4^5\frac{dx^2}{x^2-3}+\frac{5}{2}\int_4^5\left(\frac{1}{x^2-3}-\frac{1}{x^2-2}\right)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-3\right|\Big|_4^5+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-2}\right|\Big|_4^5=\frac{1}{2}\ln\frac{22}{13}+\frac{5}{2}\ln\frac{308}{299}.$$

b) ĐK: $z\neq i$.

Đặt $w=\frac{z+i}{i-z}$ ta có phương trình: $w^3=1 \Leftrightarrow (w-1)(w^2+w+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=1 \\ w^2+w+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=1 \\ w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ w=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Với $w=1 \Rightarrow \dfrac{z+i}{i-z}=1 \Leftrightarrow z=0.$

Với $w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{z+i}{i-z}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})z=-\sqrt{3}-3i \Leftrightarrow z=-\sqrt{3}.$

Với $w=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{z+i}{i-z}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (1-i\sqrt{3})z=\sqrt{3}-3i \Leftrightarrow z=\sqrt{3}.$

Vậy phương trình có ba nghiệm $z=0; z=\sqrt{3}$ và $z=-\sqrt{3}$.

Câu 4. Ta có: $P=\left[1+x^2(1-x)\right]^8=\sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k}(1-x)^k$.

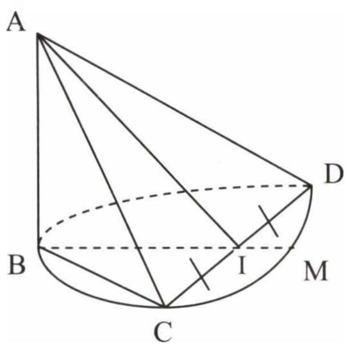
Mà $(1-x)^k=\sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i x^i$.

Để ứng với x^8 ta có: $2k+i=8; 0 \le i \le k \le 8 \Rightarrow 0 \le k \le 4$.

Xét lần lượt các giá trị của k suy ra k = 3 hoặc k = 4 thoả mãn.

Do vậy hệ số của x^8 là: $a=C_8^3C_3^2(-1)^2+C_8^4C_4^0(-1)^0=238$.

Câu 5.



Gọi I là trung đểm cạnh CD.

$$(Gt) \Rightarrow \begin{cases} AI \perp CD \\ BI \perp CD \end{cases}, AI=BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}=AB \quad (1)$$

$\Rightarrow (ABI)$ là mp trung trực cạnh CD.

Gọi M là giao điểm của BI với mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$\Rightarrow$ Đường tròn lớn của (S) là đường tròn (ABM).

Mặt phẳng (BCD) cắt (S) theo đường tròn (BCD) qua M, hơn nữa BM là đường kính.

$$\Rightarrow \mathrm{BM} = \frac{\mathrm{a}}{\sin 60^0} = \frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{3}}.$$

(1) $\Rightarrow \Delta ABI$ đều $\Rightarrow \widehat{ABM} = 60^0$;

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB.BM\cos 60^0} = a\sqrt{\frac{13}{12}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{AM}{2\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{13}}{6} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$$

Câu 6. +) (E) có trục dài 2a=6, trục ngắn: 2b=4,

$c^2 = 9 - 4 = 5 \Leftrightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow F_1\left(-\sqrt{5};0\right), F_2\left(\sqrt{5};0\right)$.

Gọi $M(x_0;y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1(*)$

Theo công thức bán kính qua tiêu:

$$\Rightarrow MF_1 = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0,\ MF_2 = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0$$

$$\Rightarrow MF_1.MF_2 = \left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right) = 9 - \frac{5}{9}x_0^2.$$

Vậy: $OM^2 + MF_1MF_2 = x_0^2 + y_0^2 + 9 - \frac{5}{9}x_0^2$

$$= 9 + \frac{4x_0^2}{9} + y_0^2 = 9 + 4\left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4}\right) = 9 + 4 = 13$$

+) Như (*) Nếu $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0 = 2\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

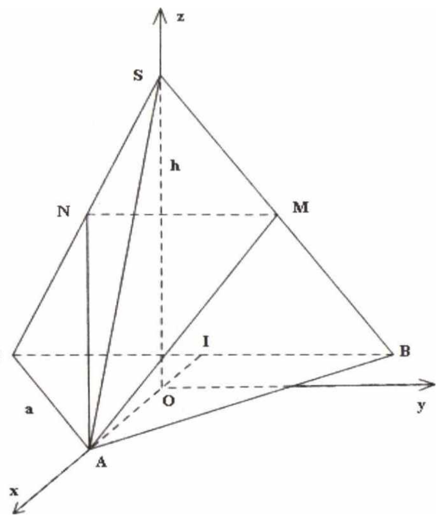
Từ (*): $y_0^2 = \frac{4}{9}\left(9 - x_0^2\right) = \frac{4}{9}\left(9 - \frac{9}{5}\right) = \frac{16}{5}$

$$\Rightarrow y_0 = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow M_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), M_2\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Câu 7. Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:



$O(0; 0; 0)$, $S(0; 0; h)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right),$$

$$B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right),$$

$$M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right) \text{ và } N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),$$

$$\vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

Câu 8. Điều kiện $x \le -3$ hoặc $x \ge 1$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 3}, (t \ge 0) \Rightarrow x^2 = t^2 - 2x + 3$.

BPT đã cho trở thành $t^2 - 2xt - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2x-1) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2x-3}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}-2x-1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3} - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3} \le 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (2x+1)^2 \ge x^2+2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+2x+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra BPT có nghiệm $x \ge 1$.

Câu 9. Từ giả thiết suy ra:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) = 0 \quad (*)$$

Do $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$; $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$; $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$

Nên từ (*) suy ra x = y = z = 0, do đó M = 0.

Đề số 27

Câu 1. Cho hàm số y = $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d có phương trình y = 5x.

Câu 2. a) Giải bất phương trình $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2^{2x-5}>2^{7-x}+2^{5-x}-2^{3-x}$.

b) Giải phương trình:

$$4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+4\sqrt{3}\cos x\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{2}.$$

Câu 3. a) Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x).\cos(x-\frac{\pi}{4})}dx$.

b) Giải phương trình nghiệm phức: $\overline{z}+\frac{25}{z}=8-6i$.

Câu 4. Từ một tổ gồm 6 bạn nam và 5 bạn nữ, chọn ngẫu nhiên 5 bạn xếp vào bàn đầu theo những thứ tự khác nhau. Tính xác suất sao cho trong cách xếp trên có đúng 3 bạn nam.

Câu 5. Cho hình trụ có đáy là đường tròn tâm O và O', tứ giác ABCD là hình vuông nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. AA', BB' là các đường sinh của khối trụ. Biết góc của mặt phẳng (A'B"CD) và đáy hình trụ bằng 60^o, tính thể tích khối trụ.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình:

$x^2+y^2-2x-6y+6=0$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2 ; 4) cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến ấy song song với đường thẳng có phương trình: 2x + 2y – 7 = 0.

Câu 7. Cho hình chóp SABC, các cạnh đều có độ dài bằng 1, O là tâm của ΔABC. I là trung điểm của SO. H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống cạnh SB. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SBCM, tứ diện SABC. Chứng minh IH đi qua trọng tâm G của ΔSAC.

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{y}(1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{5y}=3(2)\end{cases}$ (x, y∈ R).

Câu 9. Cho x và y là hai số thỏa mãn đồng thời : $x\geq 0$, $y\geq 0$, $2x+3y\leq 6$ và $2x+y\leq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $K=x^2-2x-y$.

Giải

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ => TCN y= 2.

$\lim\limits_{x\to(-2)^{+}} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^{-}} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ x= -2.

Ta có $y' = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$.

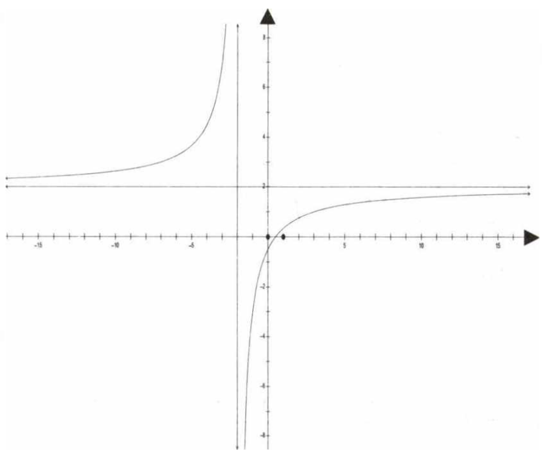
Hàm số đồng biến trên khoảng ($-\infty$;-2) và (-2; $+\infty$).

Hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ 2

Đồ thị



b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d có phương trình y = 5x.

Ta có $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{5}{(x_0+2)^2} = 5 \Leftrightarrow x_0^2+4x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0 = -1; x_0 = -3$.

+ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3$, $f'(x_0) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 5(x+1)+3$ hay $y = 5x+8$.

+ Với $x_0 = -3$, $y_0 = 7$, $f'(x_0) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 5(x+3)+7$ hay $y = 5x+22$.

Câu 2.

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.2^{3x} + \dfrac{2^{3x}}{8} - \dfrac{2^{3x}}{32} > 2^7 + 2^5 - 2^3$

$$\Leftrightarrow 2^{3x}\left(\frac{16+4-1}{32}\right) > 19.2^3 \Leftrightarrow 2^{3x} > \frac{19.2^3 2^5.}{19.} = 2^8 \leftrightarrow 3x > 8 \rightarrow x > \frac{8}{3}.$$

b) $4\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) + 4\sqrt{3}\cos x.\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}\cos x\left[\cos(2x+2\pi) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + 2\sin x.\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cos x.\cos 2x - 2\sqrt{3}\cos x.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \sin x + \sqrt{3}(\cos 3x + \cos x) - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in Z).$$

Câu 3.

a) Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2.\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}dx.$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$;

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}.$$

$$I=\sqrt{2}\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2}=-\frac{\sqrt{2}}{t}\Bigg|_{1}^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

b) Giả sử z = a +bi với ; a,b ∈ R và a, b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\bar{z}=a-bi$; $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Khi đó phương trình $\bar{z}+\frac{25}{z}=8-6i \Leftrightarrow a-bi+\frac{25(a-bi)}{a^2+b^2}=8-6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+b^2+25)=8(a^2+b^2) & (1) \\ b(a^2+b^2+25)=6(a^2+b^2) & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b=\frac{3}{4}a$ thế vào (1)

Ta có a = 0 hoặc a = 4. Với a = 0 ⇒ b = 0 (loại).

Với a = 4 ⇒ b = 3.

Ta có số phức z = 4 + 3i.

Câu 4. Mỗi một sự sắp xếp chỗ ngồi cho 5 bạn là một chỉnh hợp chập 5 của 11 bạn.

Vậy không gian mẫu Ω gồm A_{11}^5 (phần tử).

Kí hiệu A là biến cố: "Trong cách xếp trên có đúng 3 bạn nam"

Để tính n(A) ta lí luận như nhau:

Chọn 3 nam từ 6 nam, có C_6^3 cách.

Chọn 2 nữ từ 5 nữ, có C_5^2 cách.

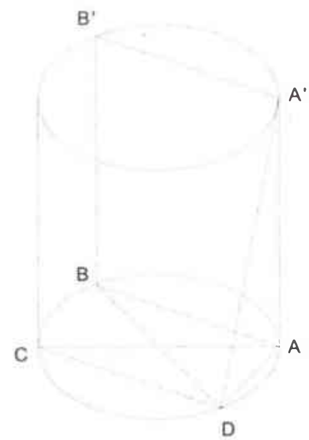
Xếp 5 bạn đã chọn vào bàn đầu theo những thứ tự khác nhau, có 5! cách.

Từ đó theo quy tắc nhân ta có: n(A) = $C_6^3.C_5^2.5!$

Vì sự lựa chọn và sự sắp xếp là ngẫu nhiên nên các kết quả đồng khả năng.

Do đó: $P(A)=\frac{C_6^3.C_5^2.5!}{A_{11}^5}\approx 0,433$.

Câu 5.



Ta có: $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow A'D$ có hình chiếu trên (ABCD) là AD.

Do BC $\perp$ AD $\Rightarrow$ BC $\perp$ A'D

Vì: $\begin{cases} (A'B'CD) \cap (ABCD) = BC \\ A'D \subset (A'B'CD);\ BC \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(A'B'CD);(ABCD)}\right) = \widehat{A'DA} = 60^0$

ΔOAD vuông cân nên $AD = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ.

ΔADA' có h = AA'=AD.tan60^0= $R\sqrt{6}$.

Thể tích khối trụ là V = $\pi R^2 h = \pi R^2.R\sqrt{6} = \pi R^3\sqrt{6}$ (đvtt).

Câu 6. +) (C) : $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow I(1;3), R = 2$.

Gọi A(x;y) thuộc (C) suy ra $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4\,(1)$

B đối xứng với A qua M suy ra B(4-x;8-y).

Để đảm bảo yêu cầu bài toán thì B thuộc (C): $(3-x)^2 + (5-y)^2 = 4\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (3-x)^2 + (5-y)^2 = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \quad (3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0\,(4) \end{cases}$$

Lấy (3)–(4) ta có phương trình: 4x+4y-24=0, hay: x+y-6=0. Đó chính là đường thẳng cần tìm.

+) Gọi d' là đường thẳng // với d nên nó có dạng: 2x+2y+m=0 (*). Để d' là tiếp tuyến của (C) thì:

$$\Rightarrow h(I,d') = \frac{|2+6+m|}{\sqrt{8}} = 2 \Leftrightarrow |m+8| = 4\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4\sqrt{2} - 8 \\ m = -4\sqrt{2} - 8. \end{array}\right.$$

Câu 7. a) Chọn hệ trục Oxyz sao cho O là gốc tọa độ. A$\in$Ox, S $\in$Oz, BC//Oy

Tọa độ các điểm:

$$A(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0)\,;B(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0)\,;C(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0)\,;S(0;0\frac{\sqrt{6}}{3})\,;I(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6}).$$

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)\,;\overrightarrow{IC}=(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{6}}{6});\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right]=(-\frac{\sqrt{6}}{6};0;\frac{\sqrt{3}}{6})$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (IBC) là:

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}(x-0)+0(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{6}(z-\frac{\sqrt{6}}{6})=0$$

Hay: $\sqrt{2}x-z+\frac{\sqrt{6}}{6}=0$ mà ta lại có:

$\overrightarrow{SA}=(\frac{\sqrt{3}}{3};0;-\frac{\sqrt{6}}{3})\Rightarrow\overrightarrow{SA}//\overrightarrow{u}_{SA}(1;0;-\sqrt{2})$.

Phương trình đường thẳng SA: $x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t;\ y=0;z=-\sqrt{2}t$.

+ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+t & (1)\\ y=0 & (2)\\ y=-\sqrt{2}t & (3)\\ -\sqrt{2}x+z-\dfrac{\sqrt{6}}{6}=0 & (4)\end{cases}$

Thay (1) (2) (3) vào (4) có:

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{12};y=0;z=\frac{\sqrt{6}}{4}\Rightarrow M(\frac{\sqrt{3}}{12};0;\frac{\sqrt{6}}{4})$;

$\Rightarrow\overrightarrow{SM}=(\frac{\sqrt{3}}{12};0;-\frac{\sqrt{6}}{12})\Rightarrow\overrightarrow{SA}=4\overrightarrow{SM}$

$\Rightarrow$ M nằm trên đoạn SA và $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})}=\frac{1}{4}$.

b) Do G là trọng tâm của $\Delta ASC \Rightarrow$ SG đi qua trung điểm N của AC

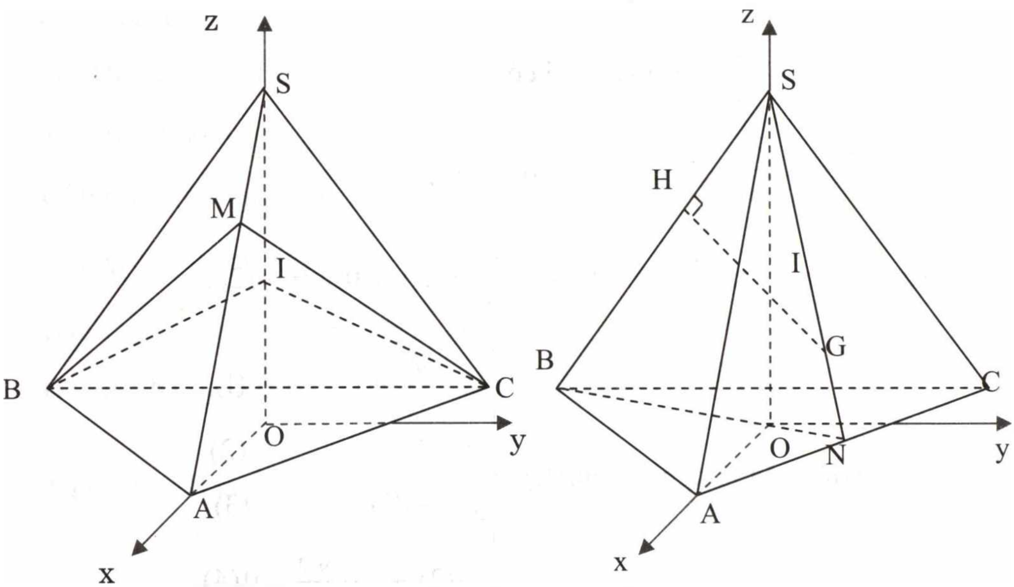
$\Rightarrow GI \subset (SNB) \Rightarrow$ GI và SB đồng phẳng (1)

Ta lại có tọa độ G $(\frac{\sqrt{3}}{18};\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{9}) \Rightarrow \overrightarrow{GI} = (-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18})$

$\vec{SB} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB} = 0 \Rightarrow GI \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GI \perp SB = H$

Mặt khác HI vuông góc SB tại H nên G, H, I thẳng hàng. Hay IH đi qua trọng tâm G của tam giác SAC.



Câu 8. ĐK: $x + y \geq 0$, $x - y \geq 0$, $y \geq 0$.

PT(1) $\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0 & (3) \\ 5y^2 = 4xy & (4) \end{cases}$

Từ PT(4) $\Leftrightarrow$ y = 0 hoặc 5y = 4x.

Với y = 0 thế vào PT(2) ta có x = 9 {Không thỏa mãn đk (3)}.

Với 5y = 4x thế vào PT(2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 9. Từ $2x + 3y \le 6 \Rightarrow y \le 2 - \frac{2}{3}x \Rightarrow -y \ge \frac{2}{3}x - 2$

$K = x^2 - 2x - y \ge x^2 - 2x + \frac{2x}{3} - 2 = (x - \frac{2}{3})^2 - \frac{22}{9} \ge \frac{-22}{9}$.

Suy ra: $\min K = \frac{-22}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{14}{9}$.

Ta có: $2x^2 + xy \le 4x \quad (x \ge 0)$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y \le -\frac{xy}{2} - y = \frac{-y(x+2)}{2} \le 0.$

Suy ra: $\max K = 0$ khi $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Đề số 28

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 9.

b) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu song song với đường thẳng d: $y = -4x + 3$.

Câu 2. Giải phương trình

a) $2.9^{x-1} - 15.75^x + 100.5^{4x} = 0$;

b) $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$.

Câu 3.

a) Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x \cos x - 3} dx$.

b) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1+2i|=1$, tìm số phức z có modun nhỏ nhất.

Câu 4. Từ bảy chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có năm chữ số khác nhau.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện SAMC và côsin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có A(2;1). Đường cao qua đỉnh B có phương trình x- 3y - 7 = 0. Đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình: x + y +1 = 0. Xác định tọa độ B và C. Tính diện tích ΔABC.

Câu 7. Cho hình lăng trụ ABC $A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1; M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích ΔMC_1D.

Câu 8. Giải phương trình sau : $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$.

Câu 9. Chứng minh rằng nếu:

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a \text{ thì } \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Giải

Câu 1. a) Với m = 9 ta có hàm số $y = x^3-3x^2-9x+2$.

Tập xác định: $\mathbb{R}$

Chiều biến thiên

$$y'=3x^2-6x-9;\ y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$$

$$y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.;\ y'<0 \Leftrightarrow -1<x<3.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên khoảng (-1;3).

Hàm số đạt cực đại tại x = -1 và $y_{CĐ} = 7$.

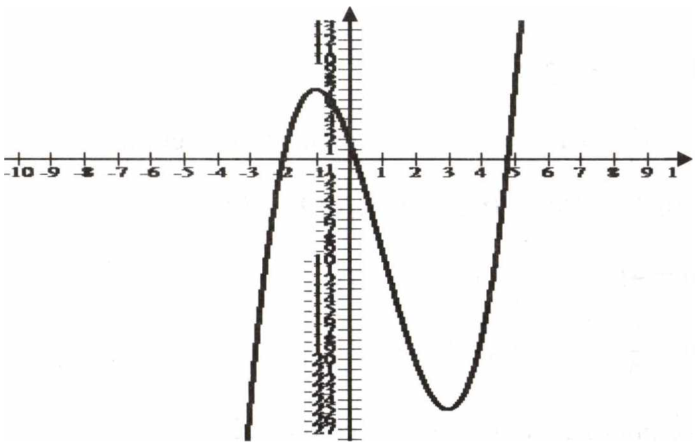
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 3 và $y_{CT} = -25$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Đồ thị



b) Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (*)

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$.

Thực hiện phép chia y cho y' ta được:

$$y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right);$$

$$y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_2 + \left(2-\frac{m}{3}\right).$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là d:

$$y = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x + \left(2-\frac{m}{3}\right).$$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với d: $y = -4x+3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\frac{2m}{3}+2\right) = -4 \\ \left(2-\frac{m}{3}\right) \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 2. a) Ta có $2.3^{2(x-1)} - 9.3^{x-1}5^{2x+1} + 4.5^{2(2x+1)} = 0$.

Đặt $a = 3^{x-1}$ và $b = 5^{2x+1}$. Khi đó, có thể viết phương trình đó dưới dạng

$$2a^2 - 9ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-4b)(2a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = \frac{b}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3^{x-1} = 4.5^{2x+1} & (1) \\ 2.3^{x-1} = 5^{2x+1}. & (2) \end{array}\right.$$

Giải các phương trình (1) và (2) có tất cả 2 nghiệm là:

$$x_1 = \frac{\log_3 60}{\log_3 \frac{3}{25}} \text{ và } x_2 = \frac{\log_5 \frac{2}{15}}{\log_5 \frac{25}{3}}.$$

b) $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$ (1).

Điều kiện: $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$ (*)

Phương trình (a) trở thành:

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x + 2\sin x.\sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x+\cos x-\cos 3x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x.$$

Ta có $\dfrac{\sin x+\cos x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}=\dfrac{(\sin x+\sin 3x)+\cos x}{1+2\sin 2x}$

$$=\frac{2\sin 2x.\cos x+\cos x}{1+2\sin 2x}=\frac{\cos x(1+2\sin 2x)}{1+2\sin 2x}=\cos x.$$

Cho nên (1) $\Leftrightarrow 5\cos x=2+2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x=2$ (vô nghiệm).

Vậy: $\cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Kiểm tra điều kiện $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Câu 3.

a) $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x\cos x-3}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^2+2}dx.$

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow dt=(\cos x+\sin x)dx$.

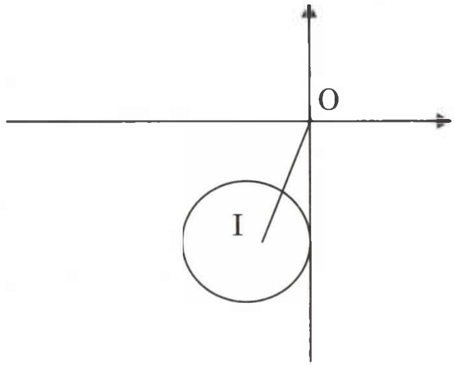
Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$I=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2+2}dt.$

Đặt $t=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow dt=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)du$; $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$.

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\tan^2 u + 2} du \ = -\frac{1}{2} u \Big|_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Gọi z = x + yi, M(x; y) là điểm biểu diễn số phức z.



$|z+1+2i| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1.$

Đường tròn (C): $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$ có tâm (-1;-2)

Đường thẳng OI có phương trình y = 2x.

Số phức z thỏa mãn điều kiện và có môdun nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm biểu diễn nó thuộc (C) và gần gốc tọa độ O nhất, đó chính là một trong hai giao điểm của đường thẳng OI và (C).

Khi đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y = -2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}, \begin{cases} x = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y = -2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Chọn z = $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + i(-2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}})$.

Câu 4. Chữ số hàng đơn vị là 0 có 1.6.5.4.3 = A_6^4 số.

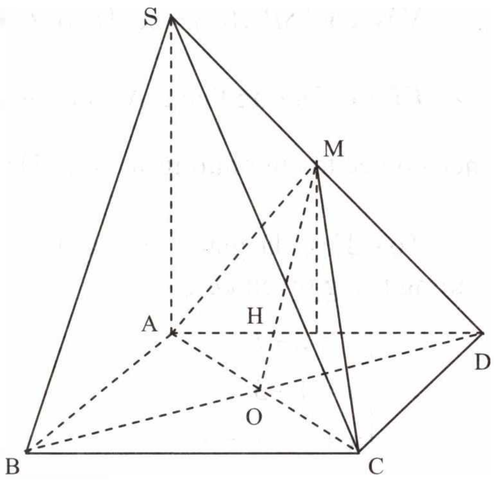
Chữ số hàng đơn vị là 2 hoặc 4 hoặc 6 có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị, 5 cách chọn chữ số hàng vạn (khác 0). Vậy có 3.5.5.4.3 =3.5.A_5^3 số.

Tất cả có $A_6^4 + 3.5.A_5^3$=1260 số.

Câu 5. * Tính thể tích của khối tứ diện SAMC:

+ Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối tứ diện SAMC, khối chóp S.ACD, M.ACD, ta có: $V = V_1 - V_2$

+ $SA \perp (ABCD)$ nên SA là chiều cao của khối chóp S.ACD.



Vậy $V_1 = \frac{1}{3}SA.S_{ACD}$

$$= \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}AD.DC = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Gọi H là trung điểm của AD thì MH//SA nên

$MH \perp (ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$V_2 = \frac{1}{3}MH.S_{ACD} = \frac{1}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}AD.DC = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

* Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC:

Ta có: MO là đường trung bình của tam giác SBD nên:

$MO = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + a^2} = a$ và MO//SB nên góc giữa SB và AC là góc giữa OM và AC

$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AM = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a.$

Trong tam giác OAM có:

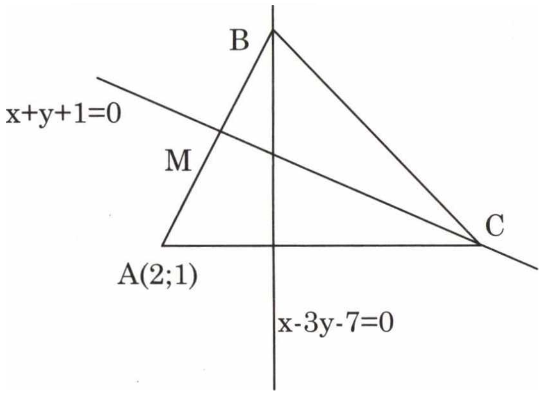
$$\cos\widehat{AOM} = \frac{OA^2 + OM^2 - AM^2}{2.OA.OM} = \frac{\frac{a^2}{2} + a^2 - a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy $\cos(SB,AC)=\cos(OM,OA)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 6. Đường thẳng AC qua A(2;1) và vuông góc với đường cao kẻ qua B, nên có véc tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;-3)\Rightarrow(AC):\begin{cases}x=2+t\\ y=1-3t\end{cases}(t\in R)$.

Tọa độ C là giao của AC với đường trung tuyến kẻ qua C:

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2+t\\ y=1-3t\\ x+y+1=0.\end{cases}$$



Giải ta được: t = 2 và C(4;-5).

Vì B nằm trên đường cao kẻ qua B suy ra B(3a+7;a).

M là trung điểm của AB $\Rightarrow M\left(\frac{3a+9}{2};\frac{a+1}{2}\right)$.

Mặt khác M nằm trên đường trung tuyến kẻ qua C:

$$\Leftrightarrow\frac{3a+9}{2}+\frac{a+1}{2}+1=0\Leftrightarrow a=-3\Leftrightarrow B(-2;-3).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;-4)\Leftrightarrow AB=4\sqrt{2},(AB):\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-4}$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0,h(C;AB)=\frac{|8|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

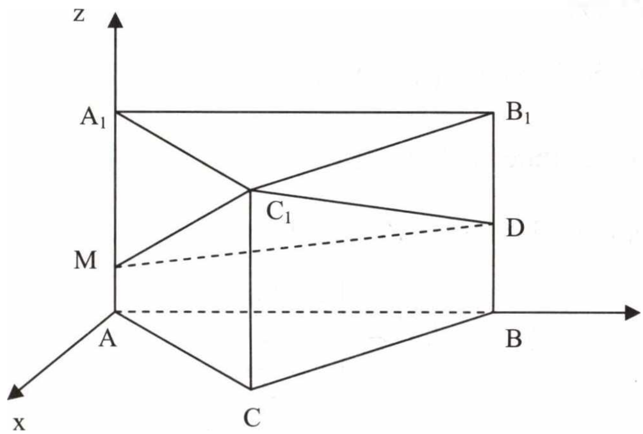
Vậy: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h(C,AB)=\frac{1}{2}.4\sqrt{2}.4\sqrt{2}=16$ (đvdt).

Câu 7.

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O; B ∈ Oy; A_1 ∈ Oz.

Khi đó A(0;0;0), B(0;a;0); A_1 (0;0;2a); $C_1(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a)$ và D(0;a;a).

Do M di động trên AA_1, tọa độ M (0;0;t)với t ∈ [0;2a]



Ta có: $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}\right]\right\|$.

$\overrightarrow{DC_1} = (\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a)$

$\overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a)$

$\left[\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}\right] = \frac{-a}{2}(t-3a; \sqrt{3}(t-a); a\sqrt{3})$

Do đó $\left\|\left[\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}\right]\right\| = \frac{a}{2}\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$

$S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$.

Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của S_{DC_1M} tùy thuộc vào giá trị hàm số

Xét f(t) = $4t^2 - 12at + 15a^2$ $\quad (t \in [0;2a])$

f'(t) = 8t – 12a; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$.

Lập BBT giá trị lớn nhất của $S_{DC_1M} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ khi t =0 hay M≡ A.

Diện tích nhỏ nhất là $\frac{a^2\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = \frac{3a}{2}. \end{array}\right.$

Câu 8. Đk: $x \ge 1$

Nhận xét: Ta viết $\alpha(x-1)+\beta(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Đồng nhất thức ta được $3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Đặt $u=x-1\ge 0, v=x^2+x+1>0$, ta được:

$$3u+2v=7\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=9u \\ v=\frac{1}{4}u. \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình: $x=4\pm\sqrt{6}$.

Câu 9.

Đặt $\sqrt[3]{x}=\sqrt{b}>0$ và $\sqrt[3]{y}=\sqrt{c}>0$ ta có $x^2=b^3$ và $y^2=c^3$.

Thay vào gt ta được $\sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt{c^3+bc^2}=a$

$\Rightarrow a^2=b^3+b^2c+c^3+bc^2+2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2}$.

$a^2=(b+c)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2}=b+c$ hay $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, đpcm.

Đề số 29

Câu 1. Cho hàm số $y=2x^4-4x^2+\frac{3}{2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm *m* để phương trình sau có đúng 8 nghiệm thực phân biệt

$|2x^4-4x^2+\frac{3}{2}|=m^2-m+\frac{1}{2}$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình

$\log^2_{1/5}(x-5)+3\log_{5\sqrt{5}}(x-5)+6\log_{1/25}(x-5)-2\le 0$;

b) Giải phương trình $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

Câu 3.a) Tính tích phân $I = \int_1^2 \ln(x^2 + x)dx$;

b) Tìm phần thực của số phức $z = (1 + i)^n$, biết rằng $n \in N$ thỏa mãn phương trình $\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3$.

Câu 4. Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển Newton của biểu thức $\left(\frac{2}{x^3} + x^5\right)^n$, biết rằng: $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{13}$.

Câu 5. Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại đỉnh B, BA = BC = 2a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy (ABC) là trung điểm E của AB và SE = 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của EC, SC. M là điểm di động trên tia đối của tia BA sao cho $\widehat{ECM} = \alpha(\alpha < 90^0)$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên MC. Tính thể tích của khối tứ diện EHIJ theo a; α và tìm α để thể tích đó lớn nhất.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có phương trình: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng d: $x - \sqrt{2}\,y + 2 = 0$. Đường thẳng d cắt elip (E) tại 2 điểm B, C. Tìm điểm A trên elip (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Câu 7. Trong không gian O*xyz*, cho điểm A(1; -2; -5) và đường thẳng (d) có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d). Tìm tọa độ giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d). Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm A và O.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $\sqrt{(m+2)x + m} \geq |x - 1|$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$.

Câu 9. Cho các số dương a, b, c.

Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y' = 8x^3 - 8x = 8x\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

HS đồng biến trên (-1;0) và (1;+∞).

HS nghịch biến trên (-∞;-1) và (0; 1).

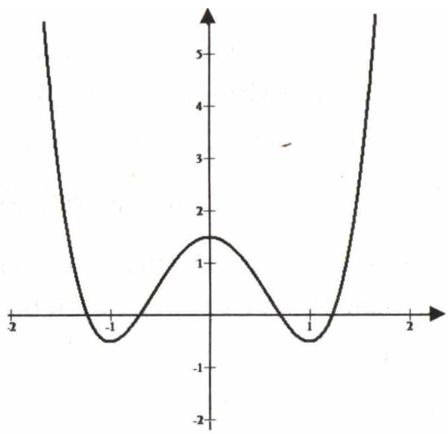
$\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}\right) = +\infty;$

$y_{CD} = y(0) = \frac{3}{2};$ $\qquad$ $y_{CT} = y(\pm 1) = -\frac{1}{2}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Đồ thị



b) Phương trình $\left|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}\right| = m^2 - m + \frac{1}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m^2 - m + \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = \left|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}\right|$ tại 8 điểm phân biệt.

Đồ thị $y = |2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}|$ gồm phần (C) ở phía trên trục Ox và đối xứng phần (C) ở phía dưới trục Ox qua Ox.

Từ đồ thị suy ra yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow 0 < m^2 - m + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Câu 2. a) ĐK: $x > 5$.

BPT $\Leftrightarrow \log_5^2(x-5) + 3.\frac{2}{3}\log_5(x-5) - \frac{6}{2}\log_5(x-5) - 2 \le 0.$

Đặt $t = \log_5(x-5)$ ta có BPT:

$t^2 - t - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 2 \Leftrightarrow -1 \le \log_5(x-5) \le 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \le (x-5) \le 25 \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{5} \le x \le 25 + 5 \Leftrightarrow \frac{26}{5} \le x \le 30.$

Nghiệm của BPT là $\frac{26}{5} \le x \le 30$.

b) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}[-\cos 4x + \sin 2x] - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x + \left[-\left(1 - 2\sin^2 2x\right) + \sin 2x\right] - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 < -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in Z).$

Câu 3. a) $I = \int_1^2 \ln(x^2 + x)dx$. Đặt $u = \ln(x^2+x) \Rightarrow du = \frac{2x+1}{x^2+x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\Rightarrow I = \left(x\ln(x^2+x)\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^2+x}{x^2+x}dx = 2\ln 6 - \ln 2 - \int_1^2\left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= 2\ln 6 - \ln 2 - \left(2x - \ln(x+1)\right)\Big|_1^2 = 2\ln 6 - \ln 2 - 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 2.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} n \in N \\ n > 3 \end{cases}$

Phương trình $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9) = 3$

$\Leftrightarrow (n-3)(n+9) = 4^3 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -13. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện được n = 7.

Khi đó $z = (1+i)^n = (1+i)^7$

$$= (1+i).\left[(1+i)^2\right]^3 = (1+i).(2i)^3 = (1+i).(-8i) = 8 - 8i.$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Câu 4. Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - .... + (-1)^n C_n^n x^n = B$

Vì $\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$, $\int_0^1 B dx = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n$

$\Rightarrow n+1 = 13 \Rightarrow n = 12.$

$(\frac{2}{x^3} + x^5)^n = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k.(\frac{2}{x^3})^{n-k}(x^5)^k$, $T_{k+1} = C_{12}^k.2^{12-k}.x^{8k-36}$

$\Rightarrow 8k - 36 = 20 \Leftrightarrow k = 7$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{20} là: $C_{12}^7.2^5 = 25344.$

Câu 5. * Tính thể tích của khối tứ diện EHIJ:

+ Gọi V là thể tích khối tứ diện EHIJ.

Ta có: V = $\frac{1}{3}S.h$, với S là diện tích ΔIHE và h là chiều cao của khối tứ diện.

+ GT suy ra IJ// SE và IJ=$\frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}.2a = a$; Vì SE $\perp (ABC) \Rightarrow$ IJ $\perp (IHE)$.

Vậy h = IJ = a.

Δ EBC vuông tại B có EB = $\frac{1}{2}AB$ = a; BC = 2a nên

EC = $\sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

+ Vì SE $\perp$ (ABC) nên HE là hình chiếu của SH trên mặt phẳng (ABC), do SH $\perp$ CM nên EH $\perp$ CM. Vậy tam giác CHE vuông tại H và có $\widehat{ECH} = \widehat{ECM} = \alpha$

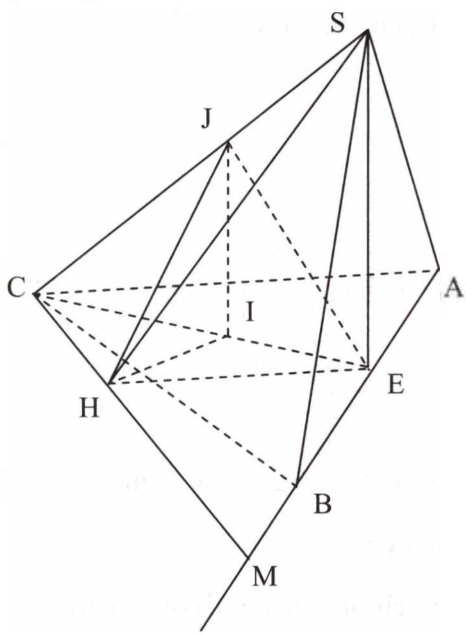
$\Rightarrow CH = CE.\cos\widehat{ECH} = a\sqrt{5}.\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{\Delta ECH} = \frac{1}{2}CE.CH.\sin\alpha = \frac{1}{2}.a\sqrt{5}.a\sqrt{5}\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{5a^2}{4}.\sin 2\alpha.$

Do I là trung điểm của CE nên

S = $\frac{1}{2}S_{\Delta ECH} = \frac{5a^2}{8}.\sin 2\alpha.$

Vậy V = $\frac{5a^3}{24}.\sin 2\alpha.$



* Tìm α để thể tích V của khối tứ diện EHIJ lớn nhất:

Ta có:

V= $\frac{5a^3}{24}.\sin 2\alpha \le \frac{5a^3}{24}$ $(do\ \sin 2\alpha \le 1)$.

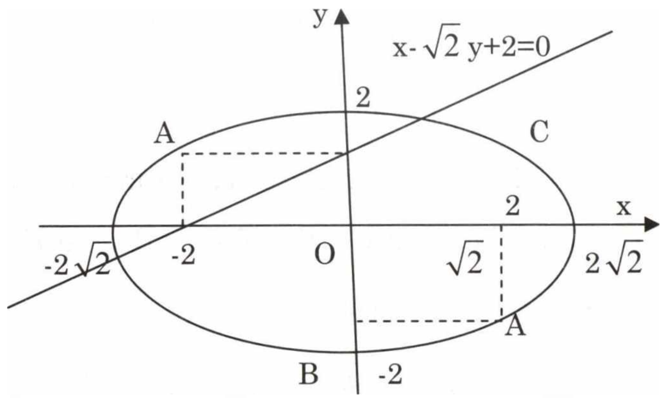
Vậy V lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 90^0$

$\Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Câu 6. Do đường thẳng d cố định cho nên B,C cố định, có nghĩa là cạnh đáy BC của tam giác ABC cố định. Diện tích tam giác lớn nhất khi khoảng cách từ A (trên E) là lớn nhất.

Phương trình tham số của (E): $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow A\left(2\sqrt{2}\sin t; 2\cos t\right)$



Ta có: $\Leftrightarrow h(A,d)=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\sin t-2\sqrt{2}\cos t+2\right|}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{\left|2\sqrt{2}(\sin t-\cos t)+2\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|4\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+2\right|}{\sqrt{3}}\le\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow x=2.$

Thay tọa độ 2 điểm A tìm được ta thấy điểm $A\left(2;-\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn.

Câu 7.

+) Đường thẳng (d) đi qua $M_0(1;-1;0)$ và có VTCP là: $\vec{a}=(2;-1;2)$.

Do mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;-5)$ và vuông góc với (d) nên VTPT của (P) là $\vec{n}=\vec{a}=(2;-1;2)$.

Suy ra phương trình của mặt phẳng (P):

$2(x-1)-1(y+2)+2(z+5)=0\Leftrightarrow 2x-y+2z+6=0.$

Tọa độ giao điểm H của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ x + 2y = -1 \\ 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow H(-1;0;-2).$$

Phương trình tham số của (d): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Do tâm I của mặt cầu (S) thuộc (d) nên $I(1+2t;-1-t;2t)$.

+) Do mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, O nên: $IO = IA \Leftrightarrow IO^2 = IA^2$

$\Leftrightarrow (1+2t)^2 + (-1-t)^2 + (2t)^2 = (2t)^2 + (1-t)^2 + (2t+5)^2$

$\Leftrightarrow 1 + 4t + 4t^2 + 1 + 2t + t^2 + 4t^2 = 4t^2 + 1 - 2t + t^2 + 4t^2 + 20t + 25$

$\Leftrightarrow t = -2.$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-3;1;-4)$, bán kính $R = IO = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}.$

Vậy phương trình của (S) là: $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 26.$

Câu 8. Ta có $\sqrt{(m+2)x+m} \geq |x-1| \Leftrightarrow (m+2)x + m \geq x^2 - 2x + 1$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 4x + 1}{x+1} \text{ (vì } x \in [0;2]).$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{6}.$$

Bảng biến thiên

$f(0) = 1; f(2) = -1;$

$f(-1+\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 6.$

x	0		$-1+\sqrt{6}$		2
f'(x)		–	0	+	
f(x)	1	↘	$2\sqrt{6}-6$	↗	-1

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[0;2]} f(x) = f\left(-1+\sqrt{6}\right) = 2\sqrt{6}-6$.

Câu 9. Vì các số a,b,c dương nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số ta có: $\sqrt{a(b+c)} \le \dfrac{a+(b+c)}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} = \dfrac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \ge \dfrac{2a}{a+b+c}$.

Tương tự ta cũng có:

$\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \ge \dfrac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2c}{a+b+c}$.

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$, không thoả mãn.

Vậy $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$.

Đề số 30

Câu 1. Chuyên VP Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các giá trị m để đường thẳng $(d_1): y = -3x+m$ cắt đồ thị (C) tại A và B sao cho trọng tâm của tam giác OAB thuộc đường thẳng $(d_2): x-2y+2=0$ (O là gốc toạ độ).

Câu 2. Giải phương trình:

a) $\log_7(x - 3) + \log_7(x - 1) = 3$;

b) $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Câu 3. a) Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2-\cos^2 x + 2\sin x}dx$.

b) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

Câu 4. Có hai hộp cùng chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Hộp thứ hai có 6 quả cầu đỏ, 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên 1 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu đỏ và xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền $AB = \sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn, góc giữa mặt phẳng (A_1AC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Hãy tính thể tích của khối lăng trụ.

Câu 6. Trong hệ trục 0xy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-8x+12=0$ và điểm E(4;1). Tìm toạ độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C), với A,B là các tiếp điểm sao cho E thuộc đường thẳng AB.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(–1; 0; 2), mặt phẳng (P): $2x - y - z + 3 = 0$ và đường thẳng (d): $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-6}{1}$. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song (P).

Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x+y} + \sqrt{2x+y} = 4 \\ \sqrt{2x+y} + x + y = -2.\end{cases}$

Câu 9. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Giải

Câu 1. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên

\+ $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in D.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng : $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

\+ Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=2\Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

• Bảng biến thiên:

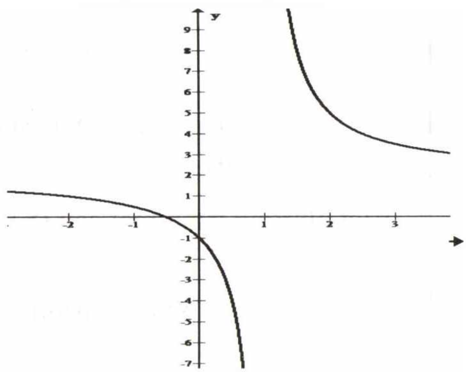
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	2 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 2

b) Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{2x+1}{x-1}=-3x+m$

$\Leftrightarrow 3x^2-(1+m)x+m+1=0\,(1),(x\neq 1)$

(d_1) cắt đồ thị (C) tại A và $B \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (1+m)^2 - 12(1+m) > 0 \\ 3-(1+m)+(1+m) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m<0 \vee 1+m>12 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>11 \end{array}\right. (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1). Khi đó $A(x_1;-3x_1+m); B(x_2;-3x_2+m)$. Gọi

G là trọng tâm tam giác $OAB \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_1+x_2+0}{3} = \dfrac{m+1}{9} \\ y_G = \dfrac{y_1+y_2+0}{3} = \dfrac{-3(x_1+x_2)+2m}{3} = \dfrac{m-1}{3}. \end{cases}$

$$G \in (d_2) \Leftrightarrow x_G - 2y_G + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2\left(\frac{m-1}{3}\right) + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow m = 5$ không thoả mãn $(*)$.

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. a) $\log_7(x-3) + \log_7(x-1) = 3$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} x-3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \log_7(x-3)(x-1) = 3 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 343$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-2\sqrt{86} \\ x = 2+2\sqrt{86}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 2+2\sqrt{86}$.

b) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0.$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in Z)$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1+\cos x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{(1-\sin x)}{2}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\left(1-\sin^2 x\right)}-\frac{1+\cos x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)}{2}\frac{(1+\cos x)}{(1+\sin x)}-\frac{1+\cos x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{2}\left[\frac{1-\cos x}{1+\sin x}-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{2}\left[\frac{-\cos x-\sin x}{1+\sin x}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in Z).$$

Câu 3. a) Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2-\cos^2 x+2\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x.\cos x}{\sin^2 x+2\sin x+1}dx$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$I=2\int_0^1\frac{tdt}{t^2+2t+1}=2\int_0^1\frac{tdt}{(t+1)^2}=2\int_0^1\frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}dt=2\left[\int_0^1\frac{dt}{t+1}-\int_0^1\frac{1}{(t+1)^2}dt\right]$$

$$I=2\left[\ln(t+1)\Big|_0^1+\frac{1}{t+1}\Big|_0^1\right]=2\ln 2-1.$$

b) Giải phương trình đã cho ta được các nghiệm:

$$z_1=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ z_2=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{1^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{22}}{2};\ z_1+z_2=2$.

Do đó $\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}=...=\frac{11}{4}.$

Câu 4.

+ Gọi: A là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ nhất màu đỏ".

B là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ hai màu đỏ".

X là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ".

Ta có X = AB, $P(A) = \frac{7}{12}$, $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Mặt khác A và B độc lập nên $P(X) = P(A)(B) = \frac{7}{12}.\frac{3}{5} = \frac{7}{20}$.

+ Gọi: Y là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu xanh".

Z là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu".

Ta có $Y = \overline{AB}$.

Mặt khác $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập nên

$$P(Y) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1-\frac{7}{12}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{6}.$$

Thấy rằng $Z = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$ nên $P(Z) = P(X) + P(Y) = \frac{7}{20}+\frac{1}{6}=\frac{31}{60}$.

Câu 5. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

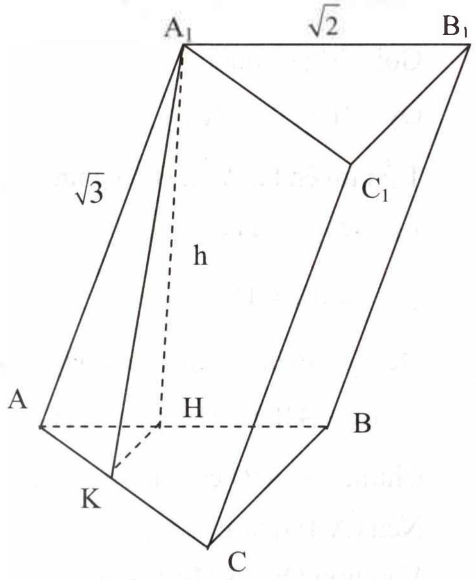
+ Gt: $(A_1AB) \perp (ABC)$. Từ A_1 dựng $A_1H \perp AB$ tại H

$\Rightarrow A_1H \perp (ABC) \Rightarrow A_1H$ là chiều cao lăng trụ. Đặt $A_1H = h$.

+ Dựng $HK \perp AC$ tại K (HK//BC) thì ΔAKH cũng vuông cân tại K.

HK là hình chiếu của A_1K trên (ABC) mà $AC \perp HK$ nên $AC \perp A_1K$.

Vậy $((A_1AC),(ABC)) = \widehat{A_1KH} = 60^0$.



ΔA_1HK vuông tại H:

$\Rightarrow HK = A_1H.\cot \widehat{A_1KH}$

$$= h\cot 60^0 = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

ΔAHK vuông cân tại K $\Rightarrow AH = HK\sqrt{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ΔA_1HK vuông tại H $\Rightarrow A_1H^2 + HA^2 = A_1A^2$

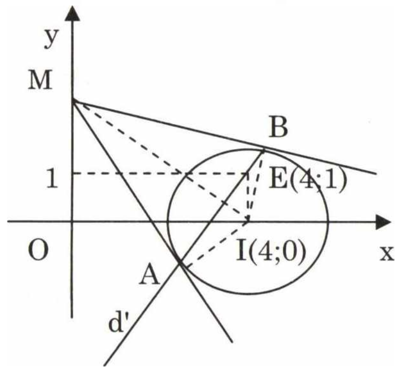
$\Leftrightarrow h^2 + \dfrac{2h^2}{3} = 3 \Leftrightarrow 5h^2 = 9 \Rightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{5}}.$

$V = S_{ABC}.AH = \dfrac{1}{2}.CA.CB.h = \dfrac{1}{2}CA^2.\dfrac{3}{\sqrt{5}}.$

$\Delta ABC, \widehat{C} = 1v \Rightarrow AC^2 + CB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AC^2 = 2 \Rightarrow AC = 1.$

Vậy $V = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (đvtt).

Câu 6. Đường tròn (C):



$(x-4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow I(4;0), R = 2.$

Gọi M(0;a) thuộc

Oy . $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) \in (C)$.

Tiếp tuyến tại A và B có phương trình là:

$(x_1-4)(x-4) + y_1y = 4$,

$(x_2-4)(x-4) + y_2y = 4$.

Để thỏa mãn 2 tiếp tuyến này cùng qua M(0;a)

$\Leftrightarrow (x_1-4)(0-4) + y_1a = 4, (x_2-4)(0-4) + y_1a = 4.$

Chứng tỏ (AB) có phương trình: -4(x-4)+ay=4

Nếu (AB) qua E(4;1): -4(0)+a.1=4 suy ra: a=4

Vậy trên Oy có M(0;4) thỏa mãn.

Câu 7.

+) Đặt t = $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-6}{1}$ $\Rightarrow$ x = 3 + 2t; y = 2 + 4t và z = 6 + t.

Thay vào phương trình mp(P) giải được t = 1.

Từ đó tìm được tọa độ giao điểm là M(5; 6; 7).

Do mặt phẳng (Q) qua A và song song (P) nên có phương trình dạng

2x – y – z + d = 0.

Vì (Q) qua A(–1; 0; 2), nên có d = 4.

Vậy pt (Q): 2x – y – z + 4 = 0.

+) Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính

$$R = d(A, (P)) = \frac{|2(-1)-2+3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{6}$.

Câu 8. Điều kiện: $\begin{cases}4x+y\ge 0\\ 2x+y\ge 0.\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{2x+y}\\ b=\sqrt{4x+y}\end{cases}$, $(a\ge 0, b\ge 0)$. Suy ra: $x+y=\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{b^2}{2}$.

Ta có hệ

$$\begin{cases}a+\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{1}{2}b^2=-2\\ a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+5a-6=0\\ b=4-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-6\end{array}\right.\\ b=4-a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\\ \begin{cases}a=-6\\ b=10.\end{cases}\end{array}\right.$$

Với điều kiện $a\ge 0, b\ge 0$, ta được:

$$\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x+y}=1\\ \sqrt{4x+y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ 4x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-7.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (4; -7).

Câu 9. Với các số dương x, y ta có:

$$\left(x+y\right)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta, có:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} = a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\geq a.\frac{4}{b+c}+b.\frac{4}{c+a}+c.\frac{4}{a+b} = 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập - Chế bản: 04 3971 4896
Hành chính: (04) 3971 4899; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc - Tổng biên tập: **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

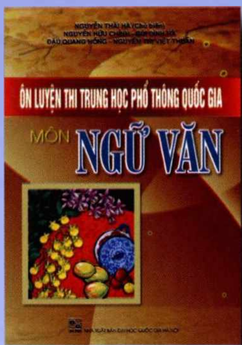
Biên tập:	**NGỌC THẮNG**
Chế bản:	**PHẠM HỒNG THÚY**
Trình bày bìa:	**BÙI MẠNH CHIẾN**
Đối tác liên kết xuất bản:	**CÔNG TY THƯƠNG MẠI ĐÔNG NAM**

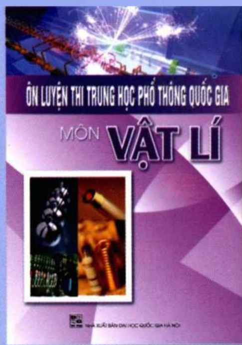
SÁCH LIÊN KẾT

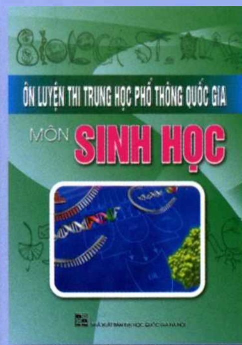
ÔN LUYỆN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA MÔN TOÁN

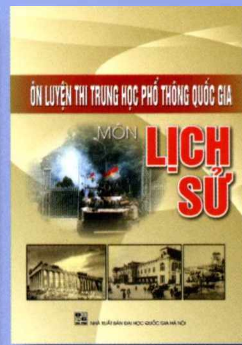
Mã số: 1L-82ĐH2015
In 1.000 cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại Công ty Cổ phần In Hà Nội - Lô 6B, CN5 cụm Công nghiệp Ngọc Hồi - Thanh Trì - Hà Nội.
Số xuất bản: 285-2015/CXB/16-57/ĐHQGHN ngày 12/02/2015.
Quyết định xuất bản số: 89 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2015.
Mã ISBN: 978-604-62-2212-5

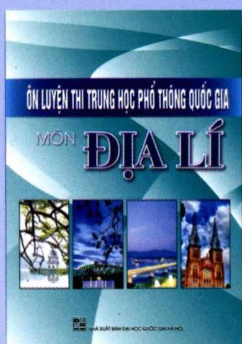
Tìm đọc

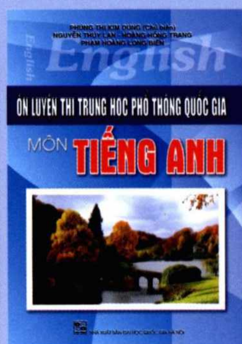


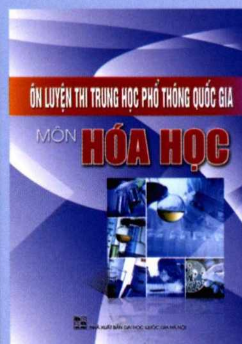












SÁCH LIÊN KẾT VỚI CÔNG TY TNHH TM ĐÔNG NAM

ĐƯỢC PHÂN PHỐI TẠI:

HÀ NỘI

Nhà sách Kinh Đô
93 Phùng Hưng
Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội
ĐT: 04.39360822 * Fax: 04.39360823
E-mail: nhasachkinhdo@vnn.vn
http://www.nhasachkinhdo.com

TP HỒ CHÍ MINH

Nhà sách Kinh Đô 2
225A Nguyễn Tri Phương - Phường 9
Quận 5 - Tp Hồ Chí Minh
ĐT: 08.38547462 * Fax: 08.38547467
E-mail: nhasachkinhdo2@vnn.vn
http://www.nhasachkinhdo2.com

8 935206 515619

Giá: 59.000đ