Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$ đều dương

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$$

Từ đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 3+2\sqrt{2}$; $\cot\frac{\alpha}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

b) T là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 nên số phần tử của T là $A_7^2 - A_6^1 = 36$

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{36}^2$

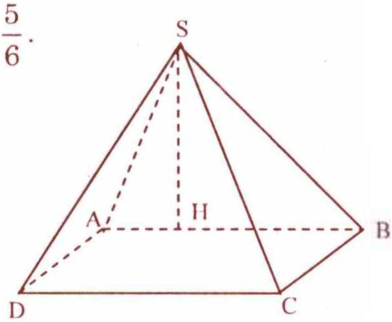
Gọi biến cố A: 'tích hai số được chọn là số chẵn".Ta có tích hai số là số chẵn khi cả hai số cùng chẵn hoặc có một số chẵn, một số lẻ.

Trong 36 số của tập T có 15 số lẻ và 21 số chẵn. Suy ra số cách chọn cả hai số chẵn là C_{21}^2; cách chọn một số chẵn, một số lẻ là $C_{21}^1.C_{15}^1$.

Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_{21}^2 + C_{21}^1.C_{15}^1$.

Vậy xác suất $P(A) = \frac{C_{21}^2 + C_{21}^1.C_{15}^1}{C_{36}^2} = \frac{5}{6}$.

Câu 7.



Ta có $CB \perp AB \Rightarrow CB \perp SB$

Suy ra $SB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

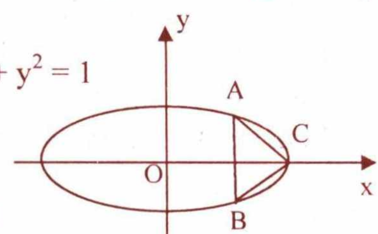
$\Rightarrow AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$

Vậy $\widehat{ASB} = 90^0$.

Mà $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy thể tích: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Tam giác ABC đều có đỉnh C thuộc Ox nên A, B đối xứng nhau qua Ox.



Gọi $A(x_0; y_0)$ và $B(x_0; -y_0)$ thuộc (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

thì $AC = AB = 2|y_0|$ nên ta có:

$$\begin{cases} y_0^2 + (2-x_0)^2 = 4y_0^2 \\ \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{2}{7}; y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 2$; $y_0 = 0$ khi đó $C \equiv A$ hoặc $C \equiv B$ (loại).

Vậy hai điểm A, B là: $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Câu 9. Điều kiện: $x \in \{-1\} \cup [1;+\infty)$, $x - y \geq 0$.

Với $x = -1$: không thỏa hệ

Với $x \neq -1$. Biến đổi phương trình đầu của hệ thành

$$2(x+1)(x-y) + (x-1) = 3\sqrt{(x-y)(x^2-1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{(x-y)(x+1)} = \sqrt{x-1} \\ 2\sqrt{(x-y)(x+1)} = \sqrt{x-1}\end{array}\right. \quad (*)$$

Bình phương hai vế phương trình thứ hai $(x+1)(x-y) = \frac{1}{4}$

Thế vào (*) tìm được tất cả các nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x;y) = \left(\frac{5}{4};\frac{41}{36}\right);\left(2;\frac{23}{12}\right).$$

Câu 10. Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \max\{x; y\}$

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau:

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} - 3 \geq \left(\frac{x+y}{x+z} - 1\right) + \left(\frac{y+z}{y+x} - 1\right) + \left(\frac{z+x}{z+y} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)}{xy+yz+zx} \geq \frac{y-z}{x+z} + \frac{z-x}{y+z} + \frac{x-y}{z+y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{xy+yz+zx} - \frac{1}{z+y}\right) + (y-z)\left(\frac{y}{xy+yz+zx} - \frac{1}{x+z}\right)$$

$$+(z-x)\left(\frac{z}{xy+yz+zx} - \frac{1}{y+x}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\frac{yz}{y+z} + (y-z)\frac{zx}{z+x} + (z-x)\frac{xy}{x+y} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{yz}{y+z} - \frac{zx}{z+x}\right) + (z-x)\left(\frac{xy}{x+y} - \frac{zx}{z+x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2z^2}{(y+z)(z+x)} + \frac{x^2(z-x)(y-z)}{(x+y)(z+x)} \leq 0 : \text{đúng.}$$

ĐỀ SỐ 25

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \cos^2 2x - \sin x\cos x + 4$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y+1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ và C ở trên đường thẳng d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết các đỉnh A, B ở trên trục Oz.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\cos x(1 + 2\sqrt{3}\sin 2x) = \cos 3x - 4\cos(\dfrac{3\pi}{2} - 2x)$.

b) Trong kì thi tuyển sinh, trường A có 5 học sinh gồm 3 nam và 2 nữ cùng đỗ vào khoa X của một trường Đại học. Số sinh viên đó vào khoa X được chia ngẫu nhiên thành 4 lớp. Tính xác xuất để có một lớp có đúng 2 nam và 1 nữ của trường A.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến (BCB'C') bằng a, khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b và góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) là φ. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo φ, a và b.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm C(2; –5) và đường thẳng Δ: $3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên Δ, tọa độ hai điểm A và B, biết A, B đối xứng nhau qua điểm $I\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$ và diện tích tam giác ABC bằng 15.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{x - 1} \le x$.

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số thực x, y, z $\in$ [1; 3]. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{36x}{yz} + \dfrac{2y}{zx} + \dfrac{z}{xy}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = \frac{1}{2}$ nên tiệm cận ngang: $y = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng: $x = -\frac{3}{2}$.

$y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

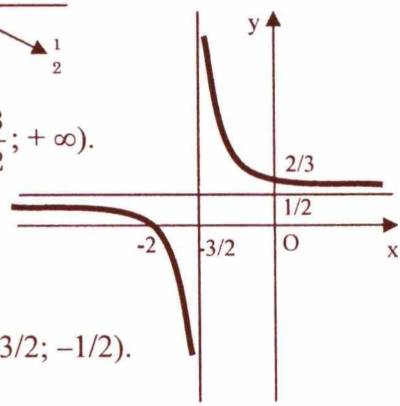
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\frac{3}{2})$ và $(-\frac{3}{2}; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

- Đồ thị:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$; $y = 0 \Rightarrow x = -2$.

Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận $I(-3/2; -1/2)$.



Câu 2.

Ta có $y = 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 5$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \le t \le 1$ thì $y = f(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5$.

$f'(t) = -2t - \frac{1}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$: chọn.

So sánh: $f(-1) = \frac{9}{4}$, $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}$, $f(1) = \frac{7}{2}$.

Vậy $\min y = \frac{9}{4}$, $\max y = \frac{81}{16}$.

Câu 3.

a) Ta có: $(iz - 1)(z + 3i)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$ nên:
– hoặc $iz - 1 = 0$ tức là $z = -i$
– hoặc $z + 3i = 0$ tức là $z = -3i$
– hoặc $\bar{z} - 2 + 3i = 0$ tức là $z - 2 - 3i = 0$ hay $z = 2 + 3i$

Vậy phương trình có ba nghiệm là: –i, –3i và 2 + 3i.

b) Điều kiện $y^2 + 2x > 0$.

Hệ đã cho: $\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y+1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2)(2x - y - 1) = 0 & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x = y + 1 \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^3 + 2x) = 0 \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$ (3)

Xét hàm số $f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$ trên **R** thì

$$f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2(y+1)^2 + 1}{y^2+y+1} > 0, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Do đó hàm số đồng biến trên **R** mà $f(-1) = 0$ nên $y = -1$ là nghiệm duy nhất của (3) $\Rightarrow x = 0$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (0; –1).

Câu 4. Đổi biến $x = \frac{4}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{4\sin t}{\cos^2 t}dt$.

Khi $x = 4 \Rightarrow t = 0$; $x = 8 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = 4(\tan t - t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 4\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Câu 5. Hạ $CH \perp Oz$, ta có $CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$

$C \in d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ nên C(t; –t; t), ta có H(0; 0; t)

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (-t; t; 0) \Rightarrow CH^2 = 2t^2$ nên $t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Vậy điểm: C(–1; 1; –1) hay C(1; –1; 1).

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình đã cho như sau:

$\cos x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = \cos 3x + 4\sin 2x$

$\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) + 4\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(2 - \sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin(x + \dfrac{\pi}{3}) = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., (k \in \mathbf{Z})$$

b) Với mỗi học sinh có 4 cách sắp xếp vào một lớp nào đó trong 4 lớp. Suy ra số cách sắp xếp lớp cho 5 học sinh vào 4 lớp là 4^5.

Số cách chọn 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ trong 5 học sinh là $C_3^2.C_2^1$.

Với mỗi cách chọn trên, có 4 cách xếp 3 học sinh đó vào một lớp và có 3^2 cách xếp 2 học sinh không được chọn vào 3 lớp còn lại.

Suy ra số cách xếp có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ vào một lớp là $4C_3^2.C_2^1.3^2$.

Từ đó xác xuất cần tính là $P = \dfrac{4C_3^2.C_2^1.3^2}{4^5} = \dfrac{27}{128}$.

Câu 7. Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCB'C')$.

Ta có: $AA' // (BCB'C')$nên $d(AA', (BCB'C')) = d(A, (BCB'C')) = AH = a$.

Hạ $CK \perp AC'$ vì $AB \perp CK$ và $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (ACA'C')$

Nên $AB \perp CK \Rightarrow CK \perp (ABC') \Rightarrow CK = d(C, (ABC')) = b$

Ta có $AB \perp (ACA'C') \Rightarrow \widehat{CAC'} = \varphi$

$$AC = \frac{CK}{\sin\phi} = \frac{b}{\sin\phi} \text{ và } CC' = \frac{CK}{\cos\phi} = \frac{b}{\cos\phi}$$

Hơn nữa: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{a^2\sin^2\phi}{a^2b^2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\phi}}$$

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{ab^2}{2\sin\phi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\phi}}$

Vậy: $V = CC'.S_{ABC} = \dfrac{ab^3}{\sin 2\phi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\phi}}$.

Câu 8. Hai điểm A và B thuộc đường thẳng Δ: $3x - 4y + 4 =$ và A, B đối xứng nhau qua điểm $I\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ và diện tích tam giác $S = 15$.

Ta có $A\left(t;\dfrac{3t+4}{4}\right)$, $B\left(4-t;\dfrac{16-3t}{4}\right)$, $d(C;\Delta) = 6$.

Theo giả thiết: $AI = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{25}{4} = (2-t)^2 + \left(\dfrac{6-3t}{4}\right)^2 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = 4$

Vậy A(0; 1), B(4; 4) hoặc ngược lại.

Câu 9. Điều kiện: $x \geq 1$.

BPT: $\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{x-1} \leq x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x - 1} \leq x + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leq x^2 + x - 1 + 2x\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 \leq 2x\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x \leq 2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 4x - 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2$ Vậy nghiệm bất phương trình là $x = 2$

Câu 10. Xét $f(x) = \dfrac{36x}{yz} + \dfrac{2y}{zx} + \dfrac{z}{xy}$, $x \in [1; 3]$, với y, z là các tham số. Ta có:

$$f'(x) = \frac{36}{yz} - \frac{2y}{zx^2} - \frac{z}{x^2y} = \frac{36x^2 - 2y^2 - z^2}{x^2yz} \geq \frac{36 - 2.9 - 9}{x^2yz} > 0.$$

Suy ra f(x) đồng biến trên [1; 3] nên

$$f(x) \geq f(1) = \frac{36}{yz} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{y} = g(y),\ y \in [1; 3], \text{ với z là tham số}$$

$$g'(y) = -\frac{36}{y^2z} + \frac{2}{z} - \frac{z}{y^2} = \frac{-36 + 2y^2 - z^2}{y^2z} \leq \frac{-36 + 2.9 - 1^2}{y^2z} < 0$$

Suy ra g(y) nghịch biến trên [1; 3]

$$\Rightarrow g(y) \geq g(3) = \frac{12}{z} + \frac{6}{z} + \frac{z}{3} = \frac{18}{z} + \frac{z}{3} = h(z),\ z \in [1; 3]$$

$$h'(z) = -\frac{18}{z^2} + \frac{1}{3} \leq -\frac{18}{9} + \frac{1}{3} < 0$$

$\Rightarrow$ h(z) nghịch biến trên [1; 3] $\Rightarrow h(z) \geq h(3) = \dfrac{18}{3} + 1 = 7$

Do đó $P \geq 7$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = z = 3$

Vậy min P = 7.

ĐỀ SỐ 26

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị hàm số: $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{2}mx^2$ (1) có 3 cực trị là 3 đỉnh của tam giác đều.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $2iz^2 - 2(5i + 2)z + 28i + 4 = 0$.

b) Giải bất phương trình: $2^{x+7}.3^{3x+2} < 6^{2x+5}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số: $y = \dfrac{1}{x}$, $y = -x + 2$ và $y = 2$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm A(3; – 2; 4), B(–1; 4; –4). Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{638}}{3}$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính: $T = \frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{37} trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Câu 7. (1 điểm) Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau từng đôi một. Chứng minh: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ và trong bốn mặt của tứ diện ABCD có ít nhất một mặt là tam giác có 3 góc đều là góc nhọn.

Câu 8. (1 điểm) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm I(2; 1) và đường thẳng Δ_1: $x - y + 1 = 0$, Δ_2: $7x - y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I sao cho hình phẳng được giới hạn bởi ba đường thẳng Δ_1, Δ_2 và Δ là một tam giác cân có đáy ở trên Δ.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a^a b^b c^c)^2[a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)}]^3 \geq 27 \text{ với } a, b, c > 0.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^3 - 3x^2$.

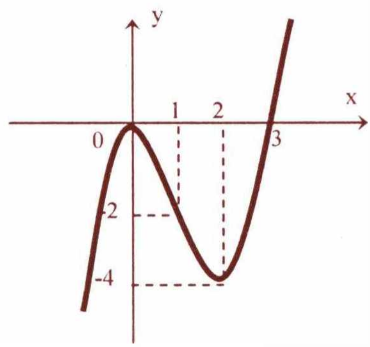
• Tập xác định: D = **R**

• Sự biến thiên: $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	−4	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$, $(2, +\infty)$, nghịch biến trên (0,2) và có điểm CĐ(0; 0), CT(2; –4)

• Đồ thị $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Tâm đối xứng lag điểm uốn I(1; –2)

Câu 2.

Tập xác định D = **R**.

$y' = -x^3 + 3mx = -x(x^2 - 3m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = 3m$.

Điều kiện đồ thị (1) có 3 cực trị là $3m > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó 3 điểm cực trị: $O(0; 0)$, $A\left(-\sqrt{3m}; \frac{9}{4}m^2\right)$, $B\left(\sqrt{3m}; \frac{9}{4}m^2\right)$.

Tam giác OAB đều $\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OA = AB \end{cases} \Leftrightarrow OA = AB$

$\Leftrightarrow m^3 = \sqrt{3m + \frac{81}{16}m^4} = 2\sqrt{3m} \Leftrightarrow 3m + \frac{81}{16}m^4 = 12m$

$\Leftrightarrow m^3 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}\sqrt[3]{6}$ (chọn). Vậy giá trị cần tìm: $m = \frac{2}{3}\sqrt[3]{6}$.

Câu 3.

a) Phương trình: $2iz^2 - 2(5i + 2)z + 28i + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2z^2 - 2(5-2i)z + 28 - 4i = 0$. $\Delta' = (5 - 2i)^2 - 2(28 - 4i) = -35 - 12i$

Ta tìm các căn bậc hai $x + yi$, $(x, y \in \mathbf{R})$ của Δ':

$$(x + yi)^2 = -35 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -35 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

Ta có: $x^2 + y^2 = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1369} = 37$.

Do đó giải được 2 căn bậc 2 là: $\pm(1 - 6i)$.

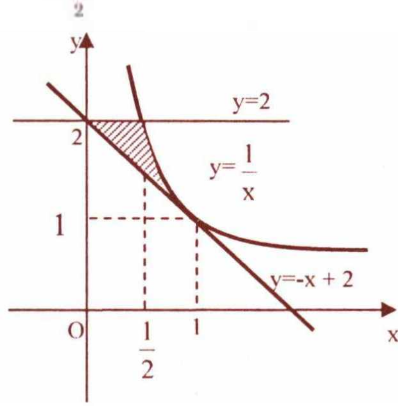
nên phương trình có 2 nghiệm: $z_1 = 3 - 4i$, và $z_2 = 2 + 2i$.

b) Ta có bất phương trình:

$$2^{x+7}.3^{3x+2} < 6^{2x+5} \Leftrightarrow 2^{2x+5}\,3^{2x+5} > 2^{x+7}.3^{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-2} > 3^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} < 2 \Leftrightarrow x < 3 + \log_{\frac{3}{2}} 2$$

Vậy nghiệm BPT là $x < 3 + \log_{\frac{3}{2}} 2$.



Câu 4. Ta có diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$y = \frac{1}{x}$, $y = -x + 2$ và $y = 2$.

$$S = \int_0^{1/2}\left(2-(-x+2)\right)dx + \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} - (-x+2)\right)dx$$

$$= \int_0^{1/2} x\,dx + \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} + x - 2\right)dx$$

Do đó $S = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2} + \left.\left(\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_{1/2}^{1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích: $S = \ln 2 - \frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 5. Gọi E(0; y; z) và H(1; 1; 0) là trung điểm AB.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; -8)$, $\overrightarrow{EH} = (1; 1 - y; -z)$.

Tam giác EAB cân tại E và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{638}}{3}$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ EH = \frac{2S}{AB} = \frac{\sqrt{22}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z - 3y + 1 = 0 \\ 1 + (1-y)^2 + z^2 = \frac{22}{9} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: (y;z)= $(\frac{5}{3};1)$; $(-\frac{11}{75};\frac{-9}{25})$

Vậy $E\left(0;\frac{5}{3};1\right)$ hoặc $E\left(0;-\frac{11}{75};-\frac{9}{25}\right)$.

Câu 6.

a) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $\tan\alpha > 0$. Ta có:

$$\tan\alpha - 3\cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan\alpha - \frac{3}{\tan\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - 2\tan\alpha - 3 = 0$$

Vì $\tan\alpha > 0$ nên chọn $\tan\alpha = 3$.

Ta có $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

Do đó $T = \frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \frac{\frac{-6}{\sqrt{10}} - 3}{\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{3}} = -9.\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}-3}$

Vậy $T = -9(16 + 5\sqrt{10})$.

b) Dùng khai triển: $2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k$

và hệ số $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$ với k = n + 1,.., 2n + 1

thì được: $C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1$

Theo giả thiết, suy ra n = 10.

Khai triển: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k} (x^7)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Chọn k sao cho: $11k - 40 = 37 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy hệ số của x^{37} là C_{10}^7.

Câu 7. Ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = 0$: đúng.

Tương tự thì có:

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.

$DB^2 + DC^2 - BC^2 = DA^2 + DC^2 - AC^2 = DA^2 + DB^2 - AB^2$

Suy ra: $\widehat{ADB}$; $\widehat{BDC}$; $\widehat{CDA}$ cùng nhọn; cùng vuông hoặc cùng tù.

Mặt khác, có tối đa 1 đỉnh của tứ diện có 3 góc quanh đỉnh đó cùng vuông hoặc cùng tù thì mặt đối diện đỉnh này là tam giác nhọn.

Câu 8. Hai phân giác của các góc giữa Δ_1 và Δ_2 là:

$$5(x - y + 1) = \pm(7x - y - 5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 2y - 5 = 0 & : d_1 \\ 2x - y = 0 & : d_2 \end{array}\right.$$

Do đó Δ thoả yêu cầu bài toán: đường thẳng Δ đi qua I sao cho hình phẳng được giới hạn bởi ba đường thẳng Δ_1, Δ_2 và Δ là một tam giác cân có đáy ở trên Δ khi và chỉ khi Δ không đi qua giao điểm J(1; 2) của Δ_1, Δ_2 và $\Delta \perp d_1$ hoặc $\Delta \perp d_2$

Nên Δ: $2x - y + C = 0$ hoặc Δ: $x + 2y + C' = 0$

Mặt khác: Δ qua I và không qua J $\Rightarrow C = -3$; $C' = -4$.

Vậy Δ: $2x - y - 3 = 0$ hoặc $x + 2y - 4 = 0$.

Câu 9. Ta có: $y = 0$ không là nghiệm của hệ PT nên $y \neq 0$.

Đặt $t = \dfrac{1}{y}$ thì hệ $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{t} = x + \dfrac{7}{t} + 1 \\ \dfrac{x^2}{t^2} = \dfrac{10}{t^2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = xt + 7 + t \\ x^2 = 10 - t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - t - xt = 7 \\ x^2 + t^2 = 10 \end{cases}$$

Đặt $S = x - t$; $P = -xt$, ta có:

$$\begin{cases} S + P = 7 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$$

Khi $\begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$ thì (x; –t) là nghiệm PT:$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow X = 1$; $X = 3$.

Do đó nghiệm hệ là $(1; -\dfrac{1}{3})$, $(3; -1)$

Khi $\begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases}$ thì (x; –t) là nghiệm PT: $X^2 + 6X + 13 = 0$ (VN)

Vậy nghiệm hệ đã cho là $(1; -\dfrac{1}{3})$, $(3; -1)$.

Câu 10. Với a, b, c > 0, trước hết ta chứng minh rằng

$(a^ab^bc^c)^2 \geq a^{b+c}.b^{c+a}.c^{a+b}$

$\Leftrightarrow 2[a\ln a + b\ln b + c\ln c] \geq (b+c)\ln a + (c+a)\ln b + (a+b)\ln c$

$\Leftrightarrow \ln a(2a-b-c) + \ln b(2b-c-a) + \ln c(2c-a-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(\ln a - \ln b) + (b-c)(\ln b - \ln c) + (c-a)(\ln c - \ln a) \geq 0$: đúng

Ta cần chứng minh rằng $a^{b+c}.b^{c+a}.c^{a+b}[a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)}]^3 \geq 27$

Đặt $x = a^{b+c}$, $y = b^{c+a}$, $z = c^{a+b}$, x, y, z > 0.

BĐT $\Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3 \geq 27 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$: đúng.

ĐỀ SỐ 27

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 - x^2$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm các giá trị m để hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + mx - 2$ nghịch biến trên khoảng (0; 2).

Câu 3. (1 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số thực φ, ta có:

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos2\varphi + i\sin2\varphi$.

Suy ra các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

b) Giải phương trình: $2\log_3(x^2-4) + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ (d) tới mp(P) là lớn nhất.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$.

b) Một hộp gồm 10 sản phẩm trong đó có 3 sản phẩm xấu và 7 sản phẩm tốt. Chọn lần lượt từng sản phẩm cho đến khi có sản phẩm tốt thì dừng lại. Gọi X là số sản phẩm được chọn ra, lập bảng phân bố xác suất của X.

Câu 7. (1 điểm) Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy là a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp

S.ABC và diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + y^2 = 20$. Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA = 2OB.

Câu 9. (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $m + 2 + \sqrt{4 - x^2} = mx$ có nghiệm.

Câu 10. (1 điểm) Cho 3 số không âm x, y, z thoả mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4 + 2\ln(1+x) - y} + \frac{1}{4 + 2\ln(1+y) - z} + \frac{1}{4 + 2\ln(1+z) - x}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^4 - x^2$.

• Tập xác định D = **R**. Hàm số chẵn

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

$$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1),\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

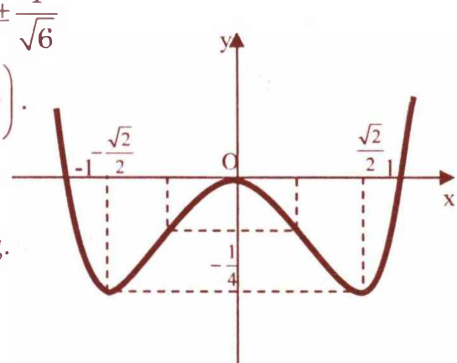
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{2}/2;\ 0)$, $(\sqrt{2}/\ 2;\ +\infty)$ nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{2}\ /2)$, $(0; \sqrt{2})$ và đạt CT $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, CĐ(0; 0).

• Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 2$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

nên đồ thị có 2 điểm uốn $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{5}{36}\right)$.



Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.

Câu 2.

Tập xác định D = **R**.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + m$

Hàm số nghịch biến trên (0; 2) khi và chỉ khi $y' \le 0,\ \forall x \in (0; 2)$.

$\Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x, \forall x \in (0; 2)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x$ với $x \in (0; 2)$.

Ta có $g'(x) = 6x - 6$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		2
g'(x)		+	0	−	
g(x)	0	↘	−3	↗	0

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị cần tìm là $m \le -3$.

Câu 3.

a) Với mọi số thực φ, ta có:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + (2\sin\varphi\cos\varphi)i$$
$$= \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Do đó các căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ là $\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ có hai căn bậc hai là

$$\pm\left(\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right) = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

b) Điều kiện $x \le -3$ hoặc $x > 2$.

Phương trình đã cho:

$$2\log_3(x^2 - 4) + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2} + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 4 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{\log_3(x+2)^2}$, $t \ge 0$. Phương trình trở thành $t^2 + 3t - 4 = 0$.

Do $t \ge 0$, nên phương trình có một nghiệm $t = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{3}$ hoặc $x = -2 + \sqrt{3}$.

So sánh với điều kiện, ta chọn nghiệm của phương trình là $x = -2 - \sqrt{3}$

Câu 4. $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2}dx$

$$= \int_1^3 (3 + \ln x)d\left(\frac{-1}{x+1}\right) = -\frac{3 + \ln x}{x+1}\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$= -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\left(3 + \ln\frac{27}{16}\right).$$

Câu 5. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d

Ta có: H(3, 1, 4) và d((d), (P)) = d(H, (P)) ≤ HA.

Vậy mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán là mặt phẳng qua A và vuông góc với AH. $\overrightarrow{AH} = (-7; -1; 5) \Rightarrow$ (P): $7x + y - 5z - 77 = 0$

Câu 6.

a) Điều kiện $\sin 2x \neq 1$.

PT $\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\sin x\cos x + 3\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x = \sin 2x - 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2\sin 2x + 3 - 3\cos 2x + 6\sqrt{2}\sin x = 2\sin 2x - 2$

$\Leftrightarrow -2\cos 2x + 6\sqrt{2}\sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow -1(1 - 2\sin^2 x) + 3\sqrt{2}\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{2} (VN) \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\dfrac{\pi}{4}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi (VN) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Tập giá trị của $X = \{1; 2; 3; 4\}$.

Các xác suất thành phần:

$$P(X = 1) = \frac{C_7^1}{C_{10}^1} = \frac{7}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}.\frac{C_7^1}{C_9^1} = \frac{7}{30}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}.\frac{C_2^1}{C_9^1}.\frac{C_7^1}{C_8^1} = \frac{7}{120}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}.\frac{C_2^1}{C_9^1}.\frac{C_1^1}{C_8^1}.\frac{C_7^1}{C_7^1} = \frac{1}{120}$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X:

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

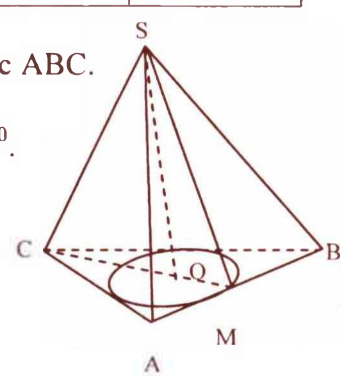
Câu 7. Hạ $SO \perp (ABC) \Rightarrow$ O là tâm của tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm AB

Ta có $AB \perp OM \Rightarrow AB \perp SM \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^0$.

Mà $OM = \dfrac{1}{3}.a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{24}$



Bán kính đường tròn nội tiếp đáy $r = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và đường sinh là $l = SM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \frac{a\sqrt{3}}{6} . \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$.

Câu 8. (C) có tâm I(2; 0), bán kính $R = 2\sqrt{5}$ và $OI = 2 < R$, nên O ở trong đường tròn.

Gọi B(x; y), ta có: $OA = 2OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2x \\ y_A = -2y \end{cases}$ Do đó A(−2x; −2y)

Mà A, B ∈ (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Khi $x = -2 \Rightarrow y = \pm 2$. Do đó B(−2; ±2)

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $x + y = 0$ hoặc $x - y = 0$.

Câu 9. Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

Phương trình: $m + 2 + \sqrt{4 - x^2} = mx \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - x^2} = m(x - 1)$

Xét $x = 1 \Rightarrow$ PT: $2 + \sqrt{3} = 0$: PT vô nghiệm.

Xét $x \neq 1$ thì PT $\Leftrightarrow m = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$.

Đặt: $f(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x - 4 - 2\sqrt{4 - x^2}}{(x - 1)^2\sqrt{4 - x^2}}$

Suy ra: $f'(x) < 0, \forall x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Lập BBT thì phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty; -\frac{2}{3}] \cup (2; +\infty)$.

Câu 10. Từ giả thiết suy ra $0 \le x, y, z \le 3$ nên có được:

$4 + 2\ln(x + 1) - y > 0$ và $4 + 2\ln(y + 1) - z > 0$

và $4 + 2\ln(z + 1) - x > 0$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $P \ge \frac{9}{12 + 2\ln(x+1) - x + 2\ln(y+1) - y + 2\ln(z+1) - z}$

Xét $f(t) = 2\ln(1 + t) - t$ với $0 \le t \le 3$

Ta có $f'(t) = \frac{1 - t}{1 + t}$ $\quad f'(t) = 0$ có một nghiệm $t = 1$.

Lập bảng biến thiên thì được $-1 < f(t) \le -1 + \ln 4$,

suy ra: $-3 < f(x) + f(y) + f(z) \le -3 + 3\ln 4$

Do đó: $P \ge \frac{3}{3 + \ln 4}$. Vậy $\min P = \frac{3}{3 + \ln 4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

ĐỀ SỐ 28

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 4x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm a và b để hàm số: $y = a + bx^2 - \dfrac{x^4}{4}$ đạt cực đại bằng 4 khi $x = 2$

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện:
$|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

b) Giải phương trình: $x + 4^{\log_3 x} = 5^{\log_3 x}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \sin 2x}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên Δ, đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.
Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

b) Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20).
Kết quả được cho trong bảng sau đây:

Điểm	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Tần số	1	1	3	5	8	1	1	2	1	1	2	N = 100

Tính số trung bình, số trung vị và mốt. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình lần lượt là (Δ_1): $x - 2y - 3 = 0$ và (Δ_2): $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng (Δ_1) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ_2) bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = y - 2x \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Giả sử a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng $6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.
- Sự biến thiên $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 8x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{8}{3}$.

Bảng biến thiên :

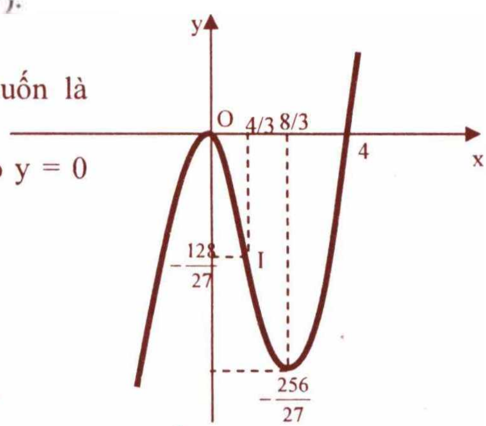
x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{256}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$, $(8/3; +\infty)$, nghịch biến trên $(0, 8/3)$ và có điểm CĐ$(0; 0)$, CT$(8/3; -256/27)$.

- Đồ thị: $y'' = 6x - 8$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ nên đồ thị có điểm uốn là $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{128}{27}\right)$ là tâm đối xứng. Cho $y = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.



Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Ta có $y' = 2bx - x^3$, $y'' = 2b - 3x^2$.

Hàm số $y = f(x) = a + bx^2 - \frac{x^4}{4}$ đạt cực đại tại điểm $(2; 4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b - 4 = 4 \\ 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Thử lại: $f''(2) = 4 - 12 < 0$: đúng. Vậy giá trị cần tìm: $a = 0$, $b = 2$.

Câu 3.

a) Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$.

Ta có: $\left|z^2 - (\bar{z})^2\right| = 4 \Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow |xy| = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $xy = -1$.

Vậy tập hợp cần tìm là hai đường cong: $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$.

b) Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ thì $x = 3^t$, phương trình $x + 4^{\log_3 x} = 5^{\log_3 x} \Leftrightarrow 3^t + 4^t = 5^t$.

Chia 2 vế cho $5^t > 0$. Ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t = 1$

Xét $f(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$ thì f nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Khi $t = 2 \Rightarrow f(2) = 1$ nên $t = 2$ là nghiệm PT

Khi $t > 2 \Rightarrow f(t) < f(2) = 1$: VN

Khi $t < 2 \Rightarrow f(t) > f(2) = 1$: VN

Vậy nghiệm của PT là $x = 3^2 = 9$.

Câu 4. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \sin 2x}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left[\cos(x + \frac{\pi}{4})\right]}{\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) - 1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})\right| + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Câu 5. Gọi I là tâm mặt cầu, ta có $I \in \Delta \Leftrightarrow I(t; -t; t)$

Do đó: $OI = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3t^2} = \frac{|t+1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3|t| = |t + 1|$.

Suy ra: $t = -\frac{1}{4}$ và $t = \frac{1}{2}$.

Khi $t = -\frac{1}{4}$ thì $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Vậy mặt cầu: $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

Khi $t = \frac{1}{2}$ thì $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy mặt cầu: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Câu 6.

a) Ta có $a=\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$b=\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

nên $ab=2\sin(\alpha+\beta)\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, $a^2+b^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Từ đó $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

b) Số trung bình $\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}n_ix_i$

$=\frac{1}{100}(9.1+10.1+11.3+12.5+13.8+14.13+15.19+16.24+17.14$
$+18.10+19.2)=15{,}23$

N = 100 chẵn, số liệu đứng thứ năm mươi là 15, số liệu đứng thứ năm mươi mốt là 16 nên trung vị $M_e=\frac{15+16}{2}=15{,}5$.

Tần số lớn nhất là 24 nên mốt $M_o=16$.

Phương sai: $s^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2\approx 3{,}96$.

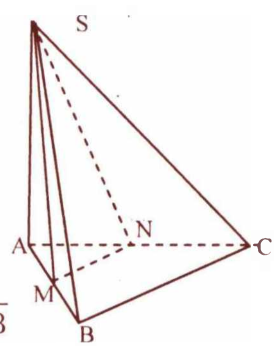
Độ lệch chuẩn: $s\approx 1{,}99$.

Câu 7. Ta có $(SAB)\perp(ABC)$; $(SAC)\perp(ABC)$

$\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SB\perp BC$

Vậy $\widehat{SBA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N nên N là trung điểm AC.



Ta có $SA=2a\sqrt{3}$, $S_{BCMN}=\frac{3a^2}{2}\Rightarrow V_{S.BCMN}=a^3\sqrt{3}$

Vẽ đường thẳng d qua N và song song với AB và gọi D là hình chiếu của A lên d, H là hình chiếu của A lên SD.

Suy ra $AH\perp(SDN)$ và $d(AB, SN)=d(AB,(SDN))=d(A,(SDN))$

$=AH=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 8. Ta có $M\in\Delta_1: x-2y-3=0$

$\Rightarrow M(2a + 3; a) \Rightarrow d(M; \Delta_2) = \dfrac{|3a + 4|}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết: $d(M; \Delta_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -1$ hoặc $a = -\dfrac{5}{3}$.

Vậy $M(1; -1)$ hoặc $M\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = y - 2x \end{cases}$.

Phương trình sau tương đương:

$y^2 - (3x + 1)y + 2x^2 + 2x = 0.$

$\Delta_y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Do đó $y = x + 1$ và $y = 2x$

Khi $y = x + 1$, ta có: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 1$

mà $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ và $f(1) = 1$ nên nghiệm của hệ phương trình là (1; 2).

Khi $y = 2x \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 1$. Giải tương tự thì nghiệm hệ phương trình là (1; 2)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (1; 2).

Câu 10. Xét hàm số $f(x) = 6x^3 - x^2$, ta có $f'(x) = 18x^2 - 2x$.

Phương trình tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại điểm $\left(\dfrac{1}{4}, f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$

là $y = \dfrac{5}{8}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{32}$ hay $y = \dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{8}$.

Từ đó với $x > 0$ ta có $f(x) - \left(\dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{8}\right) = 6\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2\left(x + \dfrac{1}{3}\right) \geq 0$

Nên có bất đẳng thức $6x^3 - x^2 \geq \dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{8}$ với mọi x >0.

Áp dụng với $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 1$, ta có

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq \frac{5}{8}(a + b + c + d) - \frac{1}{8}.4 = \frac{1}{8}$$

Do đó điều khẳng định được chứng minh.

ĐỀ SỐ 29

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến và vẽ đồ thị hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm các điểm cố định của các đồ thị (C_m):

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 3mx - \frac{5}{3}.$$

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $(z + I - 2)[z^2 - (2 + i)z + 7i - 1] = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\ln 4} \sqrt{5e^{2x} - e^{3x}}\,dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hai điểm M(1; 1; 1), N(3; 1; –1). Viết phương trình mặt phẳng chứa trục Ox và cách đều hai điểm M, N.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình:

$$(4\cos^2 2x - 1)\sin 2x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sin 3x + \cos 3x) + \sqrt{6} + 1 = 0$$

b) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông ở A, AB = a, BC = 2a, mặt bên ABB'A' là hình thoi. Mặt bên (BCC'B') nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (ABB'A') và (BCC'B') hợp với nhau góc α ($0^0 < \alpha < 90^0$). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCC'B') theo a và tính thể tích lăng trụ theo a và α.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(–4; 2), đường phân giác trong góc B có phương trình x + y – 2 = 0, đỉnh C thuộc đường thẳng x + 2y – 10 = 0, BC = 2AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và C.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} = 5 - 4x$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn x + y + z = 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

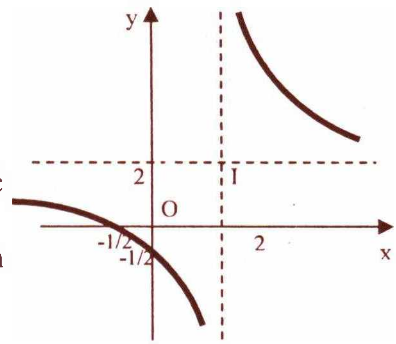
- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$ nên TCN: y = 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$ nên TCĐ: x = 2.

Ta có $y' = \dfrac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	2



Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

• Đồ thị: Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận $I(2; 2)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$, $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của các đồ thị (C_m):

$$y_o = \frac{1}{3}x_o^3 - mx_o^2 - 3mx_o - \frac{5}{3}, \forall m \Leftrightarrow y_o = -m(x_o^2 + 3x_o) + \frac{1}{3}x_o^3 - \frac{5}{3}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 + 3x_o = 0 \\ y_o = \dfrac{1}{3}x_o^3 - \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 0,\ y_o = \dfrac{-5}{3} \\ x_o = -3,\ y_o = \dfrac{-32}{3} \end{array}\right.$$

Vậy các đồ thị đi qua 2 điểm cố định: $M_1\left(0; \dfrac{-5}{3}\right)$ và $M_2\left(-3; \dfrac{-32}{3}\right)$.

Câu 3.

a) PT: $(z + i - 2)[z^2 - (2+i)z + 7i - 1] = 0$

$\Leftrightarrow z = 2 - i$ hoặc $z^2 - (2+i)z + 7i - 1 = 0$.

Phương trình bậc hai có biệt thức:

$\Delta = (2+i)^2 - 4(7i - 1) = 7 - 24i = (4 - 3i)^2$ nên Δ có các căn bậc hai là $\pm(4 - 3i)$. Từ đó giải cho 2 nghiệm $z = 3 - i$, $z = -1 + 2i$

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm: $z = 2 - i$, $z = 3 - i$, $z = -1 + 2i$

b) Điều kiện: $y > -2$, $y \neq -1$; $-4 < x < 1$; $x \neq 0$

Hệ $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

Biến đổi phương trình đầu thành $\log_{1-x}(2+y) + \log_{2+y}(1-x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_{1-x}(2+y) = 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ: $\log_{1-x}(4-x) - \log_{1-x}(x+4) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} = 1 - x \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm $(-2; 1)$.

Câu 4. Ta có $I = \int_0^{\ln 4} \sqrt{5e^{2x} - e^{3x}dx} = \int_0^{\ln 4} e^x\sqrt{5 - e^x}\,dx$.

Đặt $t = \sqrt{5 - e^x} \Rightarrow t^2 = 5 - e^x \Rightarrow 2tdt = -e^x dx$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2$, khi $x = \ln 4 \Rightarrow t = 1$

Suy ra $I = -2\int_2^1 t^2dt = 2\int_1^2 t^2dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_1^2$ Vậy $I = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$.

Câu 5. PT mặt phẳng (P) chứa trục Ox có dạng: $By + Cz = 0$ với $B^2 + C^2 > 0$

Ta có: $d(M, (P)) = \frac{|B + C|}{\sqrt{B^2 + C^2}}$, $d(N, (P)) = \frac{|B - C|}{\sqrt{B^2 + C^2}}$

Suy ra: $\frac{|B + C|}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \frac{|B - C|}{\sqrt{B^2 + C^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Với $B = 1$, $C = 0$ thì (P): $y = 0$

Với $B = 0$, $C = 1$ thì (P): $z = 0$.

Câu 6.

a) Ta có: $(4\cos^2 2x - 1)\sin 2x$

$= (2\cos 4x + 1)\sin 2x = 2\cos 4x\sin 2x + \sin 2x$

$= \sin 6x - \sin 2x + \sin 2x = 2\sin 3x\cos 3x$

Phương trình trở thành:

$$\sin 3x\cos 3x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sin 3x + \cos 3x) + \sqrt{6} + 1 = 0$$

Đặt $t = \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Nên có phương trình: $t^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})t + \sqrt{6} = 0$

$\Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{3}$ (loại).

Do đó $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Xét số $n = \overline{abcdef}$.

Xếp hai chữ số 2 và 3 vào n có 2.5 = 10 cách (2 và 3 có thể hoán vị cho nhau)

Xếp bốn chữ số còn lại có: $P_4 = 4! = 24$ cách

Theo quy tắc nhân có 10.24 = 240 số

Trường hợp: a = 0

Xếp hai chữ số 2 và 3 vào n có 2.4 = 8 cách

Xếp ba chữ số còn lại có $P_3 = 3! = 6$ cách

Theo quy tắc nhân có 8.6 = 48 số.

Vậy có 240 – 48 = 192 số thoả yêu cầu bài toán.

Câu 7. Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow d(A; (BCC'B') = AH$

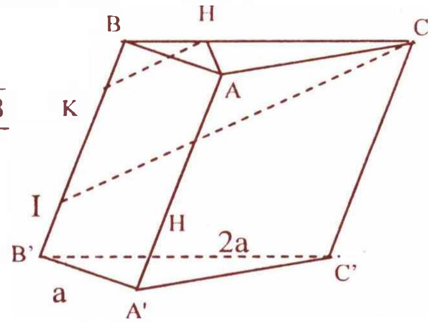
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi K là hình chiếu của H lên BB'

$\Rightarrow \widehat{HKA} = \alpha \Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}\cot\alpha$

Vẽ $CI \perp BB' \Rightarrow 4HK = 2a\sqrt{3}\cot\alpha$

$\Rightarrow h = \dfrac{CI.BB'}{BC} = a\sqrt{3}\cot\alpha$. Vậy thể tích $V = \dfrac{3a^3\cot\alpha}{2}$.



Câu 8. Hạ AH vuông góc với d' là đường phân giác trong góc B, ta có $H(h; 2 - h)$

Suy ra: $\overrightarrow{AH} = (h + 4; -h) \perp \overrightarrow{u_{d'}} = (-1; 1)$ là VTCP của d', nên $h = -2$.

Vậy $H(-2; 4)$

Gọi A' đối xứng A qua H, nên $A' \in BC$ và H là trung điểm AA'. Do đó $A'(0; 6)$.

Ta có $B \in d' \Leftrightarrow B(b; 2-b)$, $C \in d \Leftrightarrow C(10-2c; c)$

Mà BC = 2BA, nên A' trung điểm BC $\Leftrightarrow \begin{cases} b + 10 - 2c = 0 \\ 2 - b + c = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 2c = -10 \\ -b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy $B(-10; 12)$, $C(10; 0)$.

Câu 9. Điều kiện: $x \geq 0$.

PT: $\sqrt{x} - \sqrt[3]{1 - x} = 5 - 4x \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{1 - x} = 5$

Xét $f(x) = 4x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{1 - x}$ $(x \geq 0)$

$\Rightarrow f'(x) = 4 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$

Mà $f'(x) > 0, \forall x > 0$ và f(x) liên tục trên $[0; +\infty)$

Nên hàm số f(x) đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

Khi $x = 1 \Rightarrow f(1) = 5$ nên $x = 1$ là nghiệm PT

Khi $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 5$: loại.

Khi $0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 5$: loại.

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$.

Câu 10. Ta có $x + y + z = 0$ nên $z = -(x + y)$ và có 2 số không âm hoặc không dương.

Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $xy \geq 0$

Ta có $P = 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12(x^2 + y^2 + xy)}$

$$= 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]}$$

$$\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]}$$

$$\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{3|x+y|}{2}} - 2\sqrt{3}|x+y|.$$

Đặt $t = |x+y| \geq 0$, xét $f(t) = 2.(\sqrt{3})^{3t} - 2\sqrt{3}t$

$$f'(t) = 2.3(\sqrt{3})^{3t}.\ln\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{3t}\ln\sqrt{3} - 1) > 0$$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2$

Mà $3^{|x-y|} \geq 3^0 = 1$ nên $P \geq 3^0 + 2 = 3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy min P = 3.

ĐỀ SỐ 30

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 2. (1 điểm)

Chứng minh đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{x-3}{2-x}$ có tâm đối xứng.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $\left|z + \dfrac{6}{z+i}\right|$.

b) Giải phương trình: $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \ln(\cos 3x) - \ln(\sin 3x)$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm: $\int (1+e^x)^3 e^{2x} dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và hợp với mặt phẳng (Q): $2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc bé nhất.

Câu 6. (1 điểm)

a) Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$.

b) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{x} + 3x^2\right)^{n+2}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + \frac{2}{2}C_n^1 + \frac{2^2}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^n}{n+1}C_n^n = \frac{121}{n+1}$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = a, SC = 2a và $\widehat{ASB} = 60^o$, $\widehat{BSC} = 90^o$, $\widehat{CSA} = 120^o$. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh tam giác ABM vuông và tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(1; 1), B(0; 2) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}=\sqrt{6} \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+d^3} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

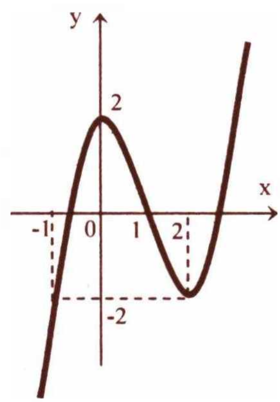
- Tập xác định: D = **R**
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	−2	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên (0; 2)

Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = 2$ và đạt cực tiểu tại x = 2, $y_{CT} = -2$.

- Đồ thị: $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên tâm đối xứng là điểm uốn I(1;0)

Câu 2.

Tập xác định D = **R** \ {2}.

$\lim\limits_{x\to2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} y = +\infty$ nên đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -1$ nên đường thẳng y = 1 là tiệm cận ngang

Giao điểm của hai tiệm cận là I(2; −1).

Áp dụng công thức chuyển hệ bằng phép tịnh tiến vectơ

$\overrightarrow{OI}: \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$

Đồ thị (C) trong hệ toạ độ IXY: $Y - 1 = \dfrac{(X+2)-3}{2-(X+2)} \Leftrightarrow Y = \dfrac{1}{X}$

Vì $Y = F(X) = \dfrac{1}{X}$ là hàm lẻ nên đồ thị nhận gốc I là tâm đối xứng.

Câu 3.

a) PT: $z^2 - 6z + 13 = 0$ có $\Delta = 9 - 13 = -4 = (2i)^2$

Do đó $z = 3 + 2i$ hay $z = 3 - 2i$.

Với $z = 3 + 2i$, ta có

$$\left|z + \frac{6}{z+i}\right| = \left|3 + 2i + \frac{6}{3+3i}\right| = |3 + 2i + 1 - i| = |4 + i| = \sqrt{17}$$

Với $z = 3 - 2i$, ta có

$$\left|z + \frac{6}{z+i}\right| = \left|3 - 2i + \frac{6}{3-i}\right| = \left|3 - 2i + \frac{6}{3-i}\right|$$

$$= \left|3 - 2i + \frac{6}{10}(3+i)\right| = \frac{1}{5}|24 - 7i| = 5.$$

Cách khác: $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-3)^2 = (2i)^2$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x > 0 \\ \sin 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2k\pi < 3x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow 0 < \sin 3x, \cos 3x < 1$.

PT: $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \ln(\cos 3x) - \ln(\sin 3x)$.

$\Leftrightarrow \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\ln(\cos 3x) - \sqrt{2}\ln(\sin 3x)$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{2}\ln(\sin 3x) = \cos 3x + \sqrt{2}\ln(\cos 3x)$

Xét $f(t) = t + \sqrt{2}\ln t$, $t \in (0; 1)$

$\Rightarrow f'(t) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{t} > 0, \forall\ t \in (0; 1) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$

Do đó PT $\Leftrightarrow f(\sin 3x) = f(\cos 3x) \Leftrightarrow \sin 3x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + h2\pi$ (do $2k\pi < 3x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$)

Vậy nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{12} + h\dfrac{2\pi}{3}$, $h \in \mathbf{Z}$.

Câu 4. Đặt $t = 1 + e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Do đó $I = \displaystyle\int (1 + e^x)^3 e^{2x} dx = \int t^3(t-1)dt = \int (t^4 - t^3)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + C$

Vậy: $I = \dfrac{(1+e^x)^5}{5} - \dfrac{(1+e^x)^4}{4} + C$

$= \dfrac{1}{5}e^{5x} + \dfrac{3}{4}e^{4x} + e^{3x} + \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 5. Gọi (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Vì (P) chứa d nên đi qua M(0; –1; 2), N(–1; 1; 3):

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ -A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ D = B - 2C \end{cases}$$

Do đó (P): $(2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$.

Mp(Q) có VTPT $\vec{n}' = (2; -1; -2)$. Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \vec{n}')\right| = \frac{|B|}{\sqrt{5B^2 + 4BC + 2C^2}}$$

Xét B = 0 thì $\varphi = 90^o$.

Xét $B \neq 0$, đặt $m = \dfrac{C}{B}$ thì: $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 + 4m + 5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2(m+1)^2 + 3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu "=" khi m = –1 nên B = –C, khi đó $\varphi < 90^o$ là góc cần tìm.

Vậy (P): $x + y - z + 3 = 0$.

Câu 6.

a) Đẳng thức đã cho: $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$

$\Leftrightarrow$ sinC = 2cosAsinB $\Leftrightarrow$ sin(A + B) = 2sinB cosA

$\Leftrightarrow$ sinA cosB + sinB cosA = 2 sinB cosA

$\Leftrightarrow$ sinA cosB – sinB cosA = 0 $\Leftrightarrow$ sin(A – B) = 0 $\Leftrightarrow$ A – B = kπ.

Vì A, B là góc tam giác nên k = 0 ⇒ A = B.

Vậy, tam giác thỏa điều kiện đã cho là tam giác cân tại C.

b) Ta có: $C_n^0 + \dfrac{2}{2}C_n^1 + \dfrac{2^2}{3}C_n^2 + \ldots + \dfrac{2^n}{n+1}C_n^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}C_n^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}C_n^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^2 C_n^k t^k dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (1+t)^n dt = \frac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)}$$

Theo giả thiết, tính được n = 4

Khai triển $\left(\dfrac{1}{x} + 3x^2\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k \left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}(3x^2)^k = \sum_{k=0}^{6} C_6^k 3^k x^{3k-6}$

Số hạng không chứa x ứng với k = 2, là $9C_6^2 = 135$.

Câu 7. Ta có AB = a, BM = $a\sqrt{2}$, AM = $a\sqrt{3}$

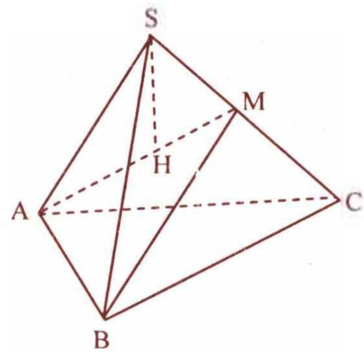
Suy ra: $AM^2 = AB^2 + BM^2$

nên tam giác ABM vuông tại B.

Do đó hình chiếu của S lên mp(ABM) là trung điểm H cạnh AM

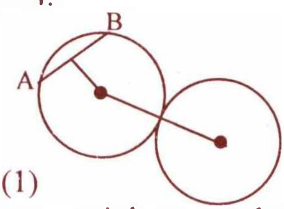
$$V_{S.ABM} = \frac{1}{6}AB.\ BM.\ SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Vậy thể tích: $V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Câu 8. Đường tròn (C) có tâm S(5; 5) và bán kính R = 4.

Giả sử (C') cần tìm có tâm I(a; b), bán kính r.



$\Rightarrow$ Phương trình (C') có dạng:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Vì B(0; 2) $\in$ (C')

nên $a^2 + b^2 - 4b + 4 = r^2$ (1)

Mặt khác, I thuộc đường trung trực của AB có phương trình $x - y + 1 = 0$

nên $a - b + 1 = 0$ (2)

Ta có (C') tiếp xúc ngoài với (C)

$\Leftrightarrow r + 4 = IS = \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2}$ (3)

Giải hệ gồm (1), (2), (3)

(3) $\Leftrightarrow r^2 + 8r + 16 = a^2 + b^2 - 10a - 10b + 50$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4b + 4 + 8r + 16 = a^2 + b^2 - 10a - 10b + 50$

$\Leftrightarrow 5a + 3b = 15 - 4r$ (4)

Từ (2), thay b = a + 1 vào (4), rút ra: $\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}r = \dfrac{3-r}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}r = \dfrac{5-r}{2} \end{cases}$

Thay lại vào (1), rút gọn ta được: $r^2 + 4r - 5 = 0 \Rightarrow r = 1$, từ đó a = 1, b = 2

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Câu 9. Điều kiện: $x \geq -2$, $y \geq -2$.

Ta có: $\sqrt{y^2+1} - y \neq 0$ nên PT đầu tương đương với

$x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} - y$ (1)

Ta có: $\sqrt{x^2+1} - x \neq 0$ nên PT đầu tương đương với

$y + \sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x$ (2)

Cộng (1) và (2) thì $x + y = -x - y \Leftrightarrow y = -x$.

Thế vào PT sau ta có: $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x^2} = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ và $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Câu 10. Không mất tính tổng quát, giả sử: $d = \max\{a, b, c, d\}$.

Ta có các trường hợp:

TH1: $a^3 + b^3 + c^3 \le 0 \quad \Rightarrow \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+d^3} \le d \le \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

TH2: $a^3 + b^3 + c^3 > 0 \quad \Rightarrow d > 0$ và $1 + \left(\frac{a}{d}\right)^3 + \left(\frac{b}{d}\right)^3 + \left(\frac{c}{d}\right)^3 > 1$

nên $\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+d^3} = d\sqrt[3]{1+\left(\frac{a}{d}\right)^3+\left(\frac{b}{d}\right)^3+\left(\frac{c}{d}\right)^3}$

$< d\sqrt{1+\left(\frac{a}{d}\right)^3+\left(\frac{b}{d}\right)^3+\left(\frac{c}{d}\right)^3} \le d\sqrt{1+\left(\frac{a}{d}\right)^2+\left(\frac{b}{d}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Dấu bằng khi $(a, b, c, d) = (0; 0; 0; t)$ $(t \ge 0)$ và các hoán vị.

ĐỀ SỐ 31

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x-3}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$ với $x > 0$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm môđun của số phức: $w = 3 - zi + \bar{z}$, biết số phức z thỏa mãn: $(1 + i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$.

b) Giải bất phương trình $\log_x 2 > \log_{2x} 2$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(x-2)\ln x + x}{x(1+\ln x)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Cho tứ diện ABCD có: A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3) và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD} = 5$, tìm toạ độ đỉnh D.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $3\tan^2 x + 2\sqrt{2}\cos^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\sin x$.

b) Từ một hộp đựng ba quả cầu màu đỏ và bốn quả cầu màu vàng, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Tính xác suất để hai quả được chọn cùng màu.

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân đỉnh C; đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng (ABB'A') góc 60^0 và AB = AA' = a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CC', BC và Q là một điểm trên cạnh AB sao cho $BQ = \frac{a}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh mặt phẳng (MAC) vuông góc với mặt phẳng (NPQ).

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC với A(1; 5), B(–4; –5), C(4; –1). Xác định toạ độ chân đường phân giác trong và ngoài của góc A của tam giác ABC.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $10x^2 - 9x - 8x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 3 = 0$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le y \le z \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - y) + z^2(1 - z).$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- Sự biến thiên:

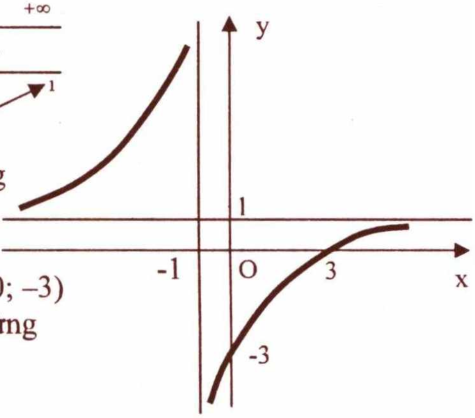
$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang: y = 1

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng: x = –1

$$y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0\ \forall x \ne -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1



Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

- Đồ thị

Giao với Ox: (3; 0), giao với Oy: (0; –3)

Đồ thị nhận I(–1; 1) làm tâm đối xứng

Câu 2.

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 2x - 8$;

$f''(x) = 30x^4 + 2 > 0$,

với x > 0 nên f'(x) đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Do đó: $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$; $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$

Bảng biến thiên :

x	0		1		$-\infty$
f'		–	0	+	
f	16	↘	10	↗	$+\infty$

Từ đó: $f(x) \ge 10$. Dấu đẳng thức xảy ra khi x = 1. Vậy min f = 10.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$

Theo giả thiết, ta có:

$(1 + i)(x - yi) - 1 - 3i = 0 \Leftrightarrow (x + y - 1) + (x - y - 3)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Suy ra $z = 2 - i$

Ta có $w = 3 - zi + \bar{z} = 3 - (2-i)i + 2 + i = 4 - i$. Vậy $|w| = \sqrt{17}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \ ; x \neq 1 \\ 2x>0; 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,\ x \neq \dfrac{1}{2}$ và $x \neq 1$

Đặt $t = \log_2 x$, ta có: bất phương trình $\log_x 2 > \log_{2x} 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{t} > \dfrac{1}{t+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{t(t+1)} > 0 \Leftrightarrow t(t+1) > 0 \Leftrightarrow t < -1$ hoặc $0 < t$.

Do đó $\log_2 x < -1$ hoặc $0 < \log_2 x$. Vậy nghiệm BPT là $0 < x < \dfrac{1}{2}$ hoặc $x > 1$

Câu 4. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(x-2)\ln x + x}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^e dx - 2\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)}dx = e - 1 - 2A$

Đặt $t = \ln x + 1 \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$. $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{t-1}{t}dt = 1 - \ln 2$

Do đó $I = e - 3 + 2\ln 2$.

Câu 5. Gọi D(0; y; 0) thuộc trục Oy. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; y-1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = -4(y-1) - 2 = -4y + 2$.

Theo giả thiết $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}\right| = 5$

$\Leftrightarrow |-4y + 2| = 30 \Leftrightarrow y = -7; y = 8$

Vậy có 2 điểm D trên trục Oy: (0; –7; 0) và (0; 8; 0).

Câu 6.

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

PT: $3\tan^2 x + 2\sqrt{2}\cos^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\sin x$

$\Leftrightarrow 3(\tan^2 x - \sqrt{2}\sin x) + 2(\sqrt{2}\cos^2 x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}(\sin x - \sqrt{2}\cos^2 x) + 2(\sqrt{2}\cos^2 x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 3\sin x)(\sqrt{2}\cos^2 x - \sin x) = 0$.

Xét: $2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

Chọn: $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Và $\sqrt{2}\cos^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

Chọn: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Vậy nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Ta có số phần tử của không gian mẫu là $C_7^2 = 21$.

Gọi A là biến cố cần tìm, để chọn để hai quả được chọn cùng màu có 2 trường hợp chọn cả 2 cầu đỏ hoặc cả 2 cầu vàng.

Do đó $n(A) = |\Omega_A| = C_3^2 + C_4^2 = 9$.

Vậy: xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Câu 7. Gọi H là trung điểm A'B' thì $C'H \perp (ABA'B')$ và $\widehat{HBC'}$ là góc giữa BC' và (ABA'B') nên $\widehat{HBC'} = 60^0$.

$$BH = \frac{a\sqrt{5}}{2};\ C'H = BH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$$

Ta có $AM \perp BH \Rightarrow AM \perp (BHC') \Rightarrow AM \perp BC' \Rightarrow AM \perp PN$.

Gọi K là trung điểm AB thì $CK \perp (ABA'B') \Rightarrow PQ \perp (ABA'B') \Rightarrow PQ \perp AM$

Vậy $(ACM) \perp (PQN)$.

Câu 8. Gọi I và J lần lượt là chân của phân giác trong và ngoài của góc A trong tam giác ABC.

Ta có: $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$ với $AB = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}$;

$AC = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$. Nên $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{5}{3}$

Ta có: $\overrightarrow{IB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_I = -\frac{5}{3}(x_C - x_I) \\ y_B - y_I = -\frac{5}{3}(y_C - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy điểm $I(1; -\frac{5}{2})$.

Ta có: $\overrightarrow{JB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_J = \frac{5}{3}(x_C - x_J) \\ y_B - y_J = \frac{5}{3}(y_C - y_J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 16 \\ y_J = 5 \end{cases}$ Vậy điểm J(16; 5).

Câu 9. Phương trình: $10x^2 - 9x - 8x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 3 = 0$.

Điều kiện: $2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$.

Xét $x \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
Xét $x > 0$ thì phương trình tương đương với

$$10 - \frac{9}{x} + \frac{3}{x^2} - 8\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$, $t \ge 0$

Phương trình trở thành: $10 + 3(t^2 - 2) - 8t = 0$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 8t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Với $t = 2$, ta có: $2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Chọn nghiệm $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

Với $t = \frac{2}{3}$, ta có: $2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 14x^2 - 27x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{7} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{7}$.

Câu 10. Ta có $0 \le x \le y \le z \le 1$ nên

$x^2(y - z) \le 0$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $y = z$.

$\Rightarrow P = x^2(y - z) + y^2(z - y) + z^2(1 - z) \le \frac{1}{2}y.y(2z - 2y) + z^2(1 - z)$.

Ta có $2z = y + y + (2z - 2y) \ge 3\sqrt[3]{y^2(2z - 2y)}$

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3y = 2z$ nên $y^2(2z - 2y) \le \frac{8}{27}z^3$

$\Rightarrow P \le \frac{4}{27}z^3 + z^2(1 - z) = z^2\left(1 - \frac{23}{27}z\right)$

Ta có $1 = \frac{23}{54}z + \frac{23}{54}z + \left(1 - \frac{23}{27}z\right) \ge 3\sqrt[3]{\frac{23}{54}.\frac{23}{54}z^2\left(1 - \frac{23}{27}z\right)}$

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z = \frac{18}{23}$.

$\Rightarrow P \le z^2\left(1 - \frac{23}{27}z\right) \le \frac{1}{27}.\frac{54^2}{23^2} = \frac{108}{529}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0, y = \frac{12}{23}$ và $z = \frac{18}{23}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $\frac{108}{529}$.

ĐỀ SỐ 32

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$.

Câu 2. (1 điểm) Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục toạ độ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = \frac{3x+1}{x+1}$ tại điểm M(–2; 5).

Câu 3. (1 điểm)

a) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 4iz - 13 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$

b) Tìm nghiệm x nguyên lớn nhất của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 13x + 40}{x^2 - x - 6} \geq 0 \\ \log_2(x+2) \leq 3 \end{cases}.$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, viết phương trình tham số của đường thẳng vuông góc chung của AC và BD biết A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1).

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính các giá trị lượng giác khác của góc α biết rằng:

$\sin\alpha = -\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $\left(1 - x^4 - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn $A_n^2.C_n^{n-1} = 30.P_3$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và AB = 2BC. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm H của đoạn OA, góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo R.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có A(2; 0) và đường cao hạ từ đỉnh C đi qua điểm M(1; 3). Diện tích tam giác ABC bằng 2 và đường thẳng BC: $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ của đỉnh B và C.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(1+y^2)+y^2(1+x^2)=4\sqrt{xy} \\ x^2y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}=x^2y-x \end{cases},\ (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn:
$x + y + z = 2$. Chứng minh rằng $x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + y^3z + zx^3 \le 2$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

$y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (–2; 0) và (2; +∞), nghịch biến trên các khoảng (–∞; –2) và (0; 2). $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{16}{9}\right)$

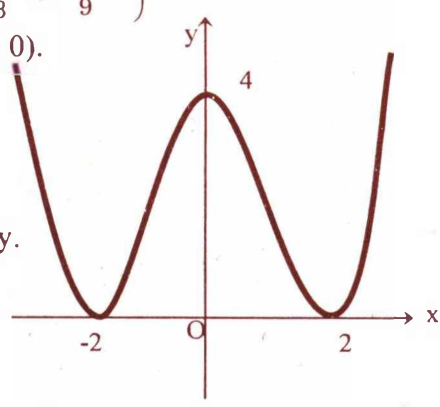
Hàm số đạt CĐ(0; 4), đạt CT(–2; 0), (2; 0).

- Đồ thị: $y'' = 3x^2 - 4$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị có hai điểm

uốn

. Đồ thị đối xứng nhau qua trục tung Oy.



Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại M là:

$y = y'(-2)(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = 2(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = 2x + 9$.

Đường thẳng d cắt trục hoành tại $A(-\frac{9}{2}; 0)$ và cắt trục tung tại B(0; 9).

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|-\frac{9}{2}\right|9 = \frac{81}{4}$ (đvdt).

Câu 3.

a) Phương trình: $z^2 + 4iz - 13 = 0$ có $\Delta = 16i^2 + 52 = 36$.
Hai nghiệm phức của phương trình đã cho là: $z_1 = -3 - 2i$; $z_2 = 3 - 2i$
Từ đó $|z_1| + |z_2| = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

b) Hệ bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 13x + 40}{x^2 - x - 6} \geq 0 \\ \log_2(x+2) \leq 3 \end{cases}$

Giải bất phương trình thứ nhất: $S_1 = (-\infty; -2) \cup (3; 5] \cup (8; +\infty)$.
Giải bất phương trình thứ hai: $S_2 = (-2; 6]$.
Tập nghiệm $S = (3; 5]$
Suy ra nghiệm nguyên lớn nhất của hệ bất phương trình là 5.

Câu 4. Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x.\cos x dx}{\cos^2 x\sqrt{4 - \cos^2 x}}$.

Đặt $t = \sqrt{4 - \cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = 4 - t^2$

Khi $x = 0$ thì $t = \sqrt{3}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ thì $t = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Ta có $dt = \dfrac{\sin x.\cos x dx}{\sqrt{4 - \cos^2 x}}$

Khi đó $I = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \frac{1}{4 - t^2} dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \left(\frac{1}{2 - t} + \frac{1}{2 + t}\right) dt$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{4+\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}.$$

Câu 5. PT đường AC là (d_1): $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-3; 4; 1)$.

PT đường BD là (d_2): $\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 3 - 2k \\ z = 1 \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2; -2; 0)$.

Gọi đường vuông góc chung là (Δ) qua E thuộc d_1, F thuộc d_2:
$E(4 - 3t; 1 + 4t; 4 + t)$; $F(3 - 2k; 3 - 2k; 1)$
$\overrightarrow{FE} = (1 - 3t + 2k; -2 + 4t + 2k; 3 + t)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_1} = 0\\ \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}26t + 2k - 8 = 0\\ t + 4k - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \dfrac{5}{17}\\ k = \dfrac{3}{17}\end{cases}$

Suy ra $E\left(\dfrac{53}{17};\dfrac{37}{17};\dfrac{73}{17}\right)$, $F\left(\dfrac{45}{17};\dfrac{45}{17};\dfrac{17}{17}\right)$.

Đường vuông góc chung (Δ) có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{FE} = \left(\dfrac{8}{17};-\dfrac{8}{17};\dfrac{56}{17}\right)$ hay (1; –1; 7)Vậy phương trình là Δ: $\begin{cases}x = \dfrac{45}{17} + t'\\ y = \dfrac{45}{17} - t'\\ z = 1 + 7t'\end{cases}$

Câu 6.

a) Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$ nên:

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có: $A_n^2.C_n^{n-1} = 30.P_3$

$\Leftrightarrow n(n-1)n = 180 \Leftrightarrow (n-6)(n^2 + 5n + 30) = 0 \Leftrightarrow n = 6.$

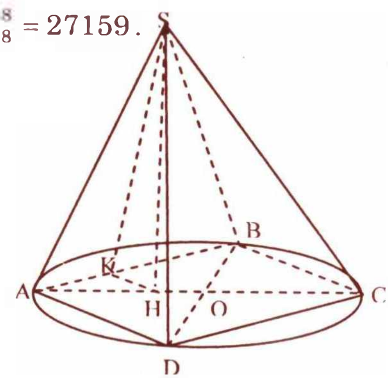
Khi đó $\left(1 - x^4 - \dfrac{1}{x}\right)^{12} = \left[x^4 - \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right]^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^4)^{12-k}.(-1)^k\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^k$

$= \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{48-4k}.(-1)^k \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i\left(-\dfrac{1}{x}\right)^i = \sum\limits_{k=0}^{12}\sum\limits_{i=0}^{k} C_{12}^k C_k^i (-1)^{k+i} x^{48-4k-i}$

Số hạng chứa x^8 ứng với $48 - 4k - i = 8$ với $0 \le i \le k \le 12$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4k + i = 40\\ 0 \le i \le k \le 12\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}i = 0, k = 10\\ i = 4, k = 9\\ i = 8, k = 8\end{array}\right.$

Suy ra hệ số của x^8 là $C_{12}^{10}.C_{10}^0 - C_{12}^9.C_9^4 + C_{12}^8.C_8^8 = 27159$.



Câu 7. Đặt BC = x $\Rightarrow$ AB = 2x

$\Rightarrow 4x^2 + x^2 = 4R^2 \Rightarrow x = \dfrac{2R}{\sqrt{5}}$

Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{8R^2}{5}$

Gọi H trung điểm OA,vẽ HK // BC.

Ta có HK $\perp$ AB $\Rightarrow$ AB $\perp$ SK

$\Rightarrow \widehat{SKH} = 60^0$.Nên $HK = \dfrac{BC}{4} = \dfrac{R}{2\sqrt{5}} \Rightarrow SH = HK\sqrt{3} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{10}$

Vậy: $V_{SABCD} = \dfrac{4R^3\sqrt{15}}{75}$.

Câu 8. Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}d(A, BC).BC = 2$ và $d(A, BC) = \dfrac{|2-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$

$B, C \in BC \Rightarrow B(b; 4-b), C(c; 4-c)$ $(b \neq c)$

$\Rightarrow BC^2 = 2(b-c)^2 = 8 \Rightarrow b - c \pm 2 = 0$

$\overrightarrow{AB} = (b-2; 4-b) \perp \overrightarrow{MC} = (c-1; 1-c) \Leftrightarrow bc - b - 3c + 3 = 0$ (1)

– Khi $b - c + 2 = 0 \Leftrightarrow b = c - 2$ thế vào (1)Ta có: $c^2 - 6c + 5 = 0 \Leftrightarrow c \in \{1; 5\}$

Vậy $B(-1; 5), C(1; 3)$ và $B(3; 1), C(5; -1)$.

– Khi $b - c - 2 = 0 \Leftrightarrow b = c + 2$ thế vào (1)

Ta có $c^2 - 2c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1$Vậy $B(3; 1), C(1; 3)$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) = 4\sqrt{xy} \\ x^2y\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = x^2y - x \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$

Điều kiện: $xy \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương vớix $-\sqrt{1+x^2} = x^2y(1 - \sqrt{1+y^2})$

Ta có $x = 0$ không thỏa mãn phương trình

Vì $x - \sqrt{1+x^2} < 0$ và $1 - \sqrt{1+y^2} < 0$ nên suy ra $y > 0$. Do đó $x > 0$.

Phương trình tương đương: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = y - y\sqrt{1+y^2}$

Xét hàm $f(t) = t - t\sqrt{1+t^2}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \sqrt{1+t^2} < 0$, với mọi $t \in (0; +\infty)$

Suy ra hàm f nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình $f(\dfrac{1}{x}) = f(y) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = y \Leftrightarrow xy = 1$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có:

$$x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}(1+x^2) = 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm $x = y = 1$.

Câu 10. Ta có: $x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + y^3z + zx^3 \leq 2$

$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2) \leq 2$

Ta có: $xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$

$\le xy(x^2 + y^2 + z^2) + yz(x^2 + y^2 + z^2) + zx(x^2 + y^2 + z^2)$

$= (xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)$

Do đó, ta cần chứng minh: $(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \le 2$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\le \frac{1}{2}\frac{\left[2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)\right]^2}{4} = \frac{1}{8}(x+y+z)^4 = 2$$

Ta được điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$, $z = 0$ và các hoán vị.

ĐỀ SỐ 33

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

$y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm quỹ tích các điểm cực đại của hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 - 2$ khi m thay đổi.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính môđun của số phức $w = b + ci$ ($b, c \in \mathbf{R}$), biết số phức

$z_0 = \dfrac{(1+i)^8(-1-2i)}{(1-i)^7}$ là nghiệm của phương trình: $z^2 + bz + c = 0$.

b) Giải phương trình: $27^x + 12^x = 2.8^x$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}e^x$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, lập phương trình đường thẳng d' đối với đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-7}$ qua mặt phẳng (P): $x + 2y + z - 1 = 0$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình:

$\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

b) Có 5 học sinh gồm 3 nam và 2 nữ cùng tham gia vào một câu lạc bộ. Câu lạc bộ này chia ngẫu nhiên thành 4 nhóm. Tính xác suất để có một nhóm có đúng 2 nam và 1 nữ.

Câu7.(1 điểm) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', có $AB = AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 120^o$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Góc giữa cạnh bên với đáy là 30^o. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa AA' với BC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1): $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ và (C_2): $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với cả hai đường tròn (S_1), (S_2), biết tâm I thuộc đường thẳng d: $x - y = 0$.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3} = (x+1)(\sqrt{x+2}-2)$, $x \in \mathbf{R}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c.Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \dfrac{a^2}{(a+b)^2} + \dfrac{b^2}{(b+c)^2} + \dfrac{4c^3}{3(c+a)^3}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**

• Chiều biến thiên:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

$y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

$y(0) = 0$, $y(2) = 4$

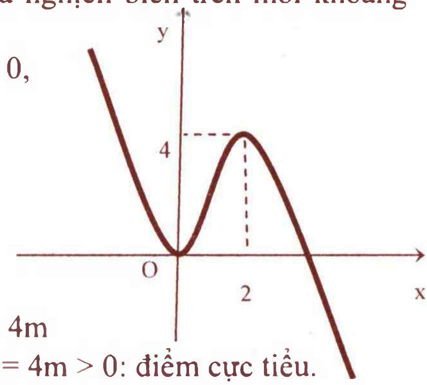
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng (0; 2) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 và $y_{CT} = 0$, đạt cực đại tại x = 2 và $y_{CĐ} = 4$.

• Đồ thị: $y'' = -6x + 6$, $y'' = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$, $y(1) = 2$ nên I(1; 2) là điểm uốn và là tâm đối xứng của đồ thị.



Câu 2.

Tập xác định D = **R**.

$y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$, $y'' = 12x^2 + 4m$

Khi m > 0 thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ta có $y''(0) = 4m > 0$: điểm cực tiểu.

Khi m = 0 thì không có điểm cực trị nào.

Khi m < 0 thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{-m}$.

Ta có $y''(\pm\sqrt{-m}) < 0$ nên đồ thị có 2 điểm cực đại:

$x = \pm\sqrt{-m}$, $y = x^4 + 2mx^2 - 2$.

Khử m thì quỹ tích các điểm cực đại là đường cong: $y = -x^4 - 2$.

Câu 3.

a) Ta có: $z_0 = \dfrac{(2i)^4(-1-2i)}{(-2i)^3(1-i)} = \dfrac{2(-1-2i)(1+i)}{2i} = -3 - i$

Vì z_0 là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên

$(-3-i)^2 + b(-3-i) + c = 0 \Leftrightarrow 8 - 3b + c + (6-b)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-3b+c=0 \\ 6-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6 \\ c=10 \end{cases} \Rightarrow w = 6+10i$. Vậy $|w| = \sqrt{10^2+6^2} = 2\sqrt{34}$.

b) Phương trình: $27^x + 12^x = 2.8^x$.

Chia 2 vế cho $8^x > 0$ thì PT: $\left(\frac{27}{8}\right)^x + \left(\frac{12}{8}\right)^x = 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$.

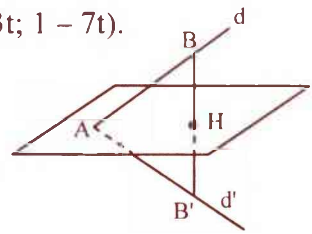
PT: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy nghiệm phương trình: $x = 0$.

Câu 4. Ta có $f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}e^x = \sqrt{x^2-1}.e^x + \frac{xe^x}{\sqrt{x^2-1}} = (\sqrt{x^2-1}.e^x)'$

Vậy nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}e^x$ là $F(x) = \sqrt{x^2-1}.e^x + C$.

Câu 5. Gọi A là giao điểm của d và (P) thì $A(2-t; 3t; 1-7t)$.



Thế toạ độ vào (P) thì $t = 1$ nên $A(1; 3; -6)$.

Đường thẳng d đi qua $B(2; 0; 1)$.

Ta tìm hình chiếu H của B lên (P).

Phương trình đường thẳng qua B, vuông góc với (P) có :

VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{n_P} = (1; 2; 1)$: $\begin{cases} x = 2+t' \\ y = 2t' \\ z = 1+t' \end{cases}$.

Thế x, y, z vào (P) thì được $t' = -\frac{1}{3}$ nên $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Do đó điểm đối xứng B qua (P) là $B'\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Đường thẳng d' có VTCP $\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{1}{3}; \frac{-13}{3}; \frac{19}{3}\right)$ hay $(1; -13; 19)$ nên có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-13} = \frac{z+6}{19}$.

Câu 6.

a) PT: $2\cos2x\sin x - 2\sqrt{3}\sin2x\sin x + \cos2x - \sqrt{3}\sin2x = 0$

$\Leftrightarrow (1 + 2\sin x)(\cos2x - \sqrt{3}\sin2x) = 0$.

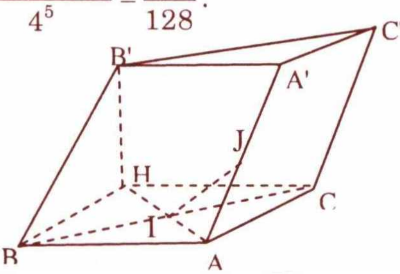
Xét $1 + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

Xét $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Do đó nghiệm: $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Chọn các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là $x = \frac{\pi}{12}; x = -\frac{\pi}{6}$.

b) Với mỗi học sinh có 4 cách sắp xếp học sinh đó vào một nhóm nào đó trong 4 nhóm. Do đó số cách sắp xếp cho 5 học sinh vào 4 nhóm là 4^5.
Số cách chọn 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ trong 5 học sinh là $C_3^2.C_2^1$.
Với mỗi cách chọn trên, có 4 cách xếp 3 học sinh đó vào một nhóm và có 3^2 cách xếp 2 học sinh không được chọn vào 3 nhóm còn lại.
Do đó số cách sắp xếp có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ vào một nhóm là $4.C_3^2.C_2^1.3^2$. Vậy xác suất là: $P = \frac{4.C_3^2.C_2^1.3^2}{4^5} = \frac{27}{128}$.



Câu 7. Dựng hình bình hành ABHC
$\Rightarrow$ hai tam giác ABH và BCH đều
$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$
$\Rightarrow \widehat{A'AH} = 30^o$.

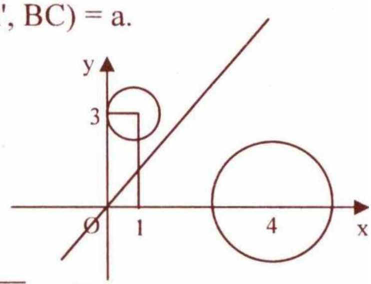
Tam giác ABH đều $\Rightarrow AH = 4a \Rightarrow A'H = 4a\tan 30^o = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}4a.4a.\sin 120^o = 4a^2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 4a^2.\sqrt{3}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = 16a^3.$$

Gọi I là giao điểm AH và BC, hạ $IJ \perp AA'$
Ta có: $BC \perp AI$, $BC \perp IJ \Rightarrow d(AA', BC) = IJ$.

Mà $IJ = AI\sin 30^o = 2a.\frac{1}{2} = a \Rightarrow d(AA', BC) = a$.

Câu 8.



Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 3)$, bán kính $R_1 = 1$;
Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(4; 0)$, bán kính $R_2 = 2$.
Gọi $I(x; x)$ thì

$$II_1 = \sqrt{2x^2 - 8x + 10} = \sqrt{2(x-2)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$$

$$II_2 = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$$

Và $|II_1 - II_2| = \frac{6}{II_1 + II_2} \leq \sqrt{2} < R_1 + R_2$

Nếu gọi R là bán kính đường tròn tâm I, thì chỉ xảy ra trường hợp:

$$R = II_1 - R_1 = II_2 - R_2 \Rightarrow \begin{cases} II_2 - II_1 = 1 \\ II_2 + II_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow II_2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{34}}{4}$$

Vậy có hai đường tròn thỏa là:

$$(T_1): \left(x - \frac{8+\sqrt{34}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{8+\sqrt{34}}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$(T_2): \left(x - \frac{8-\sqrt{34}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{8-\sqrt{34}}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Câu 9. Điều kiện: $x \geq -2$.

Phương trình: $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} = (x+1)(\sqrt{x+2} - 2)$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2 - 2x + 3} = (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

Khi $x = 2$ thì phương trình nghiệm đúng.

Khi $x \neq 2$ thì PT: $\dfrac{x+4}{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2} - 2}$

$$\Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+2} + 2) = (x+1)(x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow ((\sqrt{x+2})^2 + 2)(\sqrt{x+2} + 2) = ((x-1) + 2)((x-1)^2 + 2)$$

Xét hàm số: $f(t) = (t+2)(t^2+2)$ với $t \in \mathbf{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0$ với mọi t nên f đồng biến trên **R**.

Phương trình: $f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = 2$; $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 10. Ta có $P = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{b}\right)^2} + \dfrac{4}{3\left(1+\dfrac{a}{c}\right)^3}$

Đặt $x = \dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{c}{b}$, $z = \dfrac{a}{c}$ thì x, y, z dương thỏa mãn $xyz = 1$ và

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^2}$$

Ta chứng minh $\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+y)^2} \geq \dfrac{1}{1+xy}$

Thật vậy, bất đẳng thức $\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Áp dụng thì ta có: $P \geq \dfrac{1}{1+xy} + \dfrac{4}{3(1+z)^2} = \dfrac{z}{1+z} + \dfrac{4}{3(1+z)^3}$

Xét hàm số $f(z) = \dfrac{z}{1+z} + \dfrac{4}{3(1+z)^3}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} - \dfrac{4}{(1+z)^4} = \dfrac{(z-1)(z+3)}{(1+z)^4}$

$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$-\infty$
y'		−	0	+	
y	16	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Suy ra $P \geq \dfrac{2}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hay $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$.

ĐỀ SỐ 34

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm) Xác định m để hàm số: $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ đồng biến trên khoảng (0; 3).

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $z^3 - 8 = 0$.

b) Giải phương trình $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x.\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$.

Câu5.(1 điểm)Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{z}{3}$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ O và bán kính bằng 1.

Câu 6. (1 điểm)

a) Không dùng máy tính, tính: $A = \cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ$

b) Tìm số nguyên dương n thoả mãn:

$$C_n^1 3^1 - 2C_n^2 3^2 + 3C_n^3 3^3 - ... + (-1)^{n-1} n C_n^n 3^n = 33792$$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp đều S.ABC có các cạnh đáy bằng a, đường cao hình chóp $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) qua cạnh đáy BC và vuông góc với cạnh bên SA. Hỏi mp(P) chia hình chóp thành 2 phần có tỉ số thể tích là bao nhiêu?

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng (Oxy), cho hình thoi ABCD có A(–2; 0), đỉnh B thuộc trục Oy. Đỉnh C và trọng tâm của tam giác ABC đều thuộc đường thẳng Δ: x + 2y – 3 = 0. Viết phương trình đường thẳng CD.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x^2y+y} + 2xy = 2 \\ x^3 + x^2y + y = x^2 + 2xy \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho $0 \le x \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $y = \sqrt{1-3x^2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3(2+\sqrt{3})} \le \sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y} \le 2\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên:

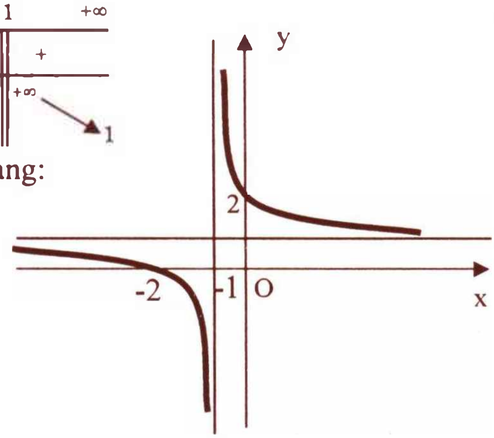
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -1$ là TCĐ

$y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \ne -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		–	||	+	
y	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng:

$(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

• Đồ thị: x = 0

$\Rightarrow y = 2$, $y = 0 \Rightarrow x = -2$.

Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận I(–1;1).

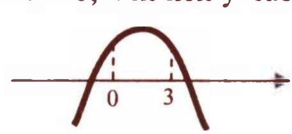
Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$; $\Delta' = m^2 - m + 4 > 0, \forall m$ nên y' luôn có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện đồng biến trên (0; 3):

$y' \ge 0, \forall x \in (0; 3)$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = m + 3 \ge 0 \\ y'(3) = 7m - 12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -3 \\ m \ge \dfrac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{12}{7}.$$

Vậy giá trị cần tìm: $m \ge \dfrac{12}{7}$.

Câu 3.

a) Ta có: $z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2$ hay $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Phương trình bậc hai $z^2 + 2z + 4 = 0$ có $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ nên có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{3}$.

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm phức: $z = 2$; $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

b) Đặt $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$, $t > 0$ thì PT: $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6 \Leftrightarrow t^2 - \dfrac{5}{2}t = 6$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 12 = 0$. Chọn nghiệm $t = 4$.

Do đó: $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$

$\Leftrightarrow 2 - x \ge 0$ và $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow x \le 2$ và $x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình cho có nghiệm $x = \dfrac{3}{2}$.

Câu 4. Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

Khi $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3}$; $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x.\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}dx$

$$= -\sqrt{2}\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{t^2}{1+t}dt = \sqrt{2}\int_{1}^{\sqrt{3}}\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt = \sqrt{2}\left(2 - \sqrt{3} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Câu 5. Δ qua $A(0; \sqrt{3}; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 2; 3)$.

Gọi $\vec{n} = (A; B; C) \ne \vec{0}$ là VTPT của (P).

(P): $Ax + By + Cz - B\sqrt{3}) = 0$. Ta có $\vec{n}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow A + 2B + 3C = 0$

Do đó $d(O; (P)) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|B\sqrt{3}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1$.

$\Leftrightarrow B^2 + 6BC + 5C^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = -C \\ B = -5C \end{array}\right.$

Khi $B = -C$ chọn $C = -1, B = 1 \Rightarrow A = 1$ nên mặt phẳng (P): $x + y - z - \sqrt{3} = 0$

Khi B = –5C chọn C = 1, B = –5

$\Rightarrow$ A = 7 nên mặt phẳng (P): $7x - 5y + z + 5\sqrt{3} = 0$.

Vậy mặt phẳng (P): $x + y - z - \sqrt{3} = 0$; $7x - 5y + z + 5\sqrt{3} = 0$.

Câu 6.

a) $A.\sin20^o = \sin20^o.\cos20^o.\cos40^o.\cos80^o$

$= \frac{1}{2}\sin40^o.\cos40^o.\cos80^o = \frac{1}{4}\sin80^o.\cos80^o = \frac{1}{8}\sin160^o = \frac{1}{8}\sin20^o \Rightarrow A = \frac{1}{8}$

b) Xét khai triển Newton

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n, \forall x \in \mathbf{R}$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

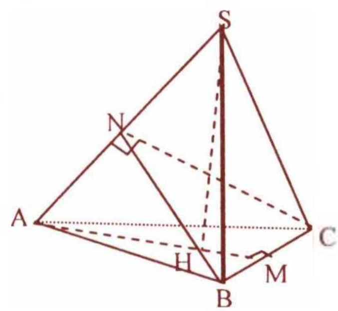
$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}, \forall x \in \mathbf{R}$$

Cho x = –3 ta có: $C_n^1 - 2C_n^2 3 + 3C_n^3 3^2 - ... + (-1)nC_n^n 3^n = 3n(-2)^{n-1}$

Theo đề $3n(-2)^{n-1} = 33792 \Leftrightarrow (-1)^{n-1} n2^{n-1} = 11264 \Leftrightarrow n = 11$.

Vậy giá trị cần tìm là n =11.

Câu 7. Vì S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H của chóp là tâm tam giác đều ABC. Ta có AH cắt BC tại trung điểm M của BC và BC ⊥ SA. Hạ BN ⊥ SA ⇒ SA ⊥ (BCN) ⇒ ΔBCN là thiết diện cần tìm. Vì thiết diện chia chóp thành hai tứ diện có chung đáy (BCN) nên tỉ số hai thể tích bằng tỉ số hai đường cao $\frac{AN}{SN}$.



Vì ΔSAH ~ MAN nên

$$\frac{AN}{SA} = \frac{AH.AM}{SA^2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{10}{3}a^2} = \frac{3}{20}$$

Vậy tỉ thể tích là: $\frac{3}{17}$ hay $\frac{17}{3}$.

Câu 8. Ta có B ∈ Oy ⇒ B(0; 2b).

Gọi M trung điểm AB, ta có: M(–1; b)

Mà M ∈ Δ ⇔ –1 + 2b – 3 = 0 ⇔ b = 2. Vậy B(0; 4)

Ta có C ∈ Δ ⇔ C(3 – 2c; c) nên $AB^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow (3 - 2c)^2 + (c - 4)^2 = 20 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 2 \pm \sqrt{3}$

Khi $c = 2 + \sqrt{3}$ thì $C(-1 - 2\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$, do đó, đường thẳng CD qua C có VTCP $\overrightarrow{AB} = (2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n} = (2; -1)$ là VTPT của CD.

Vậy CD: $2x - y + 4 + 5\sqrt{3} = 0$.

Khi $c = 2 - \sqrt{3}$ thì $C(-1 + 2\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$, do đó, đường thẳng CD qua C có VTPT $\overrightarrow{n} = (2; -1)$.

Vậy phương trình phương trình CD: $2x - y - 4 + 5\sqrt{3} = 0$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x^2y+y}+2xy=2 \\ x^3+x^2y+y=x^2+2xy \end{cases}$.

Điều kiện: $x^2y + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^2(x-1) + y(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + xy - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + xy - y = 0 \end{array}\right.$

Với $x = 1$, thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$\sqrt{2y} = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ hay $y = \dfrac{10-3\sqrt{17}}{4}$ Với $x^2 + xy - y = 0 \Leftrightarrow xy = -x^2 + y$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$3\sqrt{y(x^2+1)} + 2(-x^2+y) = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{y(x^2+1)} + 2y = 2(x^2+1)$$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{y}{x^2+1}} + 2\dfrac{y}{x^2+1} - 2 = 0$

Chọn: $\sqrt{\dfrac{y}{x^2+1}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2+1}{4}$

Do đó phương trình: $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1-\sqrt{2}, x = -1+\sqrt{2}$

Khi đó y có giá trị tương ứng là: $y = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, y = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left(1; \dfrac{13-3\sqrt{17}}{4}\right), \left(-1; \dfrac{1}{2}\right), \left(-1-\sqrt{2}; \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \left(-1+\sqrt{2}; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 10. Từ giả thiết $0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $y = \sqrt{1-3x^2}$ nên:

$$x \geq 0, y \geq 0, 3x^2 + y^2 = 1.$$

Ta có: $(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y})^2 \leq 2[4 + 3(x+y)]$

Và $(x+y)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}x + y\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{3}+1\right)(3x^2+y^2) = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow x + y \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow (\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y})^2 \leq 4(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow \sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y} \leq 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Mặt khác: $(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y})^2 = 4 + 3(x+y) + 2\sqrt{4 + 6(x+y) + 9xy}$

$\Rightarrow (\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y})^2 \geq 4 + 3(x+y) + 2\sqrt{4 + 6(x+y)}$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \ge x^2 + y^2 \ge x^2 + \frac{y^2}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 + y^2) = \frac{1}{3} \Rightarrow x + y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y})^2 \ge 4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= 4 + \sqrt{3} + 2(\sqrt{3} + 1) = 6 + 3\sqrt{3} = 3(2+\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y} \ge \sqrt{3(2+\sqrt{3})}$$

Vậy $\sqrt{3(2+\sqrt{3})} \le \sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y} \le 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

ĐỀ SỐ 35

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 4x^2$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm điểm M trên đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính tổng: $T = C_{100}^{0} - C_{100}^{2} + C_{100}^{4} - C_{100}^{8} + \ldots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1} = 2 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln x)^2}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5). Tính độ dài đường cao h_A của tam giác vẽ từ đỉnh A và tính độ dài đường phân giác trong của tam giác vẽ từ đỉnh B.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $(1 + 2\sin x).\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

b) Một nhóm 10 học sinh gồm 6 nam trong đó có Tân và 4 nữ trong đó có Quyên được xếp ngồi vào dãy 10 cái ghế trên một hàng ngang. Tính xác suất để giữa 2 bạn nữ gần nhau có 2 bạn nam, đồng thời Tân không ngồi cạnh Quyên.

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm đoạn A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối tứ diện IABC theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Biết có phương trình đường thẳng AB: x – 3y + 5 = 0, đường chéo BD: x – y – 1 = 0 và đường chéo AC qua điểm M(–9; 2). Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $2x + 5\sqrt{x} > 11 + \dfrac{14}{x-2}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn a+b+c =1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

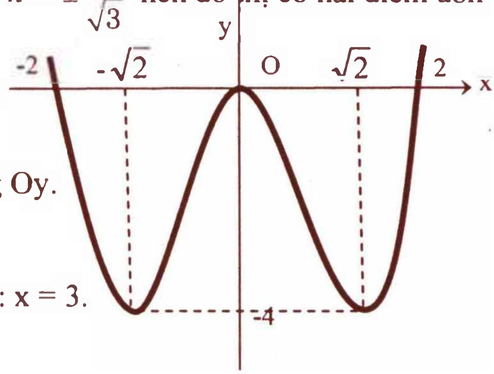
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (–2; 0) và (2; +∞), nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$.

Hàm số đạt CĐ(0; 0), đạt CT$(-\sqrt{2}; -4)$, $(\sqrt{2}; -4)$.

- Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 8$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị có hai điểm uốn $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}; -\dfrac{20}{9}\right)$.



Cho y = 0 thì x = 0, x = ± 2.

Đồ thị đối xứng nhau qua trục tung Oy.

Câu 2.

Tập xác định: D = **R**\{3}.

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty$ nên TCĐ: x = 3.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$ nên TCN: y = 1.

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C)$. Gọi d_1 là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và d_2 là khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang thì:

$$d_1 = |x_0 - 3|,\ d_2 = |y_0 - 1| = \frac{5}{|x_0 - 3|}.$$

Ta có $|x_0 - 3| = \dfrac{5}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$.

Vậy $M(3 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5})$, $M'(3 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$.

Câu 3.

a) Ta có: $(1+i)^{100} = C_{100}^{0} + C_{100}^{1}i + C_{100}^{2}i^{2} + \ldots + C_{100}^{100}i^{100}$

$$= \left(C_{100}^{0} - C_{100}^{2} + C_{100}^{4} - \ldots + C_{100}^{100}\right) + \left(C_{100}^{1} - C_{100}^{3} + \ldots - C_{100}^{99}\right)i$$

Mặt khác: $(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{100} = (2i)^{50} = -2^{50}$.

So sánh phần thực và phần ảo của $(1+i)^{100}$ thì

$$C_{100}^{0} - C_{100}^{2} + C_{100}^{4} + \ldots - C_{100}^{99} + C_{100}^{100} = -2^{50}$$

Vậy $T = C_{100}^{0} - C_{100}^{2} + C_{100}^{4} + \ldots - C_{100}^{99} + C_{100}^{100} = -2^{50}$.

b) Đặt $\begin{cases} u = 2^{x+y} \ (u > 0) \\ v = 3^{y} \ (v > 0) \end{cases}$

Hệ đã cho $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^{y} = 5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 3^{y} = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = \log_2 3 \\ y = \log_3 2 \end{cases}$

Suy ra nghiệm: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \log_2 3 - \log_3 2 \\ y = \log_3 2 \end{cases}$.

Câu 4. Đặt $t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx$.

Ta có $t - 1 = \ln x \Rightarrow \ln^2 x = (t-1)^2$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$

Ta có: $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln x)^2}dx = \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^2}dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \left(t - 2\ln|t| - \frac{1}{t}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; 5; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-38; -26; -10)$

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{555}$

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{553}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{26}}.$$

Gọi D(x; y; z) là chân đường phân giác vẽ từ B:

Ta có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \dfrac{1}{2}$

Vì D nằm giữa A, C nên $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x+4 \\ 2(2-y) = y-7 \\ 2(-1-z) = z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $D\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow BD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 6.

a) Phương trình tương đương

$(1 + 2\sin x)(\dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (1 + 2\sin x)(\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2\sin x\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin x\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin x(-\sin x - \sqrt{3}\cos x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$

Khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Khi $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \cos(2x + \dfrac{\pi}{3}) = \cos(x - \dfrac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} = x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $2x + \dfrac{\pi}{3} = -(x - \dfrac{\pi}{6}) + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{-\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x = k\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \frac{-\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z}).$$

b) Xếp 10 người vào dãy 10 ghế thì có 10! cách.

Đánh số dãy 10 cái ghế từ 1 đến 10 từ trái sang phải. Giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam khi và chỉ khi 4 bạn nữ ngồi ở ghế số 1, 4, 7, 10.

Xét các trường hợp:

– Quyên ngồi ghế số 1. Khi đó 3 bạn nữ còn lại có 3! cách xếp vào ghế số 4, 7, 10. Vì Tân không ngồi gần Quyên nên có 5 cách chọn chỗ cho Tân , 5 bạn nam còn lại được xếp vào 5 ghế trống, có 5! cách. Theo quy tắc nhân có 3!.5.5! = 3600 cách.

– Quyên ngồi ghế số 10. Tương tự như trên, có 3660 cách xếp

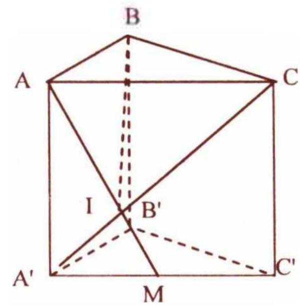
– Quyên ngồi ghế số 4. Khi đó 3 bạn nữ còn lại có 3! cách xếp vào ghế số 1, 7, 10. Có 4 cách xếp Tân vào hàng, còn 5 bạn nam có 5! cách xếp. Do đó có 3!.4.5! = 2880 cách.

– Quyên ngồi ghế số 7. Tương tự như trên, có 2880 cách xếp

Do đó tổng cộng có 2(3600 + 2880) = 12 960 cách xếp.

Vậy xác suất $P = \frac{12960}{10!} = \frac{1}{280}$.

Câu 7. Ta có $\frac{d(I,(ABC))}{d(M,(ABC))} = \frac{2}{3}$.



$\Rightarrow d(I;(ABC)) = \frac{2}{3}d(M;(ABC)) = \frac{2}{3}.2a = \frac{4a}{3}$

Ta có $AC = a\sqrt{5} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow S_{ABC} = a^2$.

Vậy $V_{IABC} = \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.a^2 = \frac{4a^3}{9}$.

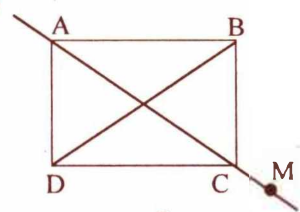
Câu 8. Ta có toạ độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(4;3)$$

$BC \perp AB \Rightarrow BC: 3(x - 4) + (y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 15 = 0$

Ta có $D \in DB \Rightarrow D(d; d - 1) \Rightarrow AD: 3x + y - 4d + 1 = 0$

$\Rightarrow A: \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 4a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{6a - 4}{5}; \frac{2a + 7}{5})$



Gọi I là tâm hình chữ nhật

$\Rightarrow$ I là trung điểm của BD

nên $I(\frac{a + 4}{2}; \frac{a + 2}{2})$

Vì A, I, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IM} \Rightarrow \frac{7a - 28}{a + 22} = \frac{-a + 4}{a - 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 4 \end{array}\right.$

Với $a = 4 \Rightarrow D(4; 3)$ trùng B (loại)

Với $a = -1 \Rightarrow D(-1; -2), A(-2; 1), I(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) \Rightarrow C(5; 0)$

Vậy A(–2; 1), B(4; 3), C(5; 0), D(–1; –2).

Câu 9. Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 2$.

Bất phương trình: $2x + 5\sqrt{x} > 11 + \frac{14}{x - 2}$

$\Leftrightarrow 2(x - 2) + 5\sqrt{x} > 7 + \frac{14}{x - 2} \Leftrightarrow 2(x - 2) + 5\sqrt{x} > \frac{7x}{x - 2}$

Ta có x = 0 không thỏa mãn bất phương trình (1)

Với x >0 , $x \neq 2$ bất phương trình tương đương với $\frac{2(x - 2)}{\sqrt{x}} + 5 > \frac{7\sqrt{x}}{x - 2}$

Đặt $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}=t$ thì bất phương trình trở thành

$$2t+5>\frac{7}{t}\Leftrightarrow\frac{2t^2+5t-7}{t}>0\Leftrightarrow t(2t+7)(t-1)>0$$

$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}<t<0$ hoặc $t>1$

Với $-\dfrac{7}{2}<t<0$ ta có $-\dfrac{7}{2}<\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2\\(\sqrt{x}+4)(2\sqrt{x}-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<x<2$

Với $t>1$ ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}>1 \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow x>4$

Vậy nghiệm bất phương trình là $x>4$, $\dfrac{1}{4}<x<2$.

Câu 10. Áp dụng bất đẳng thức $3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge(ab+bc+ca)^2$

thì $M\ge(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{1-2(ab+bc+ca)}$

Đặt $t=ab+bc+ca$, với a, b, c ≥ 0 và $a+b+c=1$, ta có

$0\le ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ nên $0\le t\le\dfrac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ với $0\le t\le\dfrac{1}{3}$

thì $f'(t)=2t+3-\dfrac{2}{\sqrt{1-2t}}$ và ta có $f''(t)=2-\dfrac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}\le 0$, dấu bằng chỉ xảy ra tại $t=0$ nên f '(t) nghịch biến, do đó

$t\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow f'(t)\ge f'(\dfrac{1}{3})=\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}>0$

Suy ra f(t) đồng biến, do đó $t\ge 0\Rightarrow f(t)\ge f(0)=2$.
Vậy $M\ge 2$, khi a = b =0, c = 1 thì M = 2 nên min M = 2.

ĐỀ SỐ 36

Câu 1. (1 điểm)
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=x^3-6x^2+9x-1$.

Câu 2. (1 điểm) Xác định m để đồ thị của hàm số: $y=x^4-2mx^2+m^3-m^2$ đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 3. (1 điểm)
a) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện:
$2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$.

b) Giải phương trình: $\log_3 \dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$.

Câu4.(1điểm) Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x\cos^3 x}$, $y = 0$

và hai đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$. Tính diện tích của hình phẳng đó.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $x - 2y + z - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d song song với (α) sao cho d lần lượt cắt trục hoành, trục tung tại A và B với $AB = \sqrt{5}$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Không dùng máy tính, tính:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

b) Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển thành đa thức của:

$(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$

Câu 7. (1 điểm) Cho khối chóp S.ABC có SA = SB = SC = a và $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{CSA} = 135^0$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E): $x^2 + 4y^2 = 25$ và đường thẳng (Δ): $3x + 4y - 30 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên elip (E) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) là lớn nhất, nhỏ nhất.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \sqrt{x-y} = 8 \\ y\sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Không sử dụng máy tính, hãy chứng minh bất đẳng thức: $\log_{\sqrt{3}} 2 > \log_2 \sqrt{5}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

- Tập xác định: D = **R**
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

Ta có: $y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x + 2}$, $y' < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

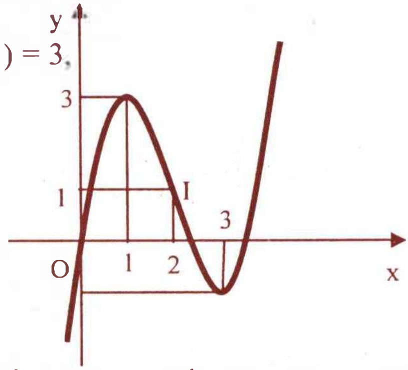
Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CĐ} = y(1) = 3$,

đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = -1$.

• Đồ thị: $x = 0 \Rightarrow y = -1$;

$y'' = 6x - 12$, cho $y'' = 0$

$\Rightarrow x = 2$ nên có tâm đối xứng là điểm uốn $I(2; 1)$



Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Nếu $m \le 0$ thì $x^2 - m \ge 0$ với mọi x nên đồ thị không tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm phân biệt.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0$ khi $x = 0$, $x = \pm\sqrt{m}$.

Đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi.

$$f(\sqrt{m}) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + m^3 - m^2 = 0$$

$\Leftrightarrow m^2(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (do $m > 0$)

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

a) Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = 2|(y + 1)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$.

Vậy tập hợp cần tìm là đường cong: $y = \dfrac{x^2}{4}$

b) Phương trình: $\log_3 \dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = (2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$

thì $f'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Do đó f(t) đồng biến, nên phương trình:

$$f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 5) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5$$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $x = -2$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$, $x = -2$

Câu 4. Vì $\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \sin x > 0, \cos x > 0$ nên ta có

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left|\frac{1}{\sin x\cos^3 x}\right| dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cos^3 x} dx$$

Hay $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sin 2x\cos^2 x} dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ và $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$

Đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}$

Do đó: $S = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{t} dt = \int_1^{\sqrt{3}} (\frac{1}{t} + t)dt = \left(\ln t + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$.

$= \frac{1}{2}(3-1) + \ln\sqrt{3} = 1 + \ln\sqrt{3}$.

Câu 5. Gọi $A(a; 0; 0) \in Ox$; $B(0; b; 0) \in Oy$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a; b; 0) \Rightarrow AB^2 = a^2 + b^2 = 5$

$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0) \perp \overrightarrow{n_\alpha} = (1; -2; 1) \Leftrightarrow a = -2b$

Suy ra: $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

Khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$ d qua $A(-2; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 0)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow$ d qua $A(2; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-2;-1; 0)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$.

Vậy có 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$; d: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 6.

a) Ta có $A = (\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}) + (\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16})$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} + 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}.\cos^2\frac{3\pi}{16}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Ta có: $(1 + x + x^2 + x^3)^{10} = (1 + x)^{10}(1 + x^2)^{10}$

$$(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k \text{ và } (1+x^2)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i x^{2i}$$

Với i và k là các số tự nhiên thì:

$$2i + k = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ i = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 3 \\ i = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 5 \\ i = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 7 \\ i = 0 \end{cases}$$

Vậy số hạng chứa x^7 là: $(C_{10}^1 C_{10}^3 + C_{10}^3 C_{10}^2 + C_{10}^5 C_{10}^1 + C_{10}^7)x^7$.

Câu 7. Khối chóp S.ABC có

$SA = SB = SC = a$ và

$\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{CSA} = 135^0$.

Hạ $CH \perp (SAB)$ và

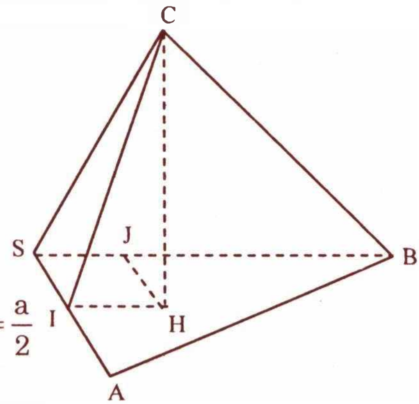
hạ $HI \perp SA$, $HJ \perp SB$

$\Rightarrow SA \perp CI$, $SB \perp CJ$

Ta có

$$SI = \frac{a\sqrt{2}}{2} SJ = \frac{a}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{a}{2}$$

Và $S_{ABC} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$



Câu 8. Gọi $M(x_0; y_0) \in (E)$: $x^2 + 4y^2 = 25$ nên $x_0^2 + 4y_0^2 = 25$ và

$$d(M; \Delta) = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 30|}{5}.$$

Ta có: $|3x_0 + 4y_0| \le \sqrt{(x_0^2 + 4y_0^2)(3^2 + 2^2)} = 5\sqrt{13}$

$\Rightarrow 30 - 5\sqrt{13} \le |3x_0 + 4y_0 - 30| \le 30 + 5\sqrt{13}$

Vậy $\max d(M; \Delta) = 6 + \sqrt{13}$ đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{3} = y_0 < 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{15}{\sqrt{13}} \\ y_0 = -\dfrac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{15}{\sqrt{13}}; -\dfrac{5}{\sqrt{13}}\right)$$

Và $\min d(M; \Delta) = 6 - \sqrt{13}$ đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{3} = y_0 > 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{15}{\sqrt{13}} \\ y_0 = \dfrac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{15}{\sqrt{13}}; \dfrac{5}{\sqrt{13}}\right).$$

Câu 9. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x-y}\ (u \geq 0) \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2 + v}{2} \\ y = \dfrac{v - u^2}{2} \end{cases}$

Hệ $\begin{cases} x + y + \sqrt{x-y} = 8 \\ y\sqrt{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 8 \\ \dfrac{v - u^2}{2}.u = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow u^3 + u^2 - 8u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2;\ u = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Chọn nghiệm $u = 2;\ u = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

Với $u = 2 \Rightarrow v = 6 \Rightarrow x = 5;\ y = 1$

Với $u = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow v = \dfrac{19 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = 8 - \sqrt{17}; y = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ: $(5;1)$, $(8 - \sqrt{17}; \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2})$.

Câu 10. Ta có bất đẳng thức:

$\log_{\sqrt{3}} 2 > \log_2 \sqrt{5} \Leftrightarrow \log_3 4 > \log_4 5 \Leftrightarrow \log_4 3.\log_4 5 < 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương

$$\log_4 3.\log_4 5 \leq \left(\frac{\log_4 3 + \log_4 5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_4 16}{2}\right)^2 = 1$$

Vậy: $\log_{\sqrt{3}} 2 > \log_2 \sqrt{5}$.

ĐỀ SỐ 37

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x-4}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm các số thực a,b để có phân tích:
$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z-1)(z^2+az+b)$
Suy ra nghiệm phức của phương trình $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0$.

b) Giải phương trình: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = e^{-2x}.\cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm A(1; 0; 3), B(−3; 1; 3), C(1; 5; 1) và M(x; y; 0). Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = 2\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{\cos 2x - \sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2} + 2\cos x} = \sin x$.

b) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đường cao SO = 1 và đáy ABC có cạnh bằng $2\sqrt{6}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và AB. Tính thể tích hình chóp S.AMN và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.AMN.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (d): $x - 3 = 0$ và điểm A(−1; 0). Tìm tọa độ hai điểm B, C trên (d) để ABC là tam giác đều

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^2+3\&x-1} - 2\sqrt{6x-1} \geq x+1$.

Câu 10. (1 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn:
$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức của:

$$P = \frac{x}{x^2+3} + \frac{y}{y^2+3} + \frac{z}{z^2+3}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

Ta có $y = \dfrac{x-4}{x+1} = 1 - \dfrac{5}{x+1}$.

• Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

• Chiều biến thiên:

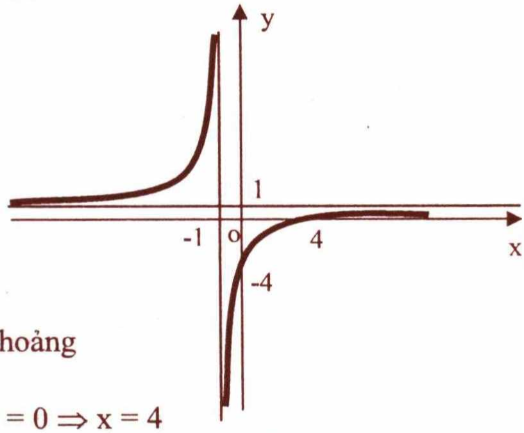
$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng x = –1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang y = 1

$y' = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1		$+\infty$
y'	–	‖	+	
y	1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1



Hàm số y đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

• Đồ thị: Cho x = 0 ⇒ y = – 4; y = 0 ⇒ x = 4

Đồ thị nhận giao điểm hai tiệm cận I(–1;1) làm tâm đối xứng.

Câu 2. Tập xác định D = **R** \ {–1}.

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm\sqrt{6}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{6}$		-1		$-1+\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-4-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{6}-4$	↗	$+\infty$

Vậy điểm CĐ$(-1-\sqrt{6}; -4-2\sqrt{6})$.

Câu 3.

a) Ta có $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z-1)(z^2 + az + b)$

$\Leftrightarrow 2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 2z^3 + (2a-1)z^2 + (2b-a)z - b$

Đồng nhất, ta có hệ: $\begin{cases} 2a-1=-9 \\ 2b-a=14 \\ -b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$

Do đó phương trình $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (2z-1)(z^2-4z+5) = 0 \Leftrightarrow 2z-1=0$ hoặc $z^2 - 4z + 5 = 0$

Phương trình bậc hai $z^2 - 4z + 5 = 0$ có biệt thức

$\Delta = 16 - 20 = -4$ nên có các căn bậc hai là ±2i.

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm phức: $\dfrac{1}{2}$, 2–i, 2+i

b) Ta có $\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$.

Đặt $t = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$, $t > 0$.

PT: $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 4$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 + \sqrt{3}$ hoặc $t = 2 - \sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm x = 2 hoặc x = –2.

Câu 4. Ta có $f(x) = ey^{-2x}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-2x}\sin 2x)'$$

Vậy nguyên hàm của $f(x) = e-^{2x}.\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ là hàm số

$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2x}\sin 2x + C$.

Câu 5. Gọi I là trung điểm của BC:

$\Rightarrow I(-1; 3; 2) \Rightarrow \overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MI}$

Do đó $T = 2\left|\overline{MA}\right| + \left|\overline{MA} + \overline{MC}\right| = 2(MA + MI)$.

Vì $z_A = 3 > 0$ và $z_I = 2 > 0 \Rightarrow$ A và I nằm về cùng 1 phía đối với mp (Oxy) và M (x;y;0) thuộc mp (Oxy) nên lấy đối xứng I(–1; 3; 2) qua mp(Oxy) thành J(–1; 3; –2) $\Rightarrow MI = MJ \Rightarrow T = 2(MA + MJ) \geq 2AJ = 2\sqrt{38}$.

Dấu = xảy ra khi M là giao điểm của đoạn MJ với mp (Oxy) là $M\left(-\frac{1}{5}; \frac{9}{5}; 0\right)$.

Vậy $\min T = 2\sqrt{38}$.

Câu 6.

a) Với điều kiện $\cos x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x + 1 - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin x + 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) = 0$

Xét $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy nghiệm PT là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Để lập thành một số theo yêu cầu, ta thực hiện:

– Chọn ba trong năm vị trí của a, b, c, d, e để xếp vào ba chữ số 3, có $C_5^3 = 10$ cách chọn

– Chọn hai chữ số trong 4 chữ số còn lại và xếp vào hai vị trí còn lại, có A_4^2 cách thực hiện.

Vậy có tất cả $C_5^3.A_4^2 = 120$ số thoả đề bài.

Trong các số nói trên, số chia hết cho 3 là số có tổng các chữ số chia hết cho 3, mà có ba chữ số 3 nên hai chữ số còn lại có tổng chia hết cho 3, có bốn trường hợp thoả mãn, đó là 1 với 2, 1 với 5, 2 với 4 và 4 với 5.

Với các trường hợp đó, để thành lập số chia hết cho 3, ta thực hiện:

– Chọn ba trong năm vị trí để xếp vào 3 chữ số 3, có C_5^3 cách chọn.

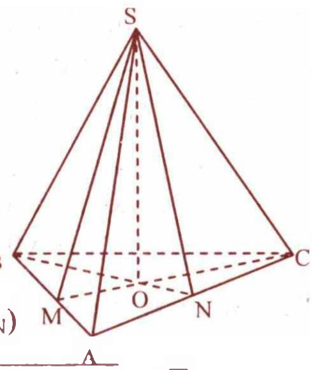
– Chọn hai chữ số có tổng chia hết cho 3 trong 4 chữ số còn lại có 4 cách chọn.

– Xếp hai chữ số vừa chọn vào hai vị trí còn lại, có hai cách xếp.

Suy ra có $2.4.\ C_5^3 = 80$ số chia hết cho 3.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

Câu 7. Thể tích hình chóp



Ta có: $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{SAMN} = \frac{1}{3}S_{AMN}.SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.AMN, ta có:

$$V_{SAMN} = \frac{1}{3}r(S_{AMN} + S_{ASM} + S_{ASN} + S_{SMN})$$

Ta có $CM = 3OM \Rightarrow OM = \sqrt{2} \Rightarrow SM = \sqrt{OM^2 + SO^2} = \sqrt{3}$.

Ta lại có, trong tứ diện SABC, hai tam giác SNA và SMA bằng nhau và có diện tích bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SMN cân tại S, gọi I là trung điểm của MN thì $MN \perp SI$.

Suy ra: $SI^2 = SM^2 - MI^2 = SM^2 - \frac{MN^2}{4} = SM^2 - \frac{BC^2}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow SI = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Khi đó: $S_{SMN} = \frac{1}{2}SI.MN = \frac{3}{2}$. Nên $\frac{1}{3}r\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}$

Câu 8. Gọi điểm B thuộc đường thẳng (d): $x - 3 = 0$ nên B(3; b).

Xét $b > 0 \Rightarrow C(3; -b)$; H là trung điểm BC $\Rightarrow H \in Ox$.

Ta có: $AH = BH\sqrt{3} \Leftrightarrow b\sqrt{3} = 4 \Leftrightarrow b = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Do đó $B(3; \frac{4\sqrt{3}}{3})$. Suy ra $C(4; -\frac{4\sqrt{3}}{3})$.

Vậy hai điểm $B(3;\ \frac{4\sqrt{3}}{3})$ và $C(3;\ -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ hoặc $B(3;\ -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ và $C(3;\ \frac{4\sqrt{3}}{3})$

Câu 9. Điều kiện: $\begin{cases} 4x^2 + 38x - 1 \geq 0 \\ 6x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

Bất phương trình: $\sqrt{4x^2 + 38x - 1} - 2\sqrt{6x-1} \geq x + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 38x - 1} \geq x + 1 + 2\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 38x - 1 \geq x^2 + 2x + 1 + 4(6x - 1) + 4(x + 1)\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 2 \geq 4(x + 1)\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 3(x + 1)^2 + (6x - 1) \geq 4(x + 1)\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{6x-1}{(x+1)^2} - 4.\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6x-1}}{x+1} \geq 3$ hoặc $\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1} \leq 1$

Với $\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1} \geq 3 \Leftrightarrow 6x - 1 \geq 9(x + 1)^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 10 \leq 0$ vô nghiệm

Với $\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 6x - 1 \leq (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 + \sqrt{2} \\ x \leq 2 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm là $x \geq 2 + \sqrt{2}$, $\frac{1}{6} \leq x \leq 2 - \sqrt{2}$.

Câu 10. Ta có: $\frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{\frac{2}{3}x + \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)} \leq \frac{1}{\frac{2}{3}x + 2} = \frac{3}{2}.\frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)$

Tương tự, ta có các bất đẳng thức:

$\frac{y}{y^2+3} \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\right)$; $\frac{z}{z^2+3} \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\right)$

Nên $P \leq \frac{3}{8}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = \frac{3}{8}(1 + \frac{xy + yz + zx}{xyz})$

$\leq \frac{3}{8}(1 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}) \leq \frac{3}{4}$. Vậy $\max P = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 3$.

ĐỀ SỐ 38

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm các điểm cố định của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{2 - mx}$ (1) và các điểm mà các đồ thị (1) không đi qua với mọi m.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho số thực a thay đổi tuỳ ý, các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của số phức a + i chạy trên đường nào?

b) Giải phương trình: $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$.

Câu 4. (1 điểm) Chứng minh: $\dfrac{\pi}{14} \le \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{4+3\cos^2 x} \le \dfrac{\pi}{8}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2+4t \\ z = 1-t \end{cases};\ d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3};\ d_3: \begin{cases} x = -4+5t' \\ y = -7+9t' \\ z = t' \end{cases}.$$

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho a, b là các góc nhọn, $\sin a = \dfrac{3}{5}$; $\sin(a+b) = \dfrac{2}{3}$. Tính sinb.

b) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển:
$P(x) = (1-x) + 2(1-x)^2 + \ldots + n(1-x)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{1}{C_n^2} + \dfrac{7}{C_n^3} = \dfrac{1}{n}$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với BA = a, $BC = a\sqrt{2}$, $BD = a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là trọng tâm G của tam giác ABC và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I (1;1) và phương trình đường thẳng AB là $2x - y + 1 = 0$. Biết đỉnh D thuộc đường thẳng $x - y + 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình thoi.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thoả $x + y + z = 4$ và $xyz = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{2}x^2$.

• Tập xác định: D = **R**: Hàm số chẵn.

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

$y' = -x^3 + 3x = x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \pm\sqrt{3}$ hoặc $x = 0$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ hoặc $0 < x < \sqrt{3}$.

$y' < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < 0$ hoặc $\sqrt{3} < x$.

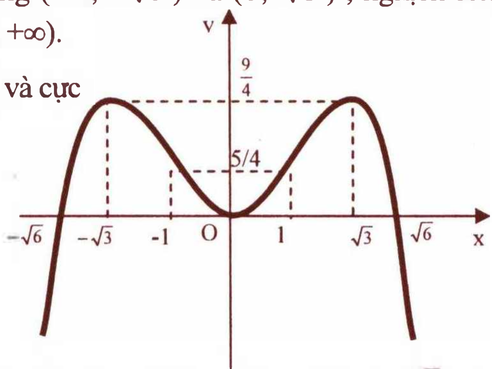
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trong các khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$; nghịch biến trong các khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(\pm\sqrt{3}; \frac{9}{4})$ và cực tiểu tại điểm (0 ;0).

• Đồ thị: $y'' = -3x^2 + 3$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ nên đồ thị có 2 điểm uốn $\left(\pm 1; \frac{5}{4}\right)$.



Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 0), cắt trục hoành tại ba điểm $(\pm\sqrt{6}; 0)$, (0; 0). Trục tung là trục đối xứng.

Câu 2. Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của đồ thị (1):

$$y_o = \frac{4}{2 - mx_o}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = 2 \end{cases}$$

Vậy các đồ thị (1) luôn luôn qua điểm cố định M(0; 2).

Gọi $N(x_o; y_o)$ là điểm mà các đồ thị (1) không đi qua:

$$y_o \neq \frac{4}{2 - mx_o} \ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o \neq 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm mà các đồ thị (1) không đi qua là đường thẳng x = 0 (trục tung) trừ điểm cố định M(0; 2).

Câu 3.

a) Viết $z = x + yi$ $(x,y \in \mathbf{R})$, ta có: $z^2 = a + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$

Do đó, điểm M biểu diễn z phải thuộc đường cong (C): $y = \dfrac{1}{2x}$.

Với mỗi điểm (x,y) của đường cong (C) này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch nên toàn bộ hai nhánh của đường cong (C) đó.

Vậy các điểm biểu diễn căn bậc hai chạy trên đường cong (C): $y = \dfrac{1}{2x}$.

b) Điều kiện: $x > 0$, đặt $\log_3 x = y$ thì $x = 3^y$.

PT: $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x \Leftrightarrow \log_2(1 + \sqrt{3^y}) = y$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{3^y} = 2^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1.$$

Vì vế trái là hàm nghịch biến nên PT có nghiệm duy nhất $y = 2$

Suy ra nghiệm phương trình $x = 9$.

Câu 4. Với mọi $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ta có: $0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2 x \le 3$

$$\Rightarrow 4 \le 4 + 3\cos^2 x \le 7 \Rightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{4 + 3\cos^2 x} \le \frac{1}{4}$$

Do đó $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{7}dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 3\cos^2 x} \le \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}dx \Rightarrow$ đpcm.

Câu 5. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0; 4; -1)$, các phương trình của d_2 và d_3 dưới dạng tham số:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Trên đường thẳng d_2 lấy điểm $M_2(1 + t; -2 + 4t; 2 + 3t)$ và trên đường thẳng d_3 lấy điểm $M_3(-4 + 5t'; -7 + 9t'; t')$.

Ta có $\overline{M_2M_3} = (-5 + 5t' - t; -5 + 9t' - 4t; -2 + t' - 3t)$

Hai vectơ $\overline{M_2M_3}$ và $\vec{u}_1$ cùng phương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -5 + 5t' - t = 0 \\ \dfrac{-5 + 9t' - 4t}{4} = \dfrac{-2 + t' - 3t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Do đó $M_2(1; -2; 2)$ và $\overline{M_2M_3} = (0; 4; -1)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua M_2 và M_3 có phương trình: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Vì $M_2 \notin d_1$ nên Δ đúng là đường thẳng cần tìm.

Cách khác: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và song song với d_1, phương trình mặt phẳng (β) đi qua d_3 và song song với d_1. Hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến Δ là đường thẳng cần tìm, nếu Δ không trùng với d_1.

Câu 6.

a) Ta có: $\sin^2(a+b)+\cos^2(a+b)=1 \Rightarrow \cos(a+b)=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin b=\sin[(b+a)-a]=\sin(b+a)\cos a-\cos(b+a)\sin a$

$=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{8\pm3\sqrt{5}}{15}$ (thoả mãn đầu bài).

b) Điều kiện $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Ta có $\frac{1}{C_n^2}+\frac{7}{C_n^3}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{2}{n(n-1)}+\frac{7.3!}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow n^2-5n-36=0\Leftrightarrow n=9$

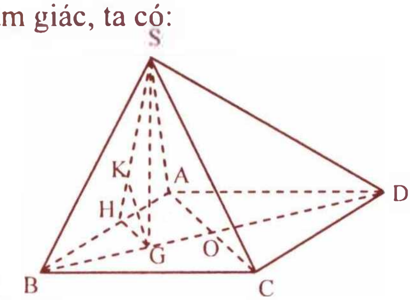
Do đó hệ số của x^8 chỉ có trong khai triển của tổng $8(1-x)^8+9(1-x)^9$

Hệ số của x^8 trong khai triển biểu thức $8(1-x)^8$ là $8C_8^8$.

Hệ số của x^8 trong khai triển của biểu thức $9(1-x)^9$ là $9C_9^8$.

Vậy hệ số của x^8 bằng $8C_8^8+9C_9^8=89$.

Câu 7. Áp dụng định lý đường trung tuyến tam giác, ta có:



$OA^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}=\frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow AC=a\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow AB\perp AC$

Suy ra $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=a^2$

Vẽ GH // OA ($H\in AB$). Hạ $GK\perp SH$

Ta có $AB\perp GH$, $AB\perp SG\Rightarrow AB\perp GK$.

$\Rightarrow GK\perp(SAB)\Rightarrow GK=\frac{a}{\sqrt{10}}$, $GH=\frac{2}{3}OA=\frac{a}{3}$. Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{3}$.

Câu 8. Biểu thức toạ độ của phép đối xứng tâm I là:

$$\begin{cases}x'=2-x\\y'=2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-x'\\y=2-y'\end{cases}$$

Thay vào phương trình AB, suy ra phương trình CD là: $2x-y-3=0$.

Toạ độ D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y+1=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(4;5)\Rightarrow B(-2;-3).$$

Đường thẳng AC, qua I vuông góc DB nên AC: $3x+4y-7=0$.

Suy ra toạ độ A thoả: $\begin{cases}2x-y+1=0\\3x+4y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{11}\\y=\frac{17}{11}\end{cases}$

Vậy $A(\frac{3}{11};\frac{17}{11})\Rightarrow C(\frac{19}{11};\frac{5}{11})$

Câu 9. Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0$

Hệ $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

Biến đổi phương trình ban đầu thành: $(x + y)(1 + 2y - x) = 0$

Do $x + y \geq 1 > 0$ nên $x = 2y + 1$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$(2y + 1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(2y + 1) - 2y \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$$

Vậy hệ có nghiệm (5; 2).

Câu 10. Từ giả thiết ta suy ra $y + z = 4 - x > 0$ và $yz = \frac{2}{x} \Rightarrow$ y, z là nghiệm của phương trình: $t^2 - (4 - x)t + \frac{8}{x} = 0$ (1)

(1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (4 - x)^2 - \frac{2}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[x(x-2) - 4(x-1)] \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 2.$

Tương tự ta có: $3 - \sqrt{5} < y \leq 2$; $3 - \sqrt{5} < z \leq 2$.

Do đó: $(2 - x)(2 - y)(2 - z) \geq 0$ (2)

$(x - 3 + \sqrt{5})(y - 3 + \sqrt{5})(z - 3 + \sqrt{5}) \geq 0$ (3)

Từ đó, ta có:(2) $\Leftrightarrow 8 - 4(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) - xyz \geq 0$

$\Rightarrow xy + yz + zx \geq 5$

Tương tự (3) $\Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$. Vậy $5 \leq P \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$.

GTNN của P là 5 khi: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 2 \\ (2 - x)(2 - y)(2 - z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = z = 1 \\ y = 2, z = x = 1 \\ z = 2, x = y = 1 \end{array}\right.$.

GTLN của P là $\frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$ khi: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 2 \\ (x - 3 + \sqrt{5})(y - 3 + \sqrt{5})(z - 3 + \sqrt{5}) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{5}, y = z = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = 3 - \sqrt{5}, z = x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ z = 3 - \sqrt{5}, x = y = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

ĐỀ SỐ 39

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm m để đường thẳng $y = mx - 4m$ cắt (C) của hàm số: $y = \frac{x-4}{2x-2}$ tại hai điểm A, B ở hai nhánh của (C) và OA vuông góc với OB.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính môđun của số phức z, biết số phức z thỏa mãn:

$$z = (1+i)(3-2i) - \frac{5.\bar{z}}{2+i}.$$

b) Giải phương trình: $2^x = x + 1$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^2 \frac{6x+2}{x^2-x+1}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm ở trên trục Oz, (S) đi qua O và tiếp xúc với (P).

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình $2\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sin^2 x - \tan x$.

b) Một nhóm xạ thủ gồm 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của mỗi xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và cho bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn trúng đích.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Biết khoảng cách từ tâm I của tam giác ABC đến mặt phẳng (A'BC) bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích hình lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. Một đường tròn (C') tiếp xúc với trục Oy và tiếp xúc ngoài với (C). Tìm tâm của (C') biết tâm này thuộc đường thẳng (d): $2x - y = 0$.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3} + x^2 + x \le 2 + \sqrt{3x+1}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a(b+1) + b(c+1) + c(a+1)}{a^4 + b^4 + c^4}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**

• Sự biến thiên

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = x^2 - 4x + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng (1;3) và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$.

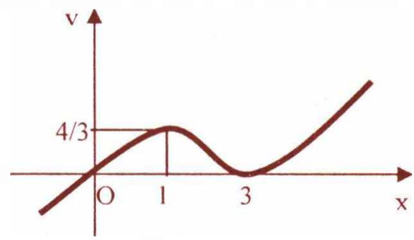
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 3 và $y_{CT} = 0$,

đạt cực đại tại x = 1 và $y_{CĐ} = 4/3$.

• Đồ thị: x = 0 thì y = 0.

$y'' = 2x - 4$, $y'' = 0$ thì x = 2.

Điểm uốn là tâm đối xứng $I(2; \frac{2}{3})$.



Câu 2.

PTHĐGĐ của đồ thị (C) và đường thẳng y = mx – 4m là:

$$\frac{x-4}{2x-2} = mx - 4m \Leftrightarrow x - 4 = (2x-2)(mx-4m),\ x \neq 1$$

Vì x = 1 không là nghiệm phương trình nên PT

$$2mx^2 - (10m + 1)x + 8m + 4 = 0.$$

Theo yêu cầu bài toán, ta có $m \neq 0$

$$\Delta = (6m-1)^2, \text{ do đó } x = 4 \text{ và } x = \frac{2m+1}{2m}.$$

Nếu A(4; 0) thì B là giao điểm của (C) và Oy nên B(0; 2)

Đường thẳng y = mx – 4m qua B $\Leftrightarrow 2 = -4m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 3.

a) Đặt z = a + bi, a, b ∈ **R** ta có:

$$z = (1+i)(3-2i) - \frac{5\bar{z}}{2+i} \Leftrightarrow a + bi = 5 + i - (2-i)(a-bi)$$

$$\Leftrightarrow a + bi = 5 + i + (a+2b)i + (b-2a)$$

$$\Leftrightarrow 5 - 3a + b + (1 + a + b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3a + b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy môđun $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

b) Phương trình: $2^x - x - 1 = 0$.

Xét hàm số: $f(x) = 2^x - x - 1$, D = **R**. Ta có:

$f'(x) = 2^x.\ln 2 - 1$, $f''(x) = 2^x.\ln^2 2 > 0, \forall x$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên **R**, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy f(x) = 0 có tối đa 2 nghiệm mà f(0) = f(1) = 0 nên tập nghiệm là S = {0; 1}.

Câu 4. $I = \int_0^2 \frac{3(2x-1)+5}{x^2-x+1}dx = 3\int_0^2 \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + 5\int_0^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$$3\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = 3\ln\left|x^2-x+1\right|\Big|_0^2 = 3\ln 3$$

Đặt $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)dt$

Khi x = 0 thì $t = -\frac{\pi}{6}$, x = 2 thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$5\int_0^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 5\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sqrt{3}}{3}dt = \frac{10\sqrt{3}}{3}t\Big|_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$ Vậy $I = 3\ln 3 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$

Câu 5. Gọi I là tâm của mặt cầu (S) cần tìm, ta có I(0; 0; t)

$OI = |t|$ nên $OI = [d(I; (P))] \Leftrightarrow |t| = \frac{|t-1|}{3} \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$

Khi $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow I(0; 0; -\frac{1}{2})$, $R = \frac{1}{2} \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Khi $t = \frac{1}{4} \Rightarrow I(0; 0; \frac{1}{4})$, $R = \frac{1}{4} \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$.

Vậy có 2 mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ và $(S): x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin^2 x - \tan x \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2\sin^2 x - \tan x$$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + 2\sin^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \sin x) - \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0\\ \sin 2x - 1 = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

b) Gọi M là biến cố: "Viên đạn trúng đích".

A_1 là biến cố: "Chọn được xạ thủ loại I"

A_2 là biến cố: " Xạ thủ loại I bắn trúng đích"

B_1 là biến cố: "Chọn được xạ thủ loại II"

B_2 là biến cố: " Xạ thủ loại II bắn trúng đích"

Khi đó $M = A_1A_2 \cup B_1B_2$, trong đó A_1 và A_2, B_1 và B_2 độc lập, A_1A_2 và B_1B_2 xung khắc.

Ta có

$P(M) = P(A_1A_2) + P(P_1B_2) = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2)$

$= \dfrac{3}{10}.0,9 + \dfrac{7}{10}.0,8 = 0,83.$

Vậy xác suất viên đạn trúng đích là P(M)= 0,83.

Câu 7. Gọi $H = AI \cap BC \Rightarrow BC \perp AH$

Tam giác A'BC cân tại A' $\Rightarrow A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AHA')$

Hạ $IK \perp A'H \Rightarrow IK \perp (A'BC)$

$\Rightarrow IK = \dfrac{a}{6} \Rightarrow HK = \sqrt{IH^2 - IK^2} = \dfrac{a}{3\sqrt{2}}.$

Ta có: $AA' = \dfrac{IK.AH}{KH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

Vậy thể tích: $V = \dfrac{3\sqrt{2}}{16}a^3.$

Câu 8. Ta có (C) có tâm I(1; –1) và bán kính R = 2

Giả sử (C') có tâm K và bán kính R'.Do $K \in (d)$ nên K(x, 2x). Vì (C') tiếp xúc với Oy nên $R' = |x|$

Do (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên IK = R + R' hay

$\sqrt{(x-1)^2 + (2x+1)^2} = |x| + 2 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x + 2} = |x| + 2$ (1)

Trường hợp $x > 0$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x + 2} = x + 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x + 2 = (x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Trường hợp $x \le 0$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x + 2} = -x + 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x + 2 = (x-2)^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy tâm của (C') là K(1; 2) hoặc $K\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Câu 9. Điều kiện $\begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{3}$.

Bất phương trình: $\sqrt{x+3} + x^2 + x \le 2 + \sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \le \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \le \frac{2(x-1)}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x + 2 - \frac{2}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}\right) \le 0$$

Với $x \ge -\dfrac{1}{3}$ ta có $x + 2 \ge \dfrac{5}{3} > \sqrt{2}$ và $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} > \sqrt{2}$

nên $x + 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} > \sqrt{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 0$

Do đó bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le x \le 1$

Vậy nghiệm cua bất phương trình là $-\dfrac{1}{3} \le x \le 1$.

Câu 10. Đặt $t = a + b + c$.

Ta có $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3$.

Do đó $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$

$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1 + 2(ab + bc + ca)$$

$\Rightarrow ab + bc + ca = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Mà $1 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \le 3(a^4 + b^4 + c^4)$

$$\Rightarrow P \le 3\left(\frac{t^2-1}{2}+t\right)=\frac{3}{2}\left(t^2+2t-1\right)$$

Xét $f(t)=\frac{3}{2}(t^2+2t-1)$ với $-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$, ta có

$f'(t)=3(t+1)=0 \Leftrightarrow t=-1$

$f(-\sqrt{3})=3(1-\sqrt{3})$, $f(-1)=-3$, $f(\sqrt{3})=3(1+\sqrt{3})$.

So sánh thì max $P=3(1+\sqrt{3}) \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ĐỀ SỐ 40

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\frac{2x-3}{x-1}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ trên đoạn $[0;3]$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Trong tất cả các số phức z thỏa mãn: $|z+1|=\left|\frac{z+\bar{z}}{2}+3\right|$, hãy tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy=1 \\ \lg^2 x+\lg^2 y=2 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I=\int_{-2}^{4}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $x-2y+2z-1=0$. Tìm tọa độ các điểm A trên trục hoành và điểm B trên trục tung sao cho AB song song với (α) và khoảng cách giữa AB với (α) bằng 1.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính 3 góc của tam giác ABC biết

$\sqrt{3}\cos A+2\cos B+2\sqrt{3}\cos C=4$.

b) Cho khai triển $(3x+2)^9=a_0+a_1x+\ldots+a_9x^9$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_9$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Biết rằng $AB=2a$, $AD=a$, $DC=a$ $(a>0)$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) với đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SCD) theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, viết phương trình các cạnh của tam giác ABC có trực tâm H(–1; –2), B(2; –3). Biết rằng C thuộc đường thẳng d: x + y + 9 = 0, A thuộc đường thẳng d':5x + y + 5 = 0 và đỉnh A có tung độ dương.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $(1-\sqrt{1-x}).\sqrt[3]{2-x} = x$.

Câu 10. (1 điểm) Cho n là một số nguyên lớn hơn 1 và a, b, c, d là bốn số thực thay đổi.

Chứng minh $\left|a^n + b^n + c^n + d^n\right| \le (\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2})^n$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R** \ {1}.
- Sự biến thiên:

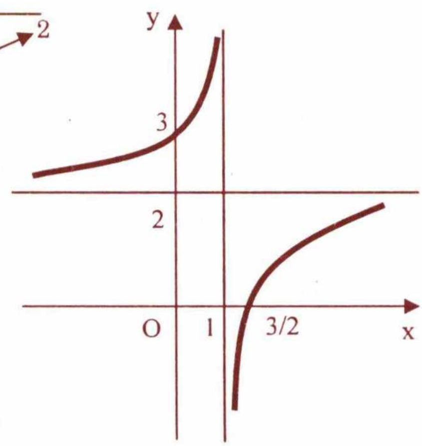
$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

$y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

- Đồ thị: Đồ thị cắt Ox tại $(\frac{3}{2}; 0)$ và Oy tại (0; 3).

Đồ thị đối xứng nhau qua giao điểm 2 tiệm cận: I(1; 2).

Câu 2. Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Vì $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \ge x, \forall x$ nên $f'(x) < 0, \forall x$ do đó hàm số f nghịch biến trên đoạn [0 ;3].

Vậy max f = f(0) = 1 và min f = f(3) = $\sqrt{10} - 3$.

Câu 3.

a) Đặt z = x + yi (x, y ∈ **R**)

Khi đó $|z+1| = \left|\dfrac{z+\bar{z}}{2}+3\right| \Leftrightarrow |(x+1)+yi| = |x+3|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x + 8.$

Ta có $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+4x+8} = \sqrt{(x+2)^2+4} \geq 2$

Dấu = xảy ra khi $x = -2 \Rightarrow y = 0$.

Vậy số phức có môđun nhỏ nhất là $z = -2$.

b) Điều kiện $x > 0$, $y > 0$. Khi đó hệ $\begin{cases} xy = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg^2 x + \lg^2 \dfrac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg^2 x + (-\lg x)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \lg x = 1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \\ y = 10 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 10 \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Các nghiệm này đều thoả mãn điều kiện

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(\dfrac{1}{10}; 10)$, $(10; \dfrac{1}{10})$.

Câu 4. Đặt $t = x + 3$ thì $x - 2 = t - 5$, $dx = dt$

Khi $x = -2$ thì $t = 1$, $x = 4$ thì $t = 7$.

$$I = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 dx = \int_{2}^{7} \left(1 - \frac{10}{t} + \frac{25}{t^2}\right) dt = \left(t - 10\ln t - \frac{25}{t}\right)\Bigg|_1^7 = \frac{192}{7} - 10\ln 7$$

Câu 5. Gọi $A(a; 0; 0) \in Ox$, $B(0; b; 0) \in Oy$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a; b; 0) \perp \overrightarrow{n_\alpha} = (1; -2; 2)$ Hay: $-a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$.

$$AB \,//\, (\alpha) \Rightarrow d(AB, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) = \frac{|a-1|}{\sqrt{9}} = 1$$

$$\Leftrightarrow a - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

Khi $a = 4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow A(4; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$

Khi $a = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow A(-2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$.

Câu 6.

a) Từ giả thiết: $\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{3}\cos(B+C) - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{3}{2}\sin^2 C - \sqrt{3}\sin B\sin C) + (\frac{1}{2}\cos^2 B + \frac{3}{2}\cos^2 C + 2$$

$+ \sqrt{3}\cos B\cos C - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin B - \sqrt{3}\sin C)^2 + \frac{1}{2}(\cos B + \sqrt{3}\cos C - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin B - \sqrt{3}\sin C = 0$ và $\cos B + \sqrt{3}\cos C - 2 = 0$

$\Leftrightarrow A = 90^0$; $B = 60^0$; $C = 30^0$.

Vậy 3 góc: $A = 90^0$; $B = 60^0$; $C = 30^0$.

b) Ta có $(3x + 2)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k (3x)^{9-k}.2^k = \sum_{k=0}^{9} C_9^k 3^{9-k}.2^k x^{9-k}$

$a_k = C_9^k 3^k 2^{9-k}$ là hệ số lớn nhất khi $a_{k+1} \le a_k$ và $a_{k-1} \le a_k$

Giải hệ trên, ta được k = 5 hay k = 6.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_5 = a_6 = C_9^6 3^6 2^3$.

Câu 7. Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow$ ADCM là hình vuông

$\Rightarrow MA = MC = MB = a$.

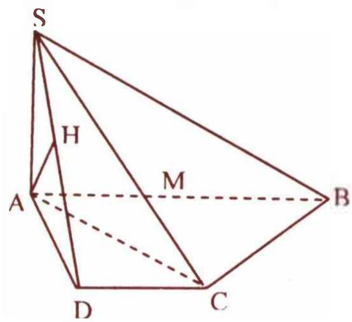
Do đó tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^o$.

$AC = SA = a\sqrt{2}$ và

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}a(a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$



Gọi H là hình chiếu của A lên SD $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Vì AB // (SCD) $\Rightarrow d(A, (SCD)) = d(B, (SCD)) = AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 8. Vì $C \in d \Rightarrow C(c; -c - 9)$ và $A \in d' \Rightarrow A(a; -5a - 5)$, $a < -1$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3(a - c) + (-5a + c + 4) = 0 \Leftrightarrow c = 2a - 1$

Suy ra $C(2a - 1; -2a - 8)$

Và $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) + (6 + 2a)(-5 - 2a) = 0$

$\Leftrightarrow 12a^2 + 30a + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vì A có tung độ dương nên ta chọn a = –2 do đó A(–2; 5)

Suy ra C(–5; –4),

Do đó AC: $3x - y + 11 = 0$, AB: $2x + y - 1 = 0$, BC: $x - 7y - 23 = 0$.

Câu 9. Điều kiện: $x \le 1$.

Phương trình: $(1-\sqrt{1-x}).\sqrt[3]{2-x} = x$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{2-x} = x(1+\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt[3]{2-x} = 1+\sqrt{1-x} \end{array}\right.$$

Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x} = 1+\sqrt{1-x}$.

Đặt $u = \sqrt{1-x}$, $v = \sqrt[3]{2-x}$, $u \ge 0$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u+1 = v \\ v^3 - u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v-1 \\ v^3 - (v-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v-1 \\ v^3 - v^2 + 2v - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v-1 \\ (v-1)(v^2+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = 1$.Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$, $x = 1$.

Câu 10. Nếu: $a = b = c = d = 0$ thì bất đẳng thức đúng

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ ta đặt:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}};\ y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

$$z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}};\ t = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \qquad \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 +$$

$t^2 = 1$

và $|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1, |t| \le 1$.

Vì $n \ge 2$ nên

$$|a^n + b^n + c^n + d^n| \le |a^n| + |b^n| + |c^n| + |d^n|$$

$$= \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)^n \left(|x^n| + |y^n| + |z^n| + |t^n|\right)$$

$$\le \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)^n \left(|x^2| + |y^2| + |z^2| + |t^2|\right) = (\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2})^n.$$

ĐỀ SỐ 41

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2$

Câu 2. (1 điểm)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = mx + 2$ cắt đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$. tại hai điểm phân biệt.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính gọn số phức: $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \dfrac{1}{i}$.

b) Giải phương trình: $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Câu 4. (1 điểm) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox, giới hạn bởi: $y = x^2 - 3x + 3$, $y = x$, $0 \le x \le 3$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho bốn điểm A(1; 2; 2), B(−1; 2; −1), C(1; 6; −1), D(−1; 6; 2) tạo thành hình tứ diện. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD, viết PT mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{3}(\sin 2x - 3\sin x) + 5 = 2\cos^2 x + 3\cos x$.

b) Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A và không bắt đầu bởi 125.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a và K là điểm thuộc đoạn CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) qua A, K và song song với BD chia khối lập phương thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(0; 1), B(4; 5). Đường phân giác trong của góc B song song với trục tung, $\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 8y^4(y^2 + 1) \\ \sqrt{5x + 6} + \sqrt{2y^2 + 7} = 7 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Với mọi số dương x, y, z thỏa mãn:

$x + y + z = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = xyz + \frac{1}{xy + yz + zx}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.

• Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

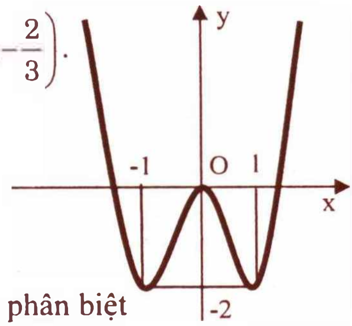
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = -2$, đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$

• Đồ thị hàm số:

$y'' = 24x^2 - 8$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị có hai điểm uốn $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{2}{3}\right)$.



Cho y = 0 thì x = 0, $x = \pm\sqrt{2}$.

Đồ thị đối xứng nhau qua trục tung Oy.

Câu 2.

Đường thẳng y = mx + 2 cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $\frac{3-2x}{x-1} = mx + 2$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $mx^2 - (m-4)x - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 12m + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -6 < 2\sqrt{5} \\ m > -6 + 2\sqrt{5}, m \neq 0 \end{array}\right.$$

Câu 3.

a) Ta có: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{1+1} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

nên: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} = i^{33} = (i^2)^{16}.i = i$.

Và $(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$ nên $(1-i)^{10} = (-2i)^5 = -32i$.

Từ đó tính được $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = 13 - 32i$.

b) Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình: $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

$\Leftrightarrow 2\log_x 2 + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3$

Đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình: $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\frac{1}{3}$.

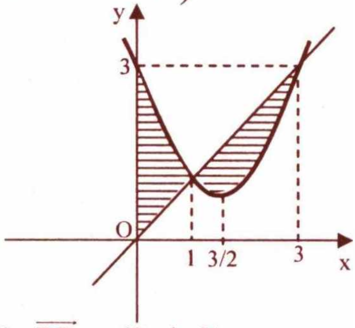
Suy ra 2 nghiệm phương trình: $x = 4, x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 4. Dựa vào đồ thị, thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox, giới hạn bởi các đồ thị: $y = x^2 - 3x + 3$, $y = x, 0 \leq x \leq 3$ là:

$V = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4)$

$$= \pi\int_0^1\left(\left(x^2-3x+3\right)^2-x^2\right)dx + \pi\int_1^3\left(x^2-\left(x^2-3x+3\right)^2\right)dx$$

$$= \frac{7\pi}{2}+\frac{64\pi}{15}=\frac{233\pi}{30} \text{ (đvdt)}$$



Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -3)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 0; 3)$, $\overrightarrow{BD} = (0; 4; 3)$

$\Rightarrow$ AB = $\sqrt{4+0+9}$ = CD, AC = $\sqrt{0+16+9}$ = BD,

AD = $\sqrt{4+16+0}$ = BC .

Tứ diện ABCD có cặp cạnh đối bằng nhau. Gọi trung điểm của AB là E(0; 2; $\frac{1}{2}$), của CD là F(0; 6; $\frac{1}{2}$)

Ta có $\overrightarrow{EF} = (0; 4; 0)$ nên $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB} = -2.0 + 0.4 - 3.0 = 0$, $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Vậy d(AB, CD) = EF = $\sqrt{0+16+0} = 4$

Trung điểm của EF là (0; 4; $\frac{1}{2}$). Ta có IA = IB = IC = ID = $\frac{\sqrt{29}}{2}$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Vậy phương trình $x^2 + (y-4)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{29}{4}$.

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình thành

$$(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x) - 3(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Giải được nghiệm của phương trình:

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = k2\pi;\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

b) Đặt a = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, a_5 chẵn, $a_i \in$ A và đôi 1 khác nhau.

Vì $a_5 \in \{2,4,6,8\}$ nên có 4 cách chọn. Do A không chứa số 0 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có $A_7^4 = 840$ cách.

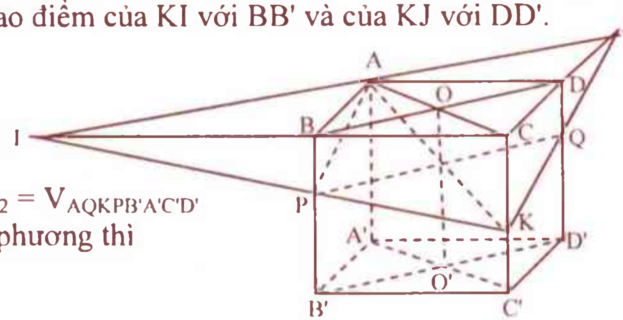
Do đó có $4 \times 840 = 3\,360$ số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A.

Ta loại đi các số bắt đầu bởi 125 là các số $a = \overline{125a_4a_5}$ với a_4, a_5 thuộc $\{2,3,6,7,8\}$ phân biệt và a_5 là số chẵn nên có $3.4 = 12$ cách.

Vậy còn lại $3\,360 - 12 = 3\,348$ số theo yêu cầu.

Câu 7. Qua A vẽ đường thẳng song song với BD cắt CB, CD lần lượt tại I, J.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của KI với BB' và của KJ với DD'.



Gọi $V_1 = V_{AQKPBCD}$, $V_2 = V_{AQKPB'A'C'D'}$ và V thể tích khối lập phương thì

$$\frac{V_{IAPB}}{V_{IJKC}} = \frac{V_{JADQ}}{V_{IJKC}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{4}V_{IJKC} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}a.a^2 = \frac{a^3}{3}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{2}{3}a^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 8. Đường thẳng BC đi qua B(4; 5) có dạng

$$a(x-4) + b(y-5) = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Đường phân giác trong góc B đi qua B(4; 5) và song song với Oy: x = 0 nên có phương trình Δ: x = 4.

Đường thẳng AB có phương trình AB: $x - y + 1 = 0$

Vì Δ là đường phân giác trong góc B nên:

$$\cos(\Delta, AB) = \cos(\Delta, BC) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

Với $a = -b$, chọn $a = 1$, $b = -1$ thì BC: $x - y + 9 = 0$ trùng với AB: loại.

Với $a = b$, chọn $a = b = 1$ thì BC: $x + y - 9 = 0$.

Do đó $C(c; 9-c)$. Ta có

$$\cos\left(\overline{CA}, \overline{CB}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{c(c-4) + (c-4)(c-8)}{\sqrt{c^2+(c-8)^2}.\sqrt{(c-4)^2+(c-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(c-4)^2}{\sqrt{c^2+(c-8)^2}.\sqrt{2}|c-4|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}|c-4|}{\sqrt{c^2+(c-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 64c + 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = 6 \end{array}\right.$$

Do đó $C(2;7); C(6;3)$.

Điểm C(2; 7) bị loại do nằm cùng phía với A đối với đường thẳng Δ. Vậy chọn C(6; 3).

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2+4y^2)=8y^4(y^2+1) \\ \sqrt{5x+6}+\sqrt{2y^2+7}=7 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

Điều kiện: $x \ge -\frac{6}{5}$.

Từ phương trình thứ nhất: $(x-2y^2)(x^2+2y^2x+4y^4+4y^2)=0$

Với $x=2y^2$, thay vào phương trình thứ hai:

$\sqrt{10y^2+6}+\sqrt{2y^2+7}=7$

$\Leftrightarrow (4-\sqrt{10y^2+6})+(3-\sqrt{2y^2+7})=0$

$\Leftrightarrow 2(y^2-1)\left(\frac{5}{4+\sqrt{10y^2+6}}+\frac{1}{3+\sqrt{2y^2+7}}\right)=0$

Do $\frac{5}{4+\sqrt{10y^2+6}}+\frac{1}{3+\sqrt{2y^2+7}}>0$ nên $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1 \Rightarrow x=2$.

Với $x^2+2y^2x+4y^4+4y^2=0$

$\Leftrightarrow (x+y^2)^2+3y^4+4y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ (không thoả hệ).

Vậy hệ có nghiệm: (2; 1); (2; −1).

Câu 10. Ta có: x, y, z dương thỏa $x+y+z=3xyz$.

Nên $3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \ge 3xyz$

$\Rightarrow 9(x+y+z) \le (x+y+z)^3 \Rightarrow x+y+z \ge 3$

Và $xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2 \Rightarrow 3(xy+yz+zx) \le (x+y+z)^2$

Do đó $P = xyz+\frac{1}{xy+yz+zx} \ge \frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{(x+y+z)^2}$

Mà $\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y+z}{3}+\frac{9}{(x+y+z)^2} \ge 3$

$\Rightarrow 3P \ge \frac{x+y+z}{3}+3 \ge 4$

$\Rightarrow P \ge \frac{4}{3}$ và $P=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy GTNN của P là $\frac{4}{3}$, dấu = khi $x=y=z=1$.

ĐỀ SỐ 42

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2$ (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ cấp số cộng.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $w = 2z + 3 - i$, biết rằng số phức z thỏa mãn: $|2z + i|^2 \le 3z.\bar{z} + 1$.

b) Tìm m để phương trình

$$\log_2(x^2 - x + m) + \log_{\frac{1}{2}}(x + m^2 - m) = 0$$ có đúng một nghiệm.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{3 + 4\sin x - \cos 2x}$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ và hai điểm A(5; 4; 3), B(6; 7; 2). Tìm toạ độ điểm C trên (d) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính gọn: $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$.

b) Giải bất phương trình: $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$.

Câu 7. (1 điểm) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện và thể tích của hình tứ diện đều đó.

Câu 8 (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng (d): $x + y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) biết đỉnh A thuộc đường thẳng d.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 - 2\sqrt{xy} \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho 3 số dương a, b, c. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{b}{c+a} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 3.$$

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = x^3 - x^2$

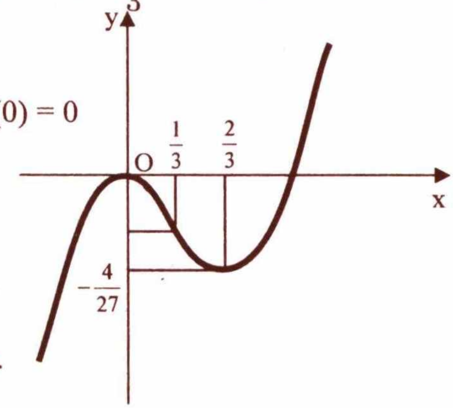
- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$
- Sự biến thiên: $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-4}{27}$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; 0)$, $(\frac{2}{3}; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng: $(0; \frac{2}{3})$.



Hàm số đạt cực đại tại: $x = 0$, $y_{CĐ} = y(0) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại:

$x = \frac{2}{3}$, $y_{CT} = y(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$

• Đồ thị: $y'' = 6x - 2$, $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Điểm uốn $I(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$ là tâm đối xứng.

Câu 2.

a) Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ (2)

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ thì PT: $t^2 - (3m + 5)t + (m + 1)^2 = 0$ (3)

$\Delta = (3m + 5)^2 - 4(m + 1)^2 = (5m + 7)(m + 3)$

Điều kiện (2) có 4 nghiệm phân biệt lập cấp số cộng là (3) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$: $t_2 = 9t_1$

Vì $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$ và $x_4 = 3x_3$

Ta có $t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3m + 5 \pm \sqrt{(5m + 7)(m + 3)}\right)$ nên điều kiện:

$$\frac{1}{2}\left(3m + 5 + \sqrt{(5m + 7)(m + 3)}\right) = \frac{9}{2}\left(3m + 5 - \sqrt{(5m + 7)(m + 3)}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(5m + 7)(m + 3)} = 12m + 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-5}{3} \\ 19m^2 - 70m - 125 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = 5$ hoặc $m = -\frac{25}{19}$ (chọn).

Vậy giá trị cần tìm: $m = 5$ hoặc $m = -\frac{25}{19}$.

Câu 3.

a) Đặt $w = x + yi$, $z = a + bi$ $(x, y, a, b \in \mathbf{R})$

Ta có $w = 2z + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x-3}{2} \\ b = \dfrac{y+1}{2} \end{cases}$$

và $|2z + i|^2 \le 3z.\bar{z} \Leftrightarrow |2a + (2b + 1)i|^2 \le 3(a^2 + b^2) + 1$

$\Leftrightarrow (2a)^2 + (2b + 1)^2 \le 3(a^2 + b^2) + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4b \le 0$

$\Leftrightarrow a^2 + (b + 2)^2 \le 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y+1}{2} + 2\right)^2 \le 4$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 \le 16.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm I(3; –5) và có bán kính R = 4.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x + m > 0 \\ x + m^2 - m > 0 \end{cases}$.

PT: $\log_2(x^2 - x + m) + \log_{\frac{1}{2}}(x + m^2 - m) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow x = m$ hay $x = 2 - m$

PT có nghiệm $x = m \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ne 0$

PT có nghiệm $x = 2 - m \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{R}$.

Do đó $m = 2 - m \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy PT có đúng một nghiệm khi: m = 0, m = 1.

Câu 4. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$,

Khi x = 0 thì t = 0, khi $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì t = 1.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos x dx}{\sin^2 x + 2\sin x + 1} = \int_0^1 \frac{tdt}{(t+1)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \left(\frac{-1}{t+1} - \ln|t+1|\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

Câu 5. Gọi $C(1 + 2t; 2 + 3t; 3 + t) \in d$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (2t - 4; 3t - 2; t)$

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6t - 2; 4 - 3t; 10 - 3t)$

Do đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{54t^2 - 108t + 120} = \dfrac{1}{2}\sqrt{54(t-1)^2 + 66} \ge \dfrac{\sqrt{66}}{2}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi: $t = 1 \Leftrightarrow C(3; 5; 4)$.

Câu 6.

a) Ta có $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3})^2 + (\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3})^2$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha.\frac{1}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2}.\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)^2$

$= \cos^2\alpha + 2(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha) = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện n nguyên dương:

$$\frac{(n+4)!}{n!(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+2)!(n+3)(n+4)}{(n-1)!n(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$$

$\Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6$.

Vậy giá trị cần tìm: n = 3; 4; 5.

Câu 7. Do tứ diện ABCD đều, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD

thì: $AJ = BJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

nên ΔJAB cân tại J $\Rightarrow IJ \perp AB$

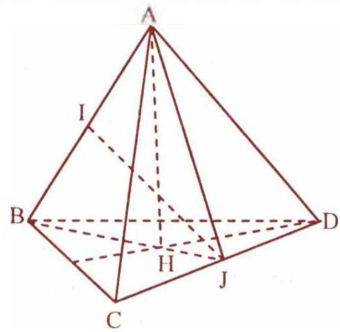
Tương tự ΔICD cân đỉnh I nên:

$IJ \perp CD$

Vậy IJ = d(AB, CD)

Trong tam giác vuông IAJ

$$IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Tương tự $d(BC, AD) = d(BD; AC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

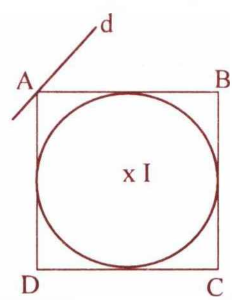
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Câu 8. (C) có tâm I(4; –3) và bán kính R = 2. Hình vuông ngoại tiếp có cạnh AB = 2R = 4 đường chéo

$AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow AI = 2\sqrt{2}$

Gọi $A(a; -a + 1) \in d$

$\Rightarrow AI = \sqrt{2(a-4)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = 2 \end{array}\right.$



– Khi a = 6 thì A(6; –5) ⇒ C(2; –1)

Gọi B(x; y) ⇒ $\overrightarrow{IB} = (x - 4; y + 3)$; $\overrightarrow{IC} = (-2; 2)$.

Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{IC} \\ IB = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-4)+2(y+3)=0 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1; x=6 \\ y=-5; x=2 \end{array}\right.$

Do đó B(6; –1), D(2; –5) hoặc B(2; –5), D(6; –1)

– Khi a = 2 thì A(2; –1) $\Rightarrow$ C(6; –5).

Giải tương tự suy ra B(6; –1), D(2; –5) hoặc B(2; –5), D(6; –1).

Câu 9. Điều kiện: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ v=\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u,v>0 \\ x=u^2 \\ y=v^2 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2-2\sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=8 \\ u+v=2-2uv \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases}$ thì hệ: $\begin{cases} S(S^2-3P)=8 \\ P=1-\dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm PT: $X^2-2X=0 \Leftrightarrow X=0, X=2$

Do đó: $\begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases}$

Vậy nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$.

Câu 10. Ta có a,b,c dương nên:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1 \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}\ge$$

$$\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta có BĐT

$$\frac{a}{b+c}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>3.$$

ĐỀ SỐ 43

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm các điểm trên trục tung sao cho qua điểm đó vẽ được tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2$ và tiếp tuyến này có hệ số góc lớn nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính môđun của số phức $w = z - 2i$ biết số phức z thỏa mãn:

$$(z-2i).(\bar{z}-2i) + 4iz = 0.$$

b) Giải phương trình: $6^{2x+3} = 2^{3x+1}3^{x+5}$.

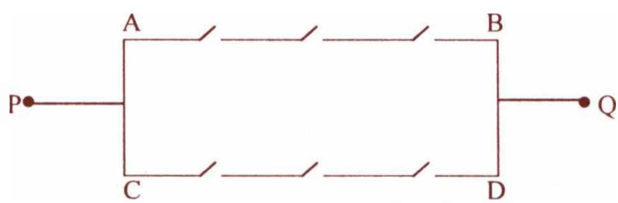
Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;–1;1). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng đi qua A cắt cả hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và d_2: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ các điểm M, N.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin^2 2x = \cos 2x + \cos 3x - \cos x$.

b) Xét sơ đồ mạng điện có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở.



Hỏi có bao nhiêu cách đóng và mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q?

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi M là một điểm di động trên (C) và H là chân đường vuông góc hạ từ điểm M lên AB. Đặt AH = x ($0 < x < 2R$). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại M lấy điểm S sao cho SM = MH. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABM theo x và R.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình các cạnh BC và CD của hình chữ nhật ABCD. Biết rằng AB = 2BC, đường thẳng AB đi qua M(–4; 3), đường thẳng BC đi qua N(0; 9), đường thẳng AD đi qua P(12; –1), đường thẳng CD đi qua Q(18; 6).

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2x^2-3x-4}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho 2 số dương thay đổi x và y thoả mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-x}}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

• Sự biến thiên:

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng: x = 1.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -2$ nên tiệm cận ngang: y = –2.

$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D.$

Bảng biến thiên:

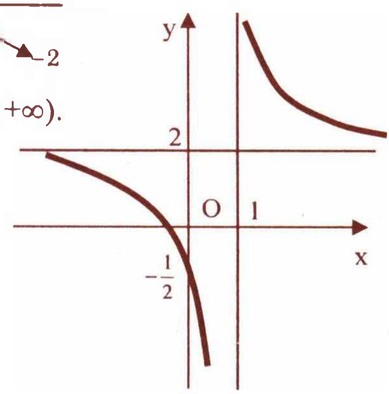
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	–2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	–2

Hàm số nghịch biến trên (–∞; 2) và (2; +∞).

Hàm số không có cực trị.

• Đồ thị hàm số: x = 0 thì y = – 1,y = 0 thì $x = -\frac{1}{2}$.

Tâm đối xứng là giao điểm của 2 tiệm cận I(1;2).



Câu 2.

Tập xác định: D = **R**; $y' = -3x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (C).

Hệ số góc của tiếp tuyến Δ tại M_0: $k = -3x_0^2 + 6x_0 = 3 - 3(x_0 - 1)^2 \le 3$

Δ có hệ số góc lớn nhất là 3 khi và chỉ khi $x_0 = 1$

Phương trình tiếp tuyến của Δ là y = 3x – 1

Toạ độ giao điểm của Δ và Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy điểm M phải tìm có toạ độ M(0;–1).

Câu 3.

a) Đặt z = a + bi (a, b ∈ **R**).

Ta có: $|w| = |z - 2i| = |a + (b-2)i| = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4}$

Theo giả thiết: $(z - 2i).(\overline{z} - 2i) + 4iz = 0$

$\Leftrightarrow (a + (b-2)i).(a - (b+2)i) + 4i(a + bi) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 4 - 4b) + [a(b-2) - a(b+2) + 4a]i = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4b - 4 = 0$ và $a(b-2) - a(b+2) + 4a = 0$.

Do đó $|w| = |z - 2i| = |a + (b-2)i|$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 4b - 4 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy môđun của $w = z - 2i$ bằng $2\sqrt{2}$.

b) Ta có PT: $6^{2x+3} = 2^{3x+1}3^{x+5} \Leftrightarrow 2^{2x+3}\,3^{2x+3} = 2^{3x+1}3^{x+5}$

$$\Leftrightarrow 2^{2-x} = 3^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 2$.

Câu 4. Ta có $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{(x-1)^3} + \dfrac{D}{x+3}$

Đồng nhất thì được $A = \dfrac{5}{32}, B = \dfrac{3}{8}, C = \dfrac{1}{2}, D = -\dfrac{5}{32}$

Từ đó tính được:

$$I = \int_2^3 \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \left(\frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\right)\Bigg|_2^3 = \frac{3}{8} + \frac{5}{32}\ln\frac{5}{3}$$

Câu 5. Ta có: $M \in d_1 \Leftrightarrow M(1 + 2m; m; 1 - m)$,

$N \in d_2 \Leftrightarrow N(n; -1 - 2n; 2 + n)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (2m; m + 1; -m)$ và $\overrightarrow{AN} = (n - 1; -2n; 1 + n)$

Mà $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (m + n + 1 - mn; -m - 3mn; m - n + 1 - 5mn) = (0; 0; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n+1 = mn \\ m + 3mn = 0 \\ m - n + 1 = 5mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -1 (VN) \\ n = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n = -\dfrac{1}{3} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $M\left(0; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình: $\sin^2 2x = \cos 2x + \cos 3x - \cos x$.

$\Leftrightarrow (\sin 2x + \sin x - \cos x)(\sin 2x + \sin x + \cos x) = 0$

– Xét $\sin 2x + \sin x - \cos x = 0$.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), (|t| \le \sqrt{2})$

$t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại) nên

$$x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$$

– Xét $\sin 2x + \sin x + \cos x = 0$.

Đặt $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $(|u| \le \sqrt{2})$

$u^2 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (loại) nên

$x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi$.

b) Mỗi cách đóng và mở 6 công tắc của mạng điện được gọi là một trạng thái của mạng điện. Theo quy tắc nhân, mạng điện có $2^6 = 64$ trạng thái.
Trước hết, ta tìm có bao nhiêu trạng thái không thông mạch tức là không có dòng điện đi qua. Mạch gồm hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$. Trạng thái không thông mạch xảy ra khi và chỉ khi cả hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.
Vì nhánh $A \to B$ có 8 trạng thái trong đó chỉ có duy nhất một trạng thái thông mạch, còn lại có 7 trạng thái không thông mạch. Tương tự ở nhánh $C \to D$ có 7 trạng thái không thông mạch.
Theo quy tắc nhân, ta có $7.7 = 49$ trạng thái mà cả $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.
Vậy mạng điện có $64 - 49 = 15$ trạng thái thông mạch từ P tới Q.

Câu 7. Vẽ đường thẳng d vuông góc với (P) tại O. Vì tam giác MAB vuông tại M nên d là trục của đường tròn (O).
Gọi N là trung điểm của SM.Vẽ NI//OM ($I \in d$).
Khi đó $IS = IA = IB = IM \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABM.

$$MH = MS = \sqrt{x(2R-x)} \Rightarrow NM = \frac{1}{2}\sqrt{x(2R-x)}$$

$$\Rightarrow R' = \sqrt{NM^2 + OM^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 2Rx + 4R^2}.$$

Câu 8. Giả sử BC: $ax + b(y - 9) = 0$, $(a^2 + b^2 \ne 0)$ thì đường vuông góc CD: $b(x - 18) - a(y - 6) = 0$.
Vì $AB = 2BC$ nên $d(P, BC) = 2d(M, CD)$

$$\Leftrightarrow |12a - 10b| = 2|-22b + 3a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = -17b \\ a = 3b \end{array}\right.$$

Với $3a = -17b$, chọn $a = 17$, $b = -3$.
Ta có BC: $17x - 3y + 27 = 0$, CD: $3x + 17y - 156 = 0$
Với $a = 3b$, chọn $a = 3$, $b = 1$.
Ta có BC: $3x + y - 9 = 0$, CD: $x - 3y = 0$.

Câu 9. Điều kiện $x \ge 1$

Phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 - 3x - 4}$

$\Leftrightarrow x + x^2 - 1 + 2\sqrt{x(x^2-1)} = 2x^2 - 3x - 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x^2-1)} = x^2 - 4x - 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2-x)(x+1)} = (x^2-x) - 3(x+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x+1}} - 3 = 0$

Chọn $\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x+1}} = 3 \Leftrightarrow x^2 - x = 9(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 10x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 + \sqrt{34} \\ x = 5 - \sqrt{34} < 1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5 + \sqrt{34}$.

Câu 10. Với x, y > 0, x + y = 1 nên đặt $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 a$ với $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $P = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sin^2 a}{\cos a} + \dfrac{\cos^2 a}{\sin a} = \dfrac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a}$

Đặt $t = \sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $1 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Thì $P = f(t) = \dfrac{-t^3 - 3t}{t^2 - 1}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{(-3t^2-3)(t^2-1) - 2t(-t^3-3t)}{(t^2-1)^2} = -\dfrac{t^4+3}{(t^2-1)^2} < 0$

Nên hàm số f nghịch biến trên $[1; \sqrt{2}]$. Vậy $\min P = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

ĐỀ SỐ 44

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 3$

Câu 2. (1 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + mx$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $x - 2y - 5 = 0$

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $z^4 - z^3 + 6z^2 - 8z - 16 = 0$.

b) Giải phương trình: $(4 - \sqrt{15})^{\tan x} + (4 + \sqrt{15})^{\tan x} = 8$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x\ln(x + \sqrt{x^2+1})dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3). Gọi H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (ABC). Gọi D là điểm đối xứng của H qua gốc tọa độ O. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ABCD.

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\tan\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $T = \frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$.

b) Tính tổng $S = 1.C_n^0 + 2C_n^1 + ... + (n-1)C_n^n$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(5; 2), phương trình đường trung trực cạnh BC là d: $x + y - 6 = 0$; đường trung tuyến CC'là d': $2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)^3 = y^3 + 3xy^2\\(y-1)^3 = x^3 + 3x^2y\end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho tam giác ABC trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi M, ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$\geq MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

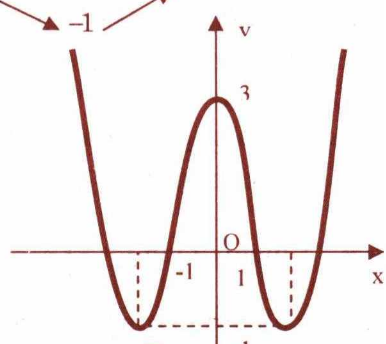
• Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	−1	↗	3	↘	−1	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$.

Hàm số đạt CĐ(0; 3),

đạt CT$(-\sqrt{2}; -1)$, $(\sqrt{2}; -1)$.

• Đồ thị: đối xứng nhau qua Oy

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$, cho $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$.

Câu 2.

Tập xác định D = **R**.

$y' = 3x^2 - 6x + m$

Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là y' = 0 có hai nghiệm phân biệt: $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Ta có: $f(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{3})f'(x) + (\frac{2}{3}m - 2)x + \frac{1}{3}m$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$

$y_1 = f(x_1) = (\frac{2}{3}m - 2)x_1 + \frac{1}{3}m$, $y_2 = f(x_2) = (\frac{2}{3}m - 2)x_2 + \frac{1}{3}m$

Đường thẳng (d): $x - 2y - 5 = 0$ có VTCP $\vec{v} = (2; 1)$

Gọi $I(x_0; y_0)$ là trung điểm của M_1, M_2

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = 1 \\ y_0 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = m - 2 \end{cases} \Rightarrow I(1; m-2)$

Do M_1, M_2 đối xứng nhau qua (d) nên: $\begin{cases} I \in (d) \\ \overrightarrow{M_1M_2}.\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2(m-2) - 5 = 0 \\ 2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$

Từ đó giải được m = 0.

Câu 3.

a) Xét z = –1 thì phương trình: 1 + 1 + 6 + 8 – 16 = 0 nghiệm đúng nên phương trình tương đương:

$(z + 1)(z^3 - 2z^2 + 8z - 16) = 0$

$\Leftrightarrow (z + 1)(z - 2)(z^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ hoặc $z = 2$ hoặc $z^2 = -8$

$\Leftrightarrow z = -1$ hoặc $z = 2$ hoặc $z = \pm 2i\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phức: $z = -1$, $z = 2$, $z = \pm 2i\sqrt{2}$.

b) Vì $(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = 1$.

Đặt $(4 - \sqrt{15})^{\tan x} = t$, t > 0 thì phương trình:

$(4 - \sqrt{15})^{\tan x} + (4 + \sqrt{15})^{\tan x} = 8$ $t + \frac{1}{t} = 8$

$\Leftrightarrow t^2 - 8t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \pm \sqrt{15}$.

Do đó tanx = –1 hoặc tanx = 1 nên nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Đặt $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $dv = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1}.\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} dx = 2\ln(\sqrt{3}+2) - \sqrt{3}.$$

Câu 5. Phương trình mặt phẳng (ABC): $x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow$ VTPT của (ABC) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Vì $\overrightarrow{OH}$, $\vec{n}$ cùng phương nên H(t; t; t). Do H nằm trên (ABC) nên t = 1 $\Rightarrow$ H(1; 1; 1) $\Rightarrow$ D(−1; −1; −1).

Vì OH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nằm trên OH $\Rightarrow$ I(a; a; a).

Ta có $ID = IC \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 6.

a) Chia tử và mẫu cho $\cos^2\alpha$ và có $\tan\alpha = \frac{3}{5}$ thì:

$$T = \frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha} = \frac{3\tan^2\alpha + 12\tan\alpha + 1}{\tan^2\alpha + \tan\alpha - 2} = \frac{232}{-26} = -\frac{116}{13}$$

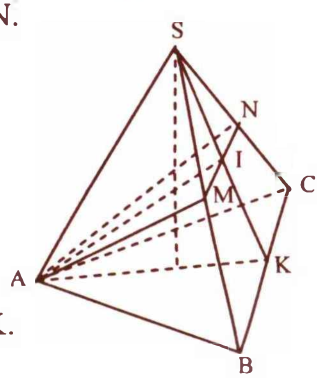
b) Ta có: $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$

Nhân 2 vế cho x thì có: $x.(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{k+1}$

Lấy đạo hàm 2 vế: $(1 + x)^n + nx(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.(k+1)x^k$

Chọn x = 1 thì được kết quả $S = 1.C_n^0 + 2C_n^1 + ... +(n-1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

Câu 7. Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.



Từ giả thiết suy ra

$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, MN // BC,

suy ra I là trung điểm của SK và MN.

Ta có ΔSAB = ΔSAC nên hai trung tuyến tương ứng AM = AN, do đó ΔAMN cân tại A, suy ra AI ⊥ MN.

Mà (SBC) ⊥ (AMN) ⇒ AI ⊥ (SBC) ⇒ AI ⊥ SK.

Do đó ΔSAK cân tại A, suy ra $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ nên:

$$AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Vậy: $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Câu 8. Vì $C, C' \in d' \Rightarrow C(c; 2c + 3), C'(c'; 2c' + 3)$

Vì B đối xứng với A qua C nên $B(2c' - 5; 4c' + 4)$

Do đó $\overrightarrow{BC} = (c - 2c' + 5; 2c - 4c' - 1)$

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}(1; -1)$

Gọi trung điểm của BC là $M\left(\frac{c + 2c' - 5}{2}; \frac{2c + 4c' + 7}{2}\right)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} M \in d \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c + 2c' - 5}{2} + \frac{2c + 4c' + 7}{2} - 6 = 0 \\ (c - 2c' + 5) - (2c - 4c' - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{14}{3} \\ c' = \frac{-2}{3} \end{cases}$

Suy ra $C\left(\frac{14}{3}; \frac{37}{3}\right)$, $B\left(-\frac{19}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} (x + 1)^3 = y^3 + 3xy^2 & (1) \\ (y - 1)^3 = x^3 + 3x^2y & (2) \end{cases}$.

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$(x + 1)^3 + (y - 1)^3 = [(x + 1) + (y - 1)]^3$

$\Rightarrow 3(x + 1)(y - 1)(x + y) = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $y = 1$ hoặc $x = -y$.

Nếu $x = -1$ thì $y^3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 3$

Nếu $y = 1$ thì $x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$

Nếu $x = -y$ thì $(x + 1)^3 = 2x^3 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$.

Thử lại vào hệ, 5 nghiệm đều thỏa.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$(-1; 0), (0;1); (-1; 3), (-3; 1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}; \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}\right)$.

Câu 10. Ta có: $MA.GA + MB.GA + MC.GC$

$\geq \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})\overrightarrow{GC}$

$= \overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$

Theo bất đẳng thức Côsi

$2MA.GA \leq MA^2 + GA^2$

$2MB.GB \leq MB^2 + GB^2$

$2MC.GC \leq MC^2 + GC^2$

$\Rightarrow 2(MA.GA + MB.GB + MC.GC) \leq MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

nên $MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MA.GA + MB.GB + MC.GC)$

$\geq (MA.GA + MB.GB + MC.GC) - (GA^2 + GB^2 + GC^2) \geq 0$

Suy ra: $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC.$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC$

$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2$

ĐỀ SỐ 45

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm a để tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số:

$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ tại x = a cắt (C) tại 2 điểm khác nữa.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$ và có số phức $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ \log_2(x - y) + \log_4(x + y) = 2 \end{cases}$

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

Câu 5. (1 điểm) Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng (P):

$x - 3y + z - 11 = 0$.Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, cắt d và song song với mp(P).

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $4\sin^2\dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{2\cos 2x}{1-\cot x} = \sqrt{2}(1+\sin x)$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, chia hết cho 5 và đồng thời thỏa mãn 3 điều kiện sau:
– Tổng của các chữ số của nó là một số lẻ
– Tổng của 6 chữ số đầu của nó (không kể chữ số hàng đơn vị) là một số lẻ.
– Tổng của 5 chữ số đầu (không kể 2 chữ số hàng đơn vị và hàng chục) là một số lẻ.

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C' và I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M ở trên elip (E): $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ và tích các khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm của (E) bằng $\dfrac{65}{9}$.
Hãy tìm toạ độ điểm M, biết điểm M ở góc phần tư thứ hai của mặt phẳng Oxy.

Câu 9. (1 điểm) Tìm số thực m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)\left(m^2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3\sqrt[4]{x(x-2)}\right)=2.$$

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y là 2 số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \dfrac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^3 - 3x^2$.

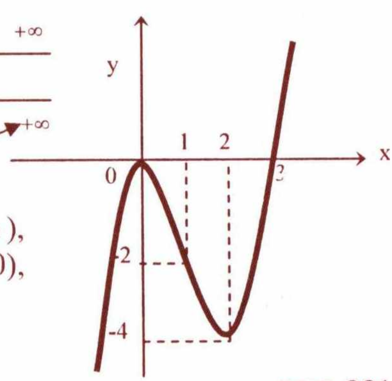
• Tập xác định: **R**

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	–4	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$, $(2, +\infty)$, nghịch biến trên (0,2) và có điểm CĐ(0; 0), CT(2; –4)

• Đồ thị: $y'' = 6x - 6,\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Điểm uốn là tâm đối xứng $I(1; -2)$.

Câu 2. Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$y' = 2x^3 - 6x$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = a$

$$y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} = 2a(a^2 - 3)x - \frac{3}{2}a^4 + 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Phương trình hoành độ giao điểm với đồ thị:

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = 2a(a^2 - 3)x - \frac{3}{2}a^4 + 3a^2 + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x^4 - 6x^2 - 4a(a^2 - 3)x + 3a^4 - 6a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6) = 0.$$

Điều kiện cần tìm: $\begin{cases} \Delta' = a^2 - 3a^2 + 6 > 0 \\ g(a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbf{R}$

Khi đó: $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1 + (2y - 1)i| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow 1 + (2y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

mà: $(2 - z)(i + \bar{z}) = ((2 - x) - yi)(x + (1 - y)i)$

$= (x(2 - x) + y(1 - y)) + ((2 - x)(1 - y) - xy)i$

nên $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo khi và chỉ khi phần thực: $x(2 - x) + y(1 - y) = 0$

Với $y = \dfrac{3}{2}$, ta có $x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $y = -\dfrac{1}{2}$, ta có $x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i,\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i,\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i,\ z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

b) Hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ \log_2(x - y) + \log_4(x + y) = 2 \end{cases}$

Điều kiện: $x - y > 0$ và $x + y > 0$.

Ta có $x^2 - y^2 = 8$ nên $\log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 3$

Nên $\log_2(x-y) + \log_4(x+y) = 2$

$\Leftrightarrow 3 - \log_2(x+y) + \frac{1}{2}\log_2(x+y) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+y) = 2 \Leftrightarrow x+y = 4$

Ta có $x^2 - y^2 = 8$ nên $\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 8 \Leftrightarrow x - y = 2$

Do đó $x = 3$ và $y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = 3$, $y = 1$.

Câu 4. Đặt $t = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{t} - 1 \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{t^2}$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = -\int_1^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Đặt $u = t + \sqrt{t^2+1} \Rightarrow \dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{du}{u}$

Do đó $I = -\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{5})/2} \frac{du}{u} = -(\ln u)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{5})/2} = \ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$.

Câu 5. Gọi (P') là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O và song song với mp(P) thì (P') có phương trình: $x - 3y + z = 0$.

Giao điểm I của đường thẳng d và mp(P') có toạ độ $I\left(\dfrac{37}{3}; 8; \dfrac{35}{3}\right)$, với $t = \dfrac{35}{3}$.

Đường thẳng đi qua O và I là đường thẳng cần tìm qua O và có VTCP: $3\overrightarrow{OI} = (37; 24; 35)$ là $\dfrac{x}{37} = \dfrac{y}{24} = \dfrac{z}{35}$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $\sin x \neq 0$; $\cot x \neq 1$.

Ta có: $\dfrac{2\cos 2x}{1 - \cot x} = -\sin 2x - 2\sin^2 x$

Và $4\sin^2\dfrac{x}{2}.\sin x = 2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x - \sin 2x$

Do đó: PT $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$,

Với $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

Kết hợp nghiệm, vậy nghiệm PT là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) Gọi chữ số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, theo đề thì: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ là một số lẻ

– Số cách chọn 4 chữ số đầu a_1, a_2, a_3, a_4 là: 9.10.10.10

Chọn a_5, ta xét tổng $M = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ có hai trường hợp

Trường hợp M là số chẵn thì số a_5, phải là số lẻ $\Rightarrow$ có 5 cách chọn a_5.

Trường hợp M là số lẻ thì số a_5, phải là số chẵn $\Rightarrow$ có 5 cách chọn a_5.

Do đó cả hai trường hợp đều cho có 5 cách chọn số a_5

Chọn a_6 chỉ có thể là số chẵn nên có 5 cách chọn

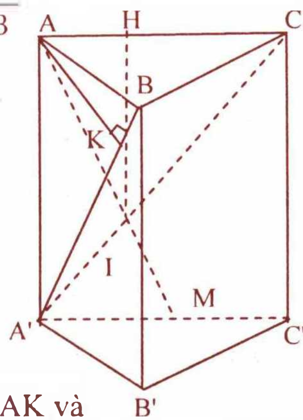
Chọn a_7 chỉ có thể là chữ số 0 nên có 1 cách chọn

Vậy số các chữ số cần tìm là: 9.10.10.10.5.5.1 = 225000 (số)

Câu 7. Hạ $IH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow IH \perp (ABC)$

IH là đường cao của tứ diện IABC

$\Rightarrow IH \,//\, AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$



Ta có: $AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}$

và $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

Từ đó, ta có: $V = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}$

Hạ $AK \perp A'B$ ($K \in A'B$).

Vì $BC \perp (ABA'B')$ nên $AK \perp BC$.

Do đó, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK và

$AK = \frac{2S_{A'AB}}{A'B} = \frac{A'A.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 8. Ta có (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4$.

Do đó: $MF_1.MF_2 = \frac{65}{9}$

$\Leftrightarrow \; (a + \frac{c}{a}x_M)(a - \frac{c}{a}x_M) = \frac{65}{9} \;\Leftrightarrow 9 - \frac{4}{9}x_M^2 = \frac{65}{9}$

$\Leftrightarrow \; x_M^2 = 4 \Leftrightarrow x_M = -2$ (thích hợp) hoặc $x_M = 2$ (loại)

Suy ra $20 + 9y^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow y = \pm\frac{5}{3}$. Chọn điểm $M(-2; \frac{5}{3})$.

Câu 9. Điều kiện: $x > 2$

$$PT \Leftrightarrow 2\left(m^2.\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}\right)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m^2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}=(1-m^2)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}=1-m^2.$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}$, $0<t<1$.

Phương trình trở thành: $\frac{1}{t^2}-3t=1-m^2$, $0<t<1$.

Xét hàm $f(t)=\frac{1}{t^2}-3t$, $t\in(0;1)$.

$f'(t)=-\frac{2}{t^3}-3<0$, $\forall t\in(0;1)$.

Bảng biến thiên

t	0		1
f'(t)		−	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	-2

Vậy phương trình cho có nghiệm khi $1-m^2>-2 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$.

Câu 10. Đặt $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$ với $\alpha,\beta\in[0;\frac{\pi}{2})$.

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}=\frac{(\tan\alpha-\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}{(1+\tan\alpha)^2(1+\tan\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\left(1+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta).\cos(\alpha+\beta)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2(\sin\beta+\cos\beta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{(1+\sin 2\alpha)(1+\sin 2\beta)}=\frac{1}{2}.\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{(1+\sin 2\alpha)(1+\sin 2\beta)}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1+\sin 2\alpha-(1+\sin 2\beta)}{(1+\sin 2\alpha)(1+\sin 2\beta)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin 2\beta}-\frac{1}{1+\sin 2\alpha}\right)$$

Vì $\alpha,\beta\in[0;\frac{\pi}{2})$ nên $\sin 2\alpha, \sin 2\beta\in[0;1]$

do đó $-\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$.

Khi $\alpha = 0$ và $\beta = \frac{\pi}{4}$ thì $P = -\frac{1}{4}$ nên minx $P = -\frac{1}{4}$.

Khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ và $\beta = 0$ thì $P = \frac{1}{4}$ nên max $P = \frac{1}{4}$.

Vậy min $P = -\frac{1}{4}$, max $P = \frac{1}{4}$.

ĐỀ SỐ 46

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 2. (1 điểm)

Chứng minh đồ thị (C) của hàm số: $y = x^3 - 4x^2$ tiếp xúc với đường cong (P): $y = x^2 - 8x + 4$. Chỉ ra tiếp điểm.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thoả mãn: $|z| = 5$ và phần thực của z bằng hai lần phần ảo của nó.

b) Giải bất phương trình: $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1} > 0$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^{1/\sqrt[4]{3}} \frac{x\,dx}{x^8 - 1}$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 16, đường cao AH: $x + y - 4 = 0$, phân giác trong CD: $x + 3y + 2 = 0$, cạnh AC đi qua $M(0; -14)$. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C.

Câu 5. (1 điểm) Trong hệ toạ độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $\vec{v} = (-1; 3; 1)$. Tìm vectơ đơn vị đồng phẳng với hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và tạo với vectơ $\vec{u}$ một góc 45°.

Câu 6. (1 điểm)

a) *Tính gọn* $T = \sin^2 y.\tan^2 y + 4\sin^2 y - \tan^2 y + 3\cos^2 y$.

b) Chứng minh $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Câu 9. (1 điểm) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $\begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + x + y - 2m(x - y + 1) = 0 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số không âm, thì

$$2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R** \ {2}
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.

$$y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0,\ \forall x \neq 2$$

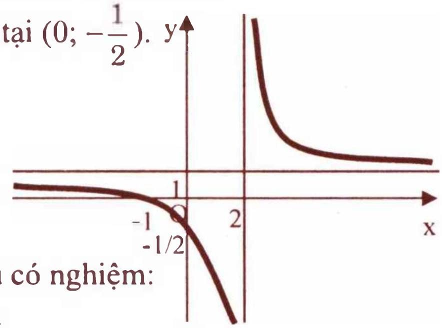
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		−	||	+	
y	1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 1

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

- Đồ thị: đồ thị cắt Ox tại $(-1; 0)$ và Oy tại $(0; -\frac{1}{2})$.

Tâm đối xứng là giao điểm của 2 tiệm cận I(2;1).



Câu 2.

Hai đồ thị (C) và (P) tiếp xúc khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 = x^2 - 8x + 4 \\ 3x^2 - 8x = 2x - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ 3x^2 - 10x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ hay } x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \text{ hay } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy 2 đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm A(2; −8).

Câu 3.

a) Giả sử z = a + bi, với a, b ∈ **R**

Ta có: $\begin{cases} |z| = 5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ a = 2b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức cần tìm: $z = -2\sqrt{5} - i\sqrt{5}$, $z = 2\sqrt{5} + i\sqrt{5}$

b) Điều kiện: $x > -3, x \neq -1$.

Xét hai trường hợp:

Nếu $-3 < x < -1$ thì BPT: $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow 2\log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x+3) < 0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3) - 2\log_2(x+3) < 0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3) - 2\log_2 3\log_3(x+3) < 0 \Leftrightarrow \log_3(x+3).\ [3 - \log_2 9] < 0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 1$. Do đó $-2 < x < -1$.

Nếu $x > -1$ thì BPT $\Leftrightarrow \log_3(x+3) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ (loại).

Vậy tập nghiệm $S = (-2; -1)$.

Câu 4. Đặt $t = x^2$ thì $xdx = \dfrac{1}{2}dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ thì $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$I = \int_0^{1/\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{x^8 - 1} = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^2 - 1} - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt$$

$$= \left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4}\arctan t\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{24}.$$

Câu 5. Gọi vectơ phải tìm là $\vec{w} = (x; y; z)$

Theo đề, $|\vec{w}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{x + y + 2z}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x + y + 2z = \sqrt{3}.$$

Mặt khác ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng, nên

$$\vec{w} = k\vec{u} + m\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = k - m \\ y = k + 3m \\ z = 2k + m \end{cases} \Rightarrow 5x + 3y - 4z = 0$$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+2z=\sqrt{3} \\ 5x+3y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5z-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-7z \end{cases}$

Do đó $150z^2-100\sqrt{3}z+49=0 \Rightarrow z=\dfrac{(10\pm\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}$

$$z=\frac{(10+\sqrt{2})\sqrt{3}}{30} \Rightarrow x=\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{6}, y=\frac{(5-7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}$$

$$z=\frac{(10-\sqrt{2})\sqrt{3}}{30} \Rightarrow x=\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{3}}{6}, y=\frac{(5+7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}$$

Vậy có hai vectơ thỏa đề bài:

$$\overrightarrow{w_1}=\left(\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{6};\frac{(5-7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30};\frac{(10+\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}\right)$$

$$\overrightarrow{w_2}=\left(\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{3}}{6};\frac{(5+7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30};\frac{(10-\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}\right).$$

Câu 6.

a) $T=\sin^2y.\tan^2y+4\sin^2y-\tan^2y+3\cos^2y$

$=-\tan^2y(1-\sin^2y)+4\sin^2y+3\cos^2y$

$=-\tan^2y.\cos^2y+4\sin^2y+3\cos^2y$

$=-\sin^2y+4\sin^2y+3\cos^2y$

$=3(\sin^2y+\cos^2y)=3.$

b) Ta có $(1+x)^n.(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

nên $\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i.x^i.\sum\limits_{j=0}^{n}C_n^j.x^j=\sum\limits_{k=0}^{2n}C_{2n}^k.x^k$

Để ý: $x^n=x^0.x^n=x^1.x^{n-1}=...=x^n.x^0$ và $C_n^r=C_n^{n-r}$

Do đó hệ số của x^n của vế phải là C_{2n}^n và của vế trái là:

$$C_n^0.C_n^n+C_n^1.C_n^{n-1}+...+C_n^n.C_n^0$$

$$=C_n^0.C_n^0+C_n^1.C_n^1+...+C_n^n.C_n^n=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$$

So sánh đồng nhất, ta có: $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

Câu 7. Hạ $IH \perp AC$ $(H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$ nên IH là đường cao của tứ diện IABC.

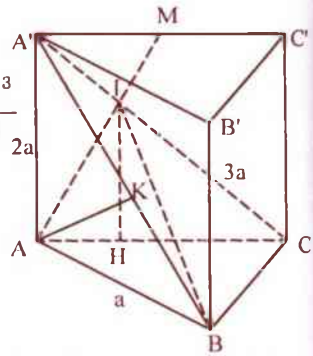
$$\Rightarrow IH // AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'}=\frac{CI}{CA'}=\frac{2}{3} \Rightarrow IH=\frac{2}{3}AA'=\frac{4a}{3}$$

$$AC=\sqrt{A'C^2-A'A^2}=a\sqrt{5},$$

$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a$$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

Thể tích khối đa diện IABC: $V = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}$



Hạ AK ⊥ A'B (K ∈ A'B). Vì BC ⊥ (ABB'A')
nên AK ⊥BC ⇒ AK ⊥ (IBC).
Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

$$AK = \frac{2S_{AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{4a}{5}.$$

Câu 8. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong CD thì đó $M' \in BC$ nên MM': $3x - y - 14 = 0$

Gọi I là giao điểm của CD và MM' thì $I(4; -2)$ và $M'(8; 10)$

Đường thẳng BC đi qua M' và vuông góc với AH nên BC: $x - y + 2 = 0$.

Từ đó suy ra $C(-2; 0)$

Đường thẳng AC đi qua M và C nên AC: $7x + y + 14 = 0$

Do đó suy ra $A(-3; 7)$

Vì $B \in BC \Rightarrow B(b; b + 2)$

Ta có: $S_{ABC} = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AC.d(B, AC) = 16 \Leftrightarrow d(B, AC) = \frac{32}{AC} = \frac{32}{\sqrt{50}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|8b+16|}{\sqrt{50}} = \frac{32}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow |8b+16| = 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = -6 \end{array}\right.$$

Với $b = 2 \Rightarrow B(2; 4)$. Vì A và B nằm một phía đối với đường phân giác trong CD nên không thỏa mãn.

Với $b = -6 \Rightarrow B(-6; -4)$. Ta có A và B nằm hai phía đối với đường phân giác trong CD nên trường hợp này thỏa mãn.

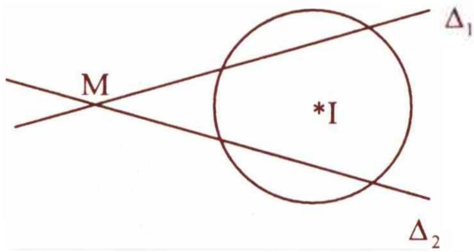
Vậy $A(-3; 7)$, $B(-6; 4)$, $C(-2; 0)$.

Câu 9. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 1 = 0 \\ (x-m)^2 - (y-m)^2 + (x + y - 2m) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 1 = 0 \\ (x - y + 1)(x + y - 2m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 1 = 0 & (1) \\ x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 1 = 0 & (1) \\ x + y - 2m = 0 & (3) \end{cases}$$

Ta có (1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{m}{2}; 0\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{m^2+4}}{2}$. (2), (3) lần lượt là phương trình các đường thẳng (Δ_2), (Δ_3)



Hệ đầu có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đường thẳng (Δ_2), (Δ_3) cắt đường tròn (C_1) tại 4 giao điểm đôi một phân biệt.

$$(\Delta_3) \text{ cắt } (C) \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{m}{2}-2m\right|}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{m^2+4}}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{8}{7}} < m < \sqrt{\frac{8}{7}}$$

$$(\Delta_2) \text{ cắt } (C) \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{m}{2}+1\right|}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{m^2+4}}{2} \Leftrightarrow m^2-4m+4>0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

Ta có 4 giao điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ giao điểm của (Δ_2) và (Δ_3) không thuộc $(C) \Leftrightarrow M\left(\frac{2m-1}{2};\frac{2m+1}{2}\right) \notin (C)$

$\Leftrightarrow m \neq -1; m \neq \frac{1}{2}$

Vậy $-\sqrt{\frac{8}{7}} < m < \sqrt{\frac{8}{7}}$ và $m \neq -1; m \neq \frac{1}{2}$.

Câu 10. Ta có đồng nhất thức

$$2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) = 1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2,$$

nên có bất đẳng thức $2(1-a+a^2)(1-b+b^2) \geq 1+a^2b^2$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$3\left(1+a^2b^2\right)\left(1-c+c^2\right) \geq 2\left(1+abc+a^2b^2c^2\right).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(3+a^2b^2\right)c^2 - \left(3+2ab+3a^2b^2\right)c+1+3a^2b^2 \geq 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai theo biến c

Ta có hệ số $3+a^2b^2>0$ và $\Delta = -3(1-ab)^4 \leq 0$ nên được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

ĐỀ SỐ 47

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Câu 2. (1 điểm)

Lập phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = 6x$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $|z - 3i| = |z + i|$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x - 3^y = (\ln y - \ln x)(2x + 3y + 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian hệ trục Oxyz, cho bốn điểm A(3; 2; 0), B(−1; 3; 2), C(1; 0; 1), D(0; −1; 3). Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thoả mãn điều kiện: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $8\cos 4x\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$.

b) Trong kì thi thứ đại học, bạn Minh Tân dự thi hai môn thi trắc nghiệm Vật lí và Tiếng Anh, đề thi của mỗi môn gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án lựa chọn, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi Minh Tân đều trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu; 5 câu còn lại chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng điểm 2 môn thi của Minh Tân không dưới 19 điểm.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình nón đỉnh S nội tiếp trong mặt cầu tâm O bán kính R và đáy là đường tròn giao tuyến của mặt cầu đó với một mặt phẳng vuông góc với đường tròn OS tại H sao cho SH = x ($0 < x < 2R$). Tính theo R và x thể tích V và diện tích xung quanh S của hình nón đó; từ đó suy ra hệ thức $S^2 = 6\pi RV$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có A(−4; −1), đường thẳng BC đi qua điểm M(−1; 1), độ dài cạnh BC bằng 4. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng I(−3; 1) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x - 4| = 7 - x$.

Câu 10. (1 điểm) Cho 3 số x, y, z khác 0 và có $x + y + y = 5$.

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{25+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn
- Sự biến thiên:

$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	−1	$\nearrow$	3	$\searrow$	−1	$\nearrow$	$+\infty$

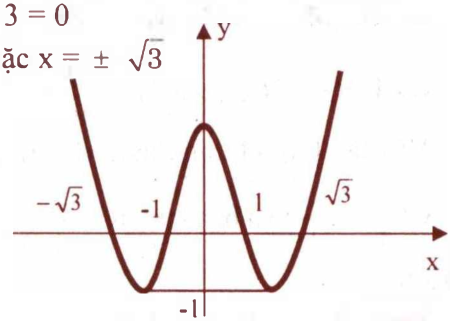
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; đồng biến trên $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -1$, đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 3$

- Đồ thị hàm số: $y = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$

Trục tung là trục đối xứng.



Câu 2. Tập xác định D = **R**.

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

Ta có hệ số góc: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x_o = \pm 2\sqrt{3}$.

Khi $x_o = -2\sqrt{3}$ thì tiếp tuyến $y = 6x + 12\sqrt{3}$ (chọn).

Khi $x_o = 2\sqrt{3}$ thì tiếp tuyến $y = 6x - 12\sqrt{3}$ (chọn).

Vậy có 2 tiếp tuyến song song: $y = 6x + 12\sqrt{3}$ và $y = 6x - 12\sqrt{3}$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in$ **R**.

Ta có $|z - 3i| = |z + i|$

$\Leftrightarrow |x + (y-3)i| = |x + (y+1)i| \Leftrightarrow (y-3)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow y = 1$

nên $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |(x-1)+i| = |x|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = x^2 \quad \Leftrightarrow x = 1.$ Vậy số phức $z = 1 + i$.

b) Hệ: $\begin{cases} 3^x - 3^y = (\ln y - \ln x)(2x + 3y + 1) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

ĐK: x, y > 0 nên 2x +3y + 1 > 0. Vì cơ số 3 > 1, e > 1 nên với (1):

Nếu x > y thì VT > 0 > VP,

Nếu x < y thì VT < 0 < VP,

Nếu x = y thì thoả mãn.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = 1$, chọn $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

$= \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}} d(\tan x) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\tan^2 x}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Câu 5. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, I là trung điểm AB thì:

$G(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}), I(1; \frac{5}{2}; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CI}$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow 4MG = 2CI \Leftrightarrow MG = \dfrac{CI}{2} = \dfrac{5}{4}$: không đổi.

Vậy tập hợp những điểm M cần tìm là mặt cầu tâm

$G(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2})$ và bán kính $R = \frac{5}{4}$ có phương trình $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{16}$

Câu 6.

a) Ta có PT $\Leftrightarrow 4\cos4x(1 + \cos4x) + \sqrt{1-\cos3x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^2 4x + 4\cos4x + 1) + \sqrt{1-\cos3x} = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos4x + 1)^2 + \sqrt{1-\cos3x} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos4x + 1 = 0 \\ 1 - \cos3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos4x = -\frac{1}{2} \\ \cos3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = l2\pi \end{cases}$ $(k, l \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = l\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ $(k, l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$.

b) Bạn Minh Tân được không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Vật lí và tiếng Anh, bạn Minh Tân trả lời đúng ít nhất 5 câu.

Xác suất trả lời một câu hỏi đúng là $\frac{1}{4}$, trả lời sai là $\frac{3}{4}$.

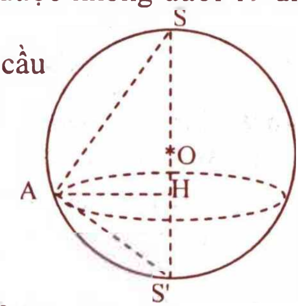
Trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên, xác suất:

– đúng 5 câu là $C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}.\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$; đúng 6 câu là $C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}.\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$;

– đúng 7 câu là $C_{10}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}.\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$; đúng 8 câu là $C_{10}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}.\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$;

– đúng 9 câu là $C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}.\frac{3}{4}$; đúng cả 10 câu là $C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

Cộng các xác suất trên thì xác suất Minh Tân được không dưới 19 điểm là 0,0781.



Câu 7. Gọi S' là điểm đối xứng của S qua tâm mặt cầu và A là điểm trên đường tròn đáy của hình nón.

Xét tam giác ASS' vuông ở A, ta có:

$SA^2 = SS'.SH = 2Rx \Rightarrow SA = \sqrt{2Rx}$

$HA^2 = HS.HS' = HS(SS' - HS) = x(2R - x)$

$\Rightarrow HA = \sqrt{x(2R - x)}$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.HA^2.\,SH = \frac{1}{3}\pi x(2R - x)x = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x)$

$S = \pi.HA.SA = \pi\sqrt{x(2R - x)}.\sqrt{2Rx} = \pi x\sqrt{2R(2R - x)}$

Tìm hệ thức liên hệ: $V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x)$ (1)

$S^2 = 2\pi^2Rx^2(2R - x)$ (2)

Chia các đẳng thức (1), (2) vế theo vế ta có: $\frac{V}{S^2} = \frac{1}{6\pi R}$

Vậy ta được hệ thức $S^2 = 6\pi RV$.

Câu 8. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính

$R = IA = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Gọi H là trung điểm của BC thì $IH \perp BC$

Tam giác IBH vuông tại H:

$$d(I, BC) = IH = \sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = 1$$

Đường thẳng BC đi qua M(–1; 1) nên có dạng

$a(x + 1) + b(y - 1) = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$

$$d(I, BC) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Leftrightarrow 3a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}a$$

Với $b = a\sqrt{3}$ chọn $a = 1, b = \sqrt{3}$

Khi đó BC: $x + \sqrt{3}y + 1 - \sqrt{3} = 0$

nên $d(A, BC) = \frac{|-4 - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}|}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.d(A, BC) = \frac{1}{2}.4.\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

Với $b = -a\sqrt{3}$ chọn $a = 1, b = -\sqrt{3}$

Khi đó BC: $x - \sqrt{3}y + 1 + \sqrt{3} = 0$

nên $d(A, BC) = \frac{|-4 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}|}{2.} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.d(A, BC) = \frac{1}{2}.4.\frac{2\sqrt{3} - 3}{2} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Câu 9. Phương trình: $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x - 4| = 7 - x$.

Ngoài cách xét dấu $x^2 - 4x + 3$ và $x^2 - 3x - 4$ thì phải xét 5 trường hợp, ta có thể giải cách khác bằng cách dùng dấu = của bất đẳng thức:

Đặt $A = x^2 - 4x + 3$; $B = -x^2 + 3x + 4$ thì phương trình:

$$|A| + |B| = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hay } x \geq 3 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ hoặc $3 \leq x \leq 4$.Vậy tập nghiệm $S = [-1;1] \cup [3;4]$.

Câu 10. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy chọn 3 vectơ

$$\vec{a}\left(x;\frac{1}{x}\right), \vec{b}\left(y;\frac{1}{y}\right), \vec{c}\left(z;\frac{1}{z}\right) \text{ thì } \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = (x + y + z;\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}).$$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ nên:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$$

Mà $x + y + y = 5$ do đó

$$\sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} = \sqrt{25 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

ĐỀ SỐ 48

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x + 2$.

Câu 2. (1 điểm)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$, biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc toạ độ O.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm phần thực của số phức $z = (1 + i)^n$ biết rằng n nguyên dương thoả mãn $\log_4(n - 3) + \log_5(n + 6) = 4$.

b) Giải bất phương trình: $(2x - 7)\ln(x + 1) > 0$.

Câu 4. (1 điểm) Tính: $I = \displaystyle\int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

Câu 5. (1 điểm) Cho A(0; −2; 1), B(−1; 0; 1), C(0; 0; −1). Lập phương trình mặt cầu có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 6. (1 điểm)

a) Không dùng máy tính, tính $A = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

b) Tìm hệ số của x^4 của khai triển: $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$

Câu 7. (1 điểm) Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a?.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $2x - y - 2 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình (C): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 45^0.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho 8 số dương a, b, c, d và x, y, z, t thỏa mãn điều kiện ax + by +cz +dt = xyzt. Chứng minh

$$x + y + z + t > \frac{4}{3}\left(\sqrt{1 + 3\sqrt{a+b} + 3\sqrt{a+c} + 3\sqrt{b+c} + 3\sqrt{b+d} + 3\sqrt{c+d}} - 1\right)$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

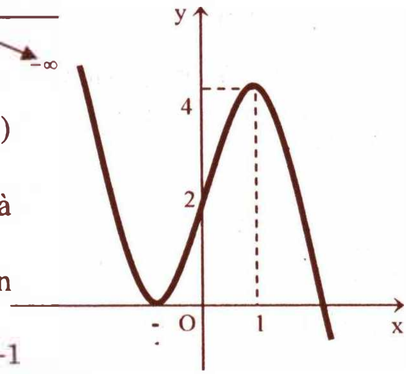
- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

$y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$



Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ và đồng biến trên $(-1; 1)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $y_{CT} = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CĐ} = 4$

• Đồ thị: $y'' = -6x$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên điểm uốn I(0;2) là tâm đối xứng.

Câu 2. Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$; $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$.

Tam giác OAB vuông cân tại O, suy ra hệ số góc tiếp tuyến bằng $k = \pm1$.

Gọi toạ độ tiếp điểm là $(x_o; y_o)$, ta có: $\dfrac{-1}{(2x_o+3)^2} = \pm1 \Leftrightarrow x_o = -2$ hoặc $x_o = -1$

Với $x_o = -1$, $y_o = 1$ thì phương trình tiếp tuyến $y = -x$ (loại) vì A, B trùng nhau tại O.

Với $x_o = -2$, $y_o = 0$ thì phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2$ (thoả mãn).

Vậy, tiếp tuyến cần tìm: $y = -x - 2$.

Câu 3.

a) Xét phương trình $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$, n nguyên dương

Vì hàm số $f(x) = \log_4(x-3) + \log_5(x+6)$, $x > 3$ là hàm đồng biến $(3; +\infty)$ mà $f(19) = 4$.

Do đó phương trình $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$ có nghiệm duy nhất $n = 19$.

$\Rightarrow z = (1+i)^{19} = [(1+i)^2]^9(1+i) = (2i)^9(1+i) = 512i^9(1+i)$

$= 512(i^2)^4 i(1+i) = 512i(1+i) = -512 + 512i.$

Vậy phần thực là -512.

b) Bất phương trình: $(2x-7)\ln(x+1) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-7>0 \\ \ln(x+1)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-7<0 \\ \ln(x+1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\frac{7}{2} \\ x+1>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{7}{2} \\ 0<x+1<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{2} \\ \begin{cases} x<\frac{7}{2} \\ -1<x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{2} \\ -1<x<0 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S = (-1; 0) \cup (\frac{7}{2}; +\infty)$.

Câu 4. $I = \int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx = t^2dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, $x = \frac{7}{3}$ thì $t = 2$.

$$I = \int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^4 + 2t)dt = \left(\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{46}{15}$$

Câu 5. Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{AI} = (x; y+2; z-1)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 2; -2)$

nên $I \in (ABC) \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0$

Ta có $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -3 \\ y - z = -1 \\ -2x + y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}$

nên tâm $I\left(1; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ và bán kính $R = AI = \sqrt{\frac{33}{8}}$

Vậy PT mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{4})^2 + (z-\frac{3}{4})^2 = \frac{33}{8}$

Câu 6.

a) $A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Ta có: $A\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\alpha - \sin\frac{5\pi}{7}\right)$

$= -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$. Do đó $A = -\frac{1}{2}$.

Cách khác: Nhân 2 vế với $\sin\frac{2\pi}{7}$.

b) Ta có $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = ((1 + 2x) + 3x^2)^{10}$

$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (1+2x)^{10-k}(3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} 3^k.C_{10}^k(1+2x)^{10-k}.x^{2k}$

Hệ số của x^4 chỉ có khi $k \le 2$

Với k = 0 thì có đa thức: $3^0.C_{10}^0(1+2x)^{10}$

Với k = 1 thì có đa thức: $3^1.C_{10}^1(1+2x)^9.x^2$

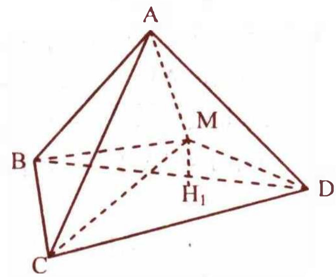
Với k = 2 thì có đa thức: $3^2.C_{10}^2(1+2x)^8.x^4$

Vậy hệ số theo x^4 là: $3^0.C_{10}^0.C_{10}^4.2^4 + 3^1.C_{10}^1.C_9^2.2^2 + 3^2.C_{10}^2.C_8^0.2^0 = 8085$.

Câu 7. Gọi h là chiều cao và S là diện tích các mặt tứ diện đều.

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC).

Khi đó MH_1, MH_2, MH_3, MH_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó.



Ta có:

$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}$.

$\Rightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4$

$= \frac{1}{3}S.h$

$\Rightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h$: Không đổi.

Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ nên tổng các khoảng cách nói trên cũng bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 8. Từ giả thiết, suy ra phương trình đường thẳng tiếp tuyến có dạng d_1: $x - 3y + c = 0$; d_2: $3x + y + c = 0$.

Xét tiếp tuyến là d_1: $x - 3y + c = 0$

$$d(I; d_1) = R \Leftrightarrow \frac{|c-2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow c \in \{12; -8\}$$

Vậy có hai tiếp tuyến $x - 3y + 12 = 0$; $x - 3y - 8 = 0$.

Xét tiếp tuyến là d_2: $3x + y + c = 0$

$$d(I; d_2) = R \Leftrightarrow \frac{|4+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow c \in \{6; -14\}$$

Vậy có hai tiếp tuyến $3x + y - 14 = 0$; $3x + y + 6 = 0$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \end{cases}$.

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra: $2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy + x^2 - xy + y^2)$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ $(-2;-1)$, $(2;1)$.

Câu 10.

Đặt $A = 3\sqrt{a+b} + 3\sqrt{a+c} + 3\sqrt{b+c} + 3\sqrt{b+d} + 3\sqrt{c+d}$.

Ta có a, b, c, d và x, y, z, t dương thỏa mãn điều kiện

$ax + by + cz + dt = xyzt$

nên $by + cz + dt < xyzt$ do đó $x > \frac{b}{zt} + \frac{c}{yt} + \frac{d}{yz}$.

Tương tự cho y,z, t thì được

$$x + y + z + t > \frac{a+b}{zt} + \frac{a+c}{yt} + \frac{a+d}{yz} + \frac{b+c}{xt} + \frac{b+d}{xz} + \frac{c+d}{xy}.$$

Do đó $x + y + z + t + zt + yt + yz + xt + xz + xy$

$$> \frac{a+b}{zt} + zt + \frac{a+c}{yt} + yt + \frac{a+d}{yz} + yz + \frac{b+c}{xt} + xt + \frac{b+d}{xz} + xz + \frac{c+d}{xy} + xy > \frac{2}{3}A.$$

Mà ta có $(x-z)^2 + (x-y)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 \ge 0$

Nên $zt + yt + yz + xt + xz + xy \le \frac{3}{8}(x+y+z+t)^2$

Do đó $\frac{3}{8}(x+y+z+t)^2 + (x+y+z+t) - \frac{2}{3}A > 0$.

Bất phương trình bậc hai này theo x + y + z + t cho nghiệm

$$x + y + z + t > \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+A} - 1\right) \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

ĐỀ SỐ 49

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(x) = x\sqrt{7-2x}$ với $0 < x < \frac{7}{2}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $(z+i)^2 + |z-2|^2 = 2(\bar{z} - 3i)^2$.

b) Tìm điều kiện của a để phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(ax).$$

Câu 4. (1 điểm) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox, giới hạn bởi $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC với A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5). Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC và tính độ dài đường phân giác trong của tam giác ABC kẻ từ B.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$.

b) Có 16 đội bóng, chia ngẫu nhiên thành hai bảng có số đội bóng bằng nhau. Tìm xác suất để hai đội mạnh nhất rơi vào một bảng; hai đội mạnh nhất ở hai bảng khác nhau.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lập phương cạnh a, hãy tính thể tích của tứ diện đều có 2 đỉnh nằm trên một đường chéo của hình lập phương và 2 đỉnh còn lại nằm trên 1 đường chéo của 1 mặt bên.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại B, đường thẳng AB đi qua điểm M(–3; –1), điểm B nằm trên đường thẳng Δ: x – 4y = 0, đường thẳng AC: 2x – y – 5 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh B có hoành độ là một số nguyên.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\dfrac{x+y}{2+z} + \dfrac{y+z}{2+x} + \dfrac{z+x}{2+y}$ trong đó x, y, z là các số thực thuộc đoạn [1; 2].

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R** \ {1}.
- Sự biến thiên:

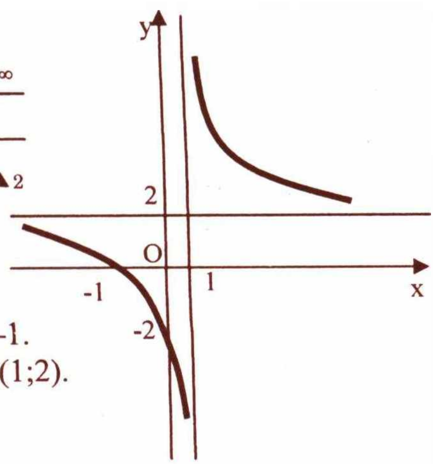
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là TCN

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là TCĐ

$y' = -\dfrac{4}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	+	
y	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng:

$(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

- Đồ thị: $x = 0 \Rightarrow y = -2$, $y = 0 \Rightarrow x = -1$.

Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận I(1;2).

Câu 2.

Với $0 < x < \dfrac{7}{2}$.

Ta có $f'(x) = \sqrt{7-2x} - \dfrac{x}{\sqrt{7-2x}} = \dfrac{7-3x}{\sqrt{7-2x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ (chọn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7}{3}$		$\frac{7}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy $\max f = f(\frac{7}{3}) = \frac{7\sqrt{21}}{9}$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$

Khi đó: $(z+i)^2 + |z-2|^2 = 2(\bar{z} - 3i)^2$

$\Leftrightarrow (x + (y+1)i)^2 + |(x-2) + yi|^2 = 2(x - (y+3)i)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i + (x-2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y+3)^2 - 4x(y+3)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (y+1)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y+3)^2 \\ 2x(y+1) = -4x(y+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (y+1)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y+3)^2 \\ 2x(3y+7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + 10y + 21 = 0 (\Delta < 0) \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = -\frac{7}{3} \\ \frac{77}{9} = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{3} \\ x = \frac{77}{36} \end{cases}.$$

Vậy $z = \frac{77}{36} - \frac{7}{3}i$.

b) Phương trình: $2\log_3(x+3) = \log_3(ax)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0 \\ \log_3(x+3)^2 = \log_3(ax) \end{cases} \Leftrightarrow (x+3)^2 = ax,\ x + 3 > 0$$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = ax,\ x > -3$

Xét $x = 0$: Loại. Xét $x \neq 0$ thì có: $a = \frac{x^2 + 6x + 9}{x}$, $x > -3$

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x}$, $x > -3$, $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$, $f'(x) = 0$ thì $x = 3$

Bảng biến thiên:

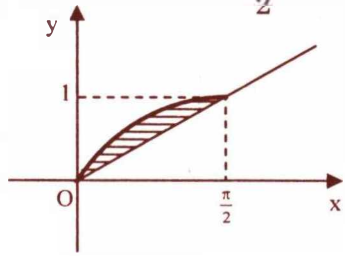
x	-3		0		3		$+\infty$
f'	0	$-$	||		0	$+$	
f	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT thì điều kiện có nghiệm duy nhất: $a < 0$ hay $a = 12$.

Câu 4. Dựa vào đồ thị, thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox, giới hạn bởi $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ là: $V = V_1 - V_2$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \text{ (đvtt).}$$



Câu 5.

Độ dài đường cao kẻ từ A:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; 5; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$

Suy ra: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-38; -26; -10)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{555}$.

Do đó $h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{555}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{26}}$

Độ dài đường phân giác:

Gọi D(x; y; z) là chân đường phân giác kẻ từ B

Ta có: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$.

Vì D nằm giữa A, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

hay $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x+4 \\ 2(2-y) = y-7 \\ 2(-1-z) = z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

Vậy $D(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1)$ nên phân giác $BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{2}$: Biến đổi phương trình:

$\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

So sánh điều kiện, được nghiệm của phương trình là: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Số cách chia có thể là $|\Omega| = C_{16}^8$.

Gọi A là biến cố "2 đội mạnh nhất rơi vào một bảng".

Số cách chia thuận lợi cho A là $|\Omega_A| = 2C_2^2C_{14}^6$.

Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{7}{15}$.

Gọi B là biến có "2 đội mạnh nhất ở 2 bảng khác nhau"

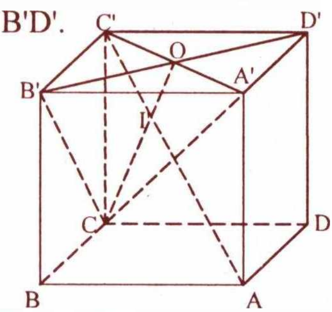
Số cách chia thuận lợi cho B là $|\Omega_B| = C_2^1C_{14}^7$.

Vậy xác suất: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{15}$.

Câu 7. Trong một tứ diện đều, đoạn nối hai trung điểm của hai cạnh đối là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đó.

Giả sử tứ diện đều có hai đỉnh nằm trên đường chéo AC' và hai đỉnh còn lại nằm trên đường chéo B'D' của mặt bên nên đoạn vuông góc chung của hai cạnh đối diện của tứ diện chính là đoạn vuông góc chung của AC' và B'D'.

Gọi O là giao điểm của A'C' và B'D'; I là giao điểm của AC' với CO thì OI là đường vuông gócchung của AC' và B'D'.



Vì I là trọng tâm của tam giác đều CB'D' cạnh $a\sqrt{2}$ nên:

$OI = \dfrac{1}{3}CO = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Vì đoạn vuông góc chung của hai cạnh số đối tứ diện đều cạnh b bằng $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ nên $\dfrac{b\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow b = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích tứ diện đều đó là:

$V = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\sin 90^\circ = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{108}$.

Câu 8. Đường thẳng AB đi qua M nên có dạng

$$a(x + 3) + b(y + 1) = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^0$.

$\cos(AB, AC) = \dfrac{|2a - b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a + b) = 0$

Với $a - 3b = 0$ chọn $a = 3$, $b = 1$.

Khi đó AB: $3x + y + 10 = 0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x + y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{14}{13} \\ y = -\dfrac{10}{13} \end{cases} \text{(loại vì không nguyên)}$$

Với $3a + b = 0$ chọn $a = 1$, $b = -3$

Khi đó AB: $x - 3y = 0$

Tọa đô điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Do đó } B(0; 0)$$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Do đó } A(3; 1)$$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB nên BC: $3x + y = 0$. Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}. \text{ Do đó } C(1; -3).$$

Vậy A(3; 1), B(0; 0) và C(1; –3).

Câu 9. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x + 34} \\ v = \sqrt[3]{x - 3} \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 37.$

Phương trình $\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$ thành hệ:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = 37 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ v^2 + v - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x + 34} = -3 \\ \sqrt[3]{x - 3} = -4 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x + 34} = 4 \\ \sqrt[3]{x - 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -61 \\ x = 30 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm $x = -61$, $x = 30$.

Câu 10. Ta có $x, y, z \in [1; 2]$

$\Rightarrow x + y \geq 2 \Rightarrow x + y + z \geq 2 + z$

Tương tự $x + y + z \geq 2 + y$

$\Rightarrow x + y + z \geq 2 + x$

$$P \geq \frac{x + y}{x + y + z} + \frac{y + z}{x + y + z} + \frac{z + x}{x + y + z} = 2$$

$$P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Rightarrow \min P = 2$$

$$\text{Và } P = \frac{x}{2 + z} + \frac{y}{2 + x} + \frac{z}{2 + y} + \frac{y}{2 + z} + \frac{z}{2 + x} + \frac{x}{2 + y}$$

$$\leq \frac{x}{x + z} + \frac{y}{y + x} + \frac{z}{z + y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x} + \frac{x}{x + y} = 3$$

$P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 2 \Rightarrow \max P = 3.$

ĐỀ SỐ 50

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^4 - 2x^2 + 5$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm các điểm trên đường thẳng d: $x = 3$ mà từ đó vẽ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình: $2z^2 - 4z + 11 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^{2017}}$.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y) + 1 = \log_2(7x+y) + \log_2 y \\ \log_2(3x - y - 2) = 2x - 2y + 4 \end{cases}.$$

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (α): $2x - y + z + 2 = 0$ và (β): $x + y + 2z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β).

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c tương ứng góc A, B, C thỏa mãn:

$\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B \sin C}$. Tính góc A.

b) Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(2 - \sqrt[3]{3}x)^{2n}$ biết rằng số tự nhiên n thỏa mãn hệ thức: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 4096$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, SA = SB = SC = a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC; D là điểm đối xứng của S qua E; I là giao điểm của đường thẳng AD với mặt phẳng (SMN). Chứng minh rằng AD vuông góc với SI và tính theo a thể tích của khối tứ diện MBSI.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(1; –2) và AC = 2BD. Điểm M(–5; –4) thuộc đường thẳng AB, điểm N(–5; 16) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $3\sqrt[3]{6-x} - 2\sqrt{6+x} = 2$.

Câu 10. (1 điểm) Chứng minh bất đẳng thức: $a^b b^a \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ với a, b >0.

LỜI GIẢI

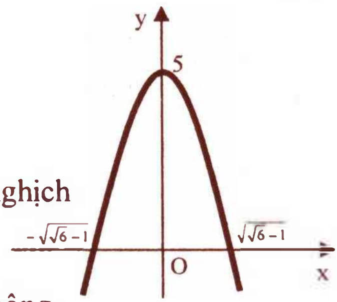
Câu 1. • Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

$y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2+1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		−	
y	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 0: $y_{CĐ} = 5$.

• Đồ thị: $y'' = -12x^2 - 4 < 0, \forall x$ nên đồ thị không có điểm uốn.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{6}-1}$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.

Câu 2.

Tập xác định D = **R** \ {2}.

Ta có $y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$

Gọi M(3; b) ∈ d. Phương trình tiếp tuyến qua M hệ số góc k:
y = k(x − 3) + b. Ta tìm điều kiện hệ sau có nghiệm x:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2} = k(x-3)+b \\ \dfrac{-5}{(x-2)^2} = k \end{cases}$$

Do đó $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{-5}{(x-2)^2}(x-3) + b$

$\Leftrightarrow (b-2)x^2 - 2(2b+1)x + 4b + 17 = 0, x \ne 2.$

Xét b = 2 thì hệ có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ (chọn)

Xét $b \ne 2$ thì điều kiện $\Delta' \ge 0$, $y(2) \ne 0 \Leftrightarrow b \le 7$.

Vậy các điểm cần tìm M(3;2) và M(3; b) với $b \le 7$.

Câu 3.

a) Phương trình: $2z^2 - 4z + 11 = 0$ có $\Delta = 16 - 88 = -72 = 72i^2$, ta được 2 nghiệm phức: $z_1 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Suy ra: $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{22}}{2}$, $z_1 + z_2 = 2$ Do đó: $M = \frac{\frac{11}{2} + \frac{11}{2}}{2^{2017}} = \frac{11}{2^{2017}}$.

b) Điều kiện: $x + y > 0$; $7x + y > 0$; $y > 0$; $3x - y - 2 > 0$

Hệ $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y) + 1 = \log_2(7x+y) + \log_2 y \\ \log_2(3x - y - 2) = 2x - 2y + 4 \end{cases}$

Biến đổi phương trình ban đầu $2(x+y)^2 = y(7x+y) \Leftrightarrow (2x - y)(x - y) = 0$

Xét: $y = 2x$. Thay vào phương trình thứ hai, ta được: $\log_2(x - 2) + 2x = 4$

Vì vế trái là hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 5$.

Xét: $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai, ta được: $\log_2(2x - 2) = 4$

$\Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow y = 9$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(9; 9)$, $(\frac{5}{2}; 5)$.

Câu 4. Đặt $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$ thì

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi $x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{2} + 1$, $x = 6 \Rightarrow t = 2 + \sqrt{3}$. Do đó $I = \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

$$= \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \int_{\sqrt{2}+1}^{2+\sqrt{3}} \frac{2dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_{\sqrt{2}+1}^{2+\sqrt{3}} = 2\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}.$$

Câu 5. Ta có VTPT của (α) là $\vec{n} = (2; -1; 1)$ và (β) là $\vec{n'} = (1; 1; 2)$

Suy ra $[\vec{n}, \vec{n'}] = (-3; -3; 3)$ hay $\vec{u} = (1; 1; -1)$ là VTCP của giao tuyến (α) và (β).

Do đó mp(P) cần tìm qua O và có VTPT là $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Vậy: $(P) = x + y - z = 0$.

Câu 6.

a) Áp dụng định lý sin thì hệ thức $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \cos B \cos C = \sin B \sin C \Leftrightarrow \cos(B + C) = 0$$

$\Leftrightarrow -\cos A = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$ .Vậy góc $A = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Ta có: $2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + C_{2n+1}^{3} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$

$$0^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} - C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} - C_{2n+1}^{3} + \ldots - C_{2n+1}^{2n+1}$$

Suy ra $2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

Do đó $\left(C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) = 2^{2n}$

Mà $C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{5} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 4096 \Leftrightarrow 2^{2n} = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Do đó $(2 - \sqrt[3]{3x})^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^{k} 2^{12-k} (-\sqrt[3]{3})^{k} x^{k}$

Hệ số của x^9 ứng với $k = 9$ là $C_{12}^{9} 2^{12-9} (-\sqrt[3]{3})^{9} = -8.27.C_{12}^{9} = -47520$.

Câu 7.

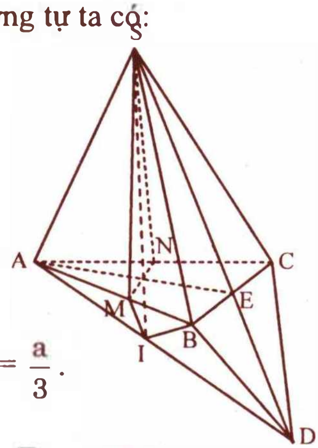
Ta có $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $BD \perp SB \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp SM$.

Mà $SM \perp AB$ (do tam giác SAB vuông cân)

$\Rightarrow SM \perp (ABD) \Rightarrow SM \perp AD$. Chứng minh tương tự ta có:

$SN \perp AD \Rightarrow AD \perp (SMIN) \Rightarrow AD \perp SI$.



Ta có $AD = \sqrt{SA^2 + SD^2} = a\sqrt{3}$. $SD^2 = DI.DA$

$\Rightarrow DI = \dfrac{SD^2}{DA} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$SM = MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hạ $IH \perp AB$ thì $IH \,//\, BD$.

Do đó: $\dfrac{IH}{DB} = \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{AD - DI}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IH = \dfrac{1}{3} DB = \dfrac{a}{3}$.

Mặt khác $SM \perp (ABD)$ nên

$V_{MBSI} = \dfrac{1}{3} SM.S_{MBI} = \dfrac{1}{6} SM.BM.IH = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3}{36}$.

Câu 8. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua I thì $M'(7; 0) \in CD$.

Suy ra CD: $4x + 3y - 28 = 0$, AB: $4x + 3y + 32 = 0$

Gọi H là hình chiếu của I xuống AB.

Ta có $IH = d(I; AB) = 6$.

Tam giác IAB vuông tại I có đường cao IH:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{4IB^2} + \frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow IB = 3\sqrt{5}$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}4x+3y+32=0\\(x-1)^2+(y+2)^2=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y+32=0\\25x^2+190x+280=0\end{cases}$$

Suy ra $x=-2$ hoặc $x=-\dfrac{28}{5}$.

Vậy điểm $B(-2;-8)$, $B(-\dfrac{28}{5};-\dfrac{16}{5})$.

Câu 9. Phương trình: $3\sqrt[3]{6-x}-2\sqrt{6+x}=2$.

Điều kiện: $x\ge -6$.Đặt $u=\sqrt[3]{6-x}$; $v=\sqrt{6+x}$

Ta có hệ: $\begin{cases}3u-2v=2 & (1)\\u^3+v^2=12 & (2)\end{cases}$

Từ (1) suy ra: $v=\dfrac{3u-2}{2}$ Thế vào (2) ta được phương trình:

$4u^3+9u^2-12u-44=0$

$\Leftrightarrow (u-2)(4u^2+17u+22)=0$

$\Leftrightarrow$ $u=2$ (vì $4u^2+17u+22>0,\ \forall u$)

$\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{6-x}=2\Leftrightarrow 6-x=8\Leftrightarrow x=-2$ (chọn)

Cách khác: Vế trái là hàm f(x) nghịch biến, $f(-2)=2$ nên $x=-2$ là nghiệm duy nhất.

Câu 10. Ta có BĐT: $a^bb^a\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

$$\Leftrightarrow b\ln a+a\ln b\le(a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right)+b\ln\left(\frac{2a}{a+b}\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{a}{b}\ln\left(\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\right)+\ln\left(\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{a}{b}+1}\right)\le 0.$$

Giả sử $a\le b$, đặt $t=\dfrac{a}{b}$ thì $0<t\le 1$.

Bất đẳng thức tương đương: $t\ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right)+\ln\left(\dfrac{2t}{t+1}\right)\le 0,\ 0<t\le 1$.

Xét hàm số $f(t)=t\ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right)+\ln\left(\dfrac{2t}{t+1}\right),\ 0<t\le 1$.

$f'(t)=\ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right)-\dfrac{t}{t+1}+\dfrac{1}{t(t+1)}=\ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right)+\dfrac{1-t^2}{t(t+1)}=\ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right)+\dfrac{1-t}{t}>0$ nên f là hàm đồng biến.

Ta có $f(t)\le f(1)=0\Rightarrow$ đpcm.

ĐỀ SỐ 51

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm điểm cực tiểu của hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $\left(\dfrac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 3\dfrac{iz+3}{z-2i} - 4 = 0$.

b) Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \\ \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1}) \leq \ln 2 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị: $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ (1), $y = \dfrac{2}{x}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại giao điểm của đồ thị này với trục hoành.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + x^2 + 6x - 2y - 2z - 14 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính r = 4.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $8(\sin^6 x + \cos^6 x) + 3\sqrt{3}\sin 4x = 3\sqrt{3}\cos 2x - 9\sin 2x + 11$

b) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên, mỗi số có bốn chữ số khác nhau và các chữ số đó đều thuộc tập hợp A = {0; 1; 2; 3; 4; 5}. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Câu 7. (1 điểm) Tìm hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm P(2; 5) và cắt (C) tại hai điểm phân biệt H, K sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm H và K vuông góc nhau.

Câu 9. (1 điểm) Tìm m để phương trình: $x^2 + m(x-1) = 6x\sqrt{x-1}$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2}$$

với mọi số thực x, y, z thoả mãn điều kiện x + y + z = 1.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**

• Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$$y' = 3x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.;\ y(0) = 0,\ y(2) = -4$$

Bảng biến thiên:

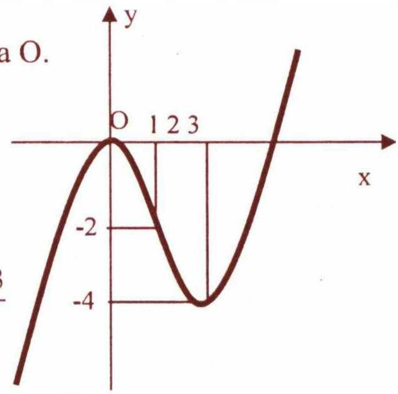
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;\ 0)$ và $(2;\ +\infty)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -4$, cực đại tại $x = 0$; $y_{CĐ} = 0$

• Đồ thị: Đồ thị cắt trục Ox tại (3; 0) và qua O.

$y'' = 6x - 6;\ y'' = 0 \Rightarrow x = 1$

Điểm uốn là tâm đối xứng $I(1;-2)$



Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 8 - 2x(x+1)}{(x^2+8)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Vậy hàm số đạt cực tiểu đạt $x = -4$, $y_{CT} = -\dfrac{1}{8}$.

Câu 3.

a) Đặt $\dfrac{iz+3}{z-2i} = w$ thì phương trình: $\left(\dfrac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 3\dfrac{iz+3}{z-2i} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow w^2 - 3w - 4 = 0$.

Biệt thức $\Delta = 9 + 16 = 25$ nên suy ra $w = -1$ hay $w = 4$.

Với $w = -1$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = -1$ thì $z = \dfrac{-1+5i}{2}$

Với $w = 4$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = 4$ thì $z = \dfrac{4+35i}{17}$.

Vậy nghiệm phức của phương trình là: $z = \dfrac{-1+5i}{2}$, $z = \dfrac{4+35i}{17}$.

b) Hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \\ \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1}) \leq \ln 2 \end{cases}$

Ta có: $\ln 2 \geq \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1})$

$$\geq \ln(2\sqrt{4^{x+y-1}.3.4^{2y-1}}) = \ln(2\sqrt{4^{x+3y-2-\ln 3}}) \geq \ln(2\sqrt{4^{0}}) = \ln 2.$$

Do đó dấu = xảy ra nên giải được nghiệm: $x = \frac{1}{2}\log_4 12$, $y = \frac{1}{2}\log_4\frac{4}{3}$.

Câu 4. Toạ độ giao điểm đồ thị (1) với Ox là A(1; 0).

PT tiếp tuyến tại A là $y = x - 1$

Hoành độ giao điểm của $y = \frac{2}{x}$ và $y = x - 1$ là $x = 2$, $x = -1$ và hoành độ giao điểm của $y = \frac{2}{x}$ và $y = 1 - \frac{1}{x}$ là $x = 3$.

$$S(H) = \int_{-1}^{2}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx + \int_{2}^{3}\left(\frac{3}{x} - 1\right)dx$$

Vậy: $S(H) = (\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x\Big|_{-1}^{2} + (3\ln x - x\Big|_2^3 = \ln\frac{27}{2} - \frac{3}{2}$.

Câu 5. Mặt cầu (S) có tâm I(–3; 1; 1), bán kính R = 5.

Vì (P) chứa Oz nên phương trình có dạng

(P): $ax + by = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Ta có: $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-3a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$

$\Leftrightarrow 9a^2 - 6ab + b^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2b(4b + 3a) = 0$

Với $b = 0$ thì chọn $a = 1$.

Với $4b + 3a = 0$ thì chọn $a = 4$ và $b = -3$..

Vậy có hai mặt phẳng thỏa (P_1): $x = 0$; (P_2): $4x - 3y = 0$.

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình:

$$8(\sin^6 x + \cos^6 x) + 3\sqrt{3}\sin 4x = 3\sqrt{3}\cos 2x - 9\sin 2x + 11$$

$\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin 2x)(1 + \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x) = 0$

Xét: $1 - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Xét: $1 + \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b) Số phần tử của không gian mẫu $5.A_5^3 = 300$.

Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên được chọn ra và chia hết cho 15, ta có:

$\begin{cases} d \in \{0;5\} \\ a+b+c+d \vdots 3 \end{cases}$ và a,b,c,d phân biệt.

Suy ra {a;b;c;d} là {0; 1; 2; 3}, {0; 1; 3; 5}, {0; 2; 3; 4}
{0; 3; 4; 5}, {1; 2; 4; 5}

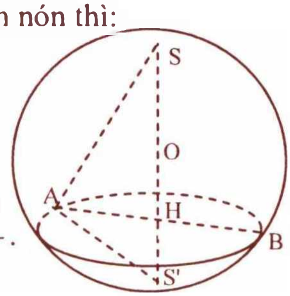
Số phần tử của biến cố cần tìm là 5.3! + 2.2.2! = 38.

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{38}{300} = \frac{19}{150}$.

Câu 7. Gọi bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y ($0 < x \le R$, $0 < y < 2R$).

Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì:

$AH^2 = HS.HS' \Rightarrow x^2 = y(2R - y)$



Gọi V_1 là thể tích khối nón thì:

$V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y)$

$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$

V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y$

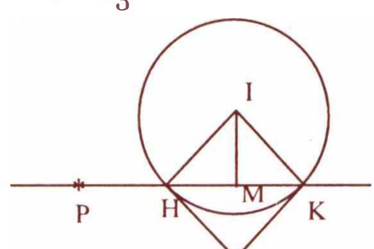
$\Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \frac{8R^2}{9}$, hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$

Vậy hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước có bán kính đáy $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$ và chiều cao $y = \frac{4R}{3}$.

Câu 8. (C) có tâm I(1; −1) và bán kính R = 5.

Gọi M là trung điểm HK, tam giác IHK vuông cân ở I

nên IM ⊥ HK và $d(I, \Delta) = \frac{IH}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.



Gọi (Δ): $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \ne 0$).

Ta có $P(2; 5) \in \Delta \Rightarrow 2a + 5b + c = 0$ (1)

Và $d(I; \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a - b + c)^2 = 25(a^2 + b^2)$ (2)

Từ (1) và (2): $2(a + 6b)^2 = 25(a^2 + b^2)$ (3)

Cho b = 1, và giải (3) ta được a = –1 hoặc a = $\frac{47}{23}$

Với a = –1 ⇒ c = –3 ⇒ (Δ): x – y + 3 = 0

Với a = $\frac{47}{23}$ ⇒ c = $-\frac{209}{23}$ ⇒ (Δ): 47x + 23y – 209 = 0.

Vậy có 2 đường thẳng (Δ): x – y + 3 = 0; (Δ): 47x + 23y – 209 = 0.

Câu 9. Phương trình: $x^2 + m(x-1) = 6x\sqrt{x-1}$.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Khi x = 1 thì PT vô nghiệm.

Khi x > 1, chia hai vế PT cho x – 1, ta có PT

$$\Leftrightarrow m = -\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)^2 + 6\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, x > 1 \Rightarrow t' = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

t' = 0 ⇔ x = 2.

Lập BBT ⇒ $t \geq 2$ và mỗi t > 2 tương ứng có 2 nghiệm x phân biệt và t = 2 tương ứng chỉ có 1 nghiệm x.

Do đó: $m = -t^2 + 6t$ với $t \geq 2$.

Xét $f(t) = -t^2 + 6t$; $f'(t) = -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Lập BBT suy ra PT có 4 nghiệm phân biệt ⇔ 8 < m < 9.

Câu 10. Ta có: $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 3(x+y)^2 + (x-y)^2 \geq 3(x+y)^2$

Suy ra: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|x+y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

Tương tự: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)$

và $\sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x)$

Suy ra: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z) = \sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra ⇔ $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN là $\sqrt{3}$.

ĐỀ SỐ 52

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-2}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số:
$y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m$ (1) có cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số (1) trái dấu.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số ảo.

b) Giải phương trình: $\log_2 x + \log_3(x+1) = \log_4(x+2) + \log_5(x+3)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho A(4; 0; 0), C(0; 0; 2), $B(x_0; y_0; 0)$ $(x_0, y_0 > 0)$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB} = 45^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABO và M là điểm trên đoạn AC sao cho AM = x. Tìm x để OM vuông góc với GM.

Câu 6. (1 điểm)

a) Trong điều kiện xác định, cho sin(2a + b) = 3sinb, tính
M = tan(a + b) – 2tan a.

b) Cho n là số nguyên dương, tính tổng

$$S = \frac{2^2-1}{2}C_n^0 + \frac{2^3-1}{3}C_n^1 + \ldots + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}C_n^n.$$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình trụ nội tiếp hình cầu S(O; R). Hình trụ nào có diện tích xung quanh S lớn nhất.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $2x + y - 8 = 0$ và d_2: $x - 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm I thuộc Ox, tiếp xúc d_1 và cắt d_2 tại A, B với diện tích tam giác IAB bằng $5\sqrt{3}$.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + 2x^2y = 3 \\ x^2 + y^2 + y = 3 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

• Sự biến thiên:

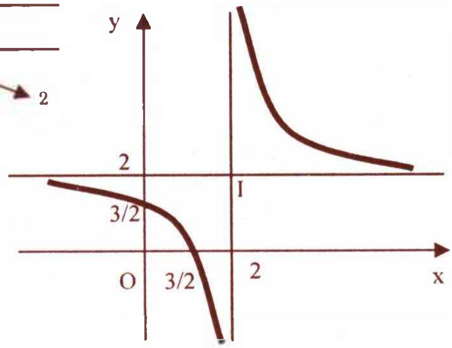
Ta có $\lim_{x\to 2^-} y = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng: x = 2.

Ta có $\lim_{x \to \pm\infty} y = 2$ nên tiệm cận ngang: y = 2.

$y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 1$. Hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

• Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$; y = 0 $\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Đồ thị nhận giao điểm I(2; 2) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Câu 2. Hàm số bậc 3 có giá trị cực đại cực tiểu trái dấu thì đồ thị hàm số phải giao với Ox tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m = (x-1)(x^2 - 2mx + m)$

Do đó: $y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số luôn giao Ox tại (1; 0).

Hàm số có giá trị cực đại cực tiểu trái dấu thì đồ thị hàm số phải giao với Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Vậy giá trị cần tìm là m < 0 hoặc m > 1.

Câu 3.

a) Đặt z = a + bi (a, b, ∈ **R**).

Ta có $|z - 3i| = |1 - i.\bar{z}| \Leftrightarrow |a + (b-3)i| = |1 - i(a - bi)|$

$\Leftrightarrow |a + (b-3)i| = |1 - b - ai|$

$\Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = (1-b)^2 + (-a)^2 \Leftrightarrow b = 2.$

Khi đó thì $z - \dfrac{9}{z} = a + 2i - \dfrac{9}{a+2i} = a + 2i - \dfrac{9(a-2i)}{a^2+4} = \dfrac{a^3 - 5a + (2a^2 + 26)i}{a^2+4}$

$z - \dfrac{9}{z}$ là số ảo khi và chỉ khi $a^3 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = \pm\sqrt{5}$

Vậy các số phức cần tìm là $z = 2i$, $z = \sqrt{5} + 2i$, $z = -\sqrt{5} + 2i$.

b) Phương trình: $\log_2 x + \log_3(x+1) = \log_4(x+2) + \log_5(x+3)$

Điều kiện: x > 0.

Xét x = 2 thì PT thoả mãn:

Xét x > 2 thì $\frac{x}{2} > \frac{x+2}{4} > 1$, $\frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{5} > 1$

nên VT > VP (loại), xét x < 2 thì VT < VP (loại)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

Câu 4. $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$

Đặt x = –t thì $\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_{0}^{1} \frac{2^t\sqrt{1-t^2}}{1+2^t}dt = \int_{0}^{1} \frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$

Do đó $I = \int_{0}^{1} \frac{(1+2^x)\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ Đặt tiếp x = sint thì $I = \frac{\pi}{4}$.

Câu 5. Điều kiện: $x \in [0;\ 2\sqrt{5}\ ]$. Ta có B(6;6;0), $G\left(\frac{10}{3};2;0)\right)$.

Ta có M thuộc AC và AM = x nên $M\left(4-\frac{2}{\sqrt{5}}x;0;\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$

Theo giả thiết $\overline{OM}.\overline{GM} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)\left(4-\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)-\frac{x^2}{5}=0$.

Giải phương trình trên, so sánh điều kiện ta chọn nghiệm $x = \frac{14 \pm \sqrt{76}}{3\sqrt{5}}$.

Câu 6.

a) sin(2a + b) = 3sinb ⇒ sin[(a + b) + a] = 3sin[(a + b) – a].
⇒ sin(a + b)cosa + sina cos(a + b) = 3[sin(a + b)cosa – sina cos(a + b)]
⇒ 4sina cos(a + b) = 2sin(a + b)cosa⇒ tan(a + b) = 2tan a
Do đó: M = tan(a + b) – 2tan a = 0.

b) Ta có $S = \frac{2^2-1}{2}C_n^0 + \frac{2^3-1}{3}C_n^1 + \ldots + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}C_n^n$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+2}-1}{k+2}C_n^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_1^2 x^{k+1}dx\right)C_n^k = \int_1^2 x\left(\sum_{k=0}^{n}x^kC_n^k\right)dx = \int_1^2 x(x+1)^n dx$$

Đặt t = x +1 thì dx = dt

$$S = \int_2^3 (t-1)t^n dt = \frac{3^{n+2}-2^{n+2}}{n+2} - \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$$

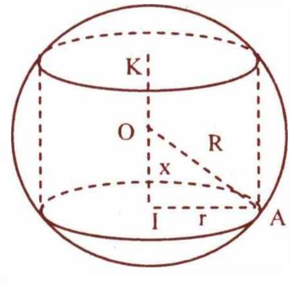
Câu 7. Gọi x là khoảng cách từ tâm hình cầu O đến đáy hình trụ: OI = x.

Đáy hình trụ là đường tròn có bán kính: $r = \sqrt{R^2-x^2}$, 0 < x < R

Diện tích xung quanh hình trụ là:

$S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2-x^2} = 4\pi\sqrt{x^2(R^2-x^2)}$

$\le 4\pi.\dfrac{x^2+(R^2-x^2)}{2}=2\pi R^2$.

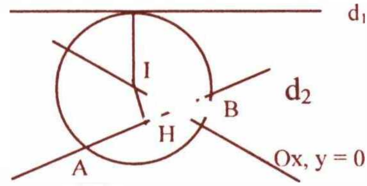


Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2=R^2-x^2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hình trụ có chiều cao $h=2x=R\sqrt{2}$ là hình trụ cần tìm.

Câu 8. Gọi I(t; 0) và R là bán kính đường tròn (C) cần tìm. Hạ $IH\perp d_2$ $\Rightarrow$ H là trung điểm AB



Ta có:

$$\begin{cases}d(I;d_1)=R\\ d(I,d_2)=IH\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2t-8|=R\sqrt{5}\\ |t-4|=IH\sqrt{5}\end{cases}$$

nên $IH=\dfrac{R}{2}$. Do đó $S_{\Delta IAB}=5\sqrt{3}\Leftrightarrow IH.HA=5\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{R}{2}\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=5\sqrt{3}\Leftrightarrow R=2\sqrt{5}$$

Do đó $|2t-8|=10\Leftrightarrow t-4=\pm5\Leftrightarrow t=9$ hay $t=-1$.

Vậy (C): $(x-9)^2+y^2=20$ hay $(x+1)^2+y^2=20$.

Câu 9. Hệ phương trình $\begin{cases}x^4+2x^2y=3\\ x^2+y^2+y=3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+2x^2y+y^2+x^2+y=6\\ x^2+y+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y)^2+(x^2+y)-6=0\\ x^2+y+y^2=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+y=2\\ x^2+y=-3\end{array}\right.\\ x^2+y+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y=2\\ y^2=1\end{cases}\ (1)\text{ hoặc }\begin{cases}x^2+y=-3\\ y^2=6\end{cases}\ (2)$$

Ta có hệ (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1,\ y=1\\ x=\pm\sqrt{3},\ y=-1\end{array}\right.$ và hệ (2) vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm (1; 1), (−1; 1), ($\sqrt{3}$; −1), ($-\sqrt{3}$; −1).

Câu 10 Ta có $P=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{b}\right)^2}+\dfrac{4}{3\left(1+\dfrac{a}{c}\right)^3}$

Đặt $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$ thì x, y, z dương thỏa mãn xyz = 1 và

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^2}$$

Ta chứng minh $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$

Thật vậy, bất đẳng thức $\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Áp dụng thì ta có:

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^2} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3}$$

Xét hàm số $f(z) = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{4}{(1+z)^4} = \frac{(z-1)(z+3)}{(1+z)^4}$

$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘	$\frac{2}{3}$	↗	

Suy ra $P \geq \frac{2}{3}$.Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$, khi $a = b = c$.

ĐỀ SỐ 53

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:
$y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đường thẳng d: $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3(m-1)x^2 - 3mx + 2$ (1) tại ba điểm phân biệt A(1;0), B, C và OB = OC.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính gọn số phức: $z = \frac{1}{(1+i)(4-3i)} + \frac{-5+6i}{4+3i}$.

b) Giải phương trình: $x.2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

Câu 5. (1 điểm) Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1; –1) vuông góc và cắt đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right)\tan 2x = 2\sqrt{2}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau, bé hơn 10 000 được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

Câu 7. (1 điểm) Tứ diện ABCD có AB = 6, CD = 8, các cạnh còn lại đều bằng $\sqrt{74}$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD có $\widehat{ABC} = 120^o$, biết các đỉnh B và D thuộc đường thẳng d_1: x – 2 = 0, A thuộc d_2: x + y – 4 = 0 và C thuộc d_3: 3x – y – 2 = 0.

Câu 10. (1 điểm) Cho 4 số dương a, b, c, d có tổng a + b +c + d = 4.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} > x - 2$.

Chứng minh: $\left(\dfrac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\dfrac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\dfrac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\dfrac{d}{d+2}\right)^3 \geq \dfrac{4}{27}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R.** Hàm số chẵn

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

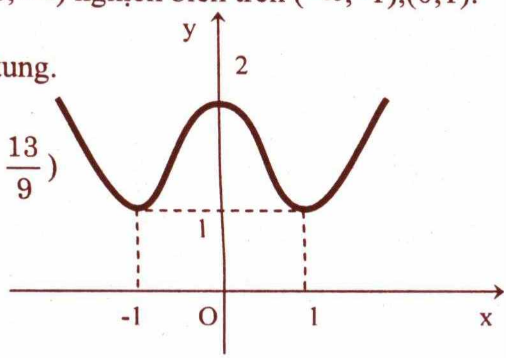
Hàm số đồng biến trên (–1; 0), (1;+∞) nghịch biến trên (–∞;–1),(0;1).

Hàm số có CĐ (0; 2); CT(±1; 1)

• Đồ thị: đối xứng nhau qua trục tung.

$y'' = 12x^2 - 4$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Điểm uốn $I\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{13}{9}\right)$



Câu 2.

PTHĐGĐ của đồ thị (1) và đường thẳng d: $y = x - 1$:

$$x^3 + 3(m-1)x^2 - (3m+1)x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + (3m-2)x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (3m-2)x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Vì $x^2 + (3m-2)x - 3 = 0$ có $P < 0$ nên d cắt đồ thị (1) tại điểm phân biệt khi $f(1) = 3m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{4}{3}$.

Ta có: $B(x_B; x_B - 1)$, $C(x_C; x_C - 1)$, $x_B + x_C = 2 - 3m$, $x_B \neq x_C$

Do đó O cách đều B, C

$\Leftrightarrow OB^2 = OC^2 \Leftrightarrow 2(x_B - x_C)(x_B + x_C - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow x_B + x_C = 1$

$\Leftrightarrow 2 - 3m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$. Vậy $m = \dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

a) Ta có $\dfrac{1}{(1+i)(4-3i)} = \dfrac{(1-i)(4+3i)}{(1+1).(16+9)} = \dfrac{7}{50} - \dfrac{1}{50}i$

và $\dfrac{-5+6i}{4+3i} = \dfrac{(-5+6i)(4-3i)}{25} = -\dfrac{2}{25} + \dfrac{39}{25}i$

Do đó $z = \dfrac{1}{(1+i)(4-3i)} + \dfrac{-5+6i}{4+3i} = \dfrac{3}{50} + \dfrac{77}{50}i$.

b) Phương trình: $x.2^x - x(3-x) - 2.2^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x(x-2) + (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2^x + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ hoặc $2^x + x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 1$.

(Vì $f(x) = 2^x + x$ đồng biến trên **R** và $f(0) = 1$).

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$, $x = 2$.

Câu 4. Ta có $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = \int_2^3 (3+\ln x)d\left(\frac{-1}{x+1}\right) = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$

$$= -\frac{3+\ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\left(3 + \ln\frac{27}{16}\right).$$

Câu 5. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (-4; 1; 4)$. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ thì $H(1-4t; t; -1+4t)$.

Ta có $\overline{MH} = (1-4t; t-1; 4t)$ nên $MH \perp \Delta$

$\Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\overline{MH} = 0 \Leftrightarrow -4(1-4t) + 1(t-1) + 4(4t) = 0.$

$\Leftrightarrow 33t = 5 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{33}$. Do đó $H\left(\dfrac{13}{33}; \dfrac{5}{33}; \dfrac{-13}{33}\right)$

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{13}{33}; \frac{-28}{33}; \frac{20}{33}\right)$ hay (13; –28; 20).

Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x \neq k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{4}$

PT $\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} . \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} . \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - \sin x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

So sánh điều kiện, vậy nghiệm: $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) Số tự nhiên a < 10000 nên có tối đa 4 chữ số

Xét a có 1 chữ số: $a \in \{0,1,2,3,4\}$ nên có 5 số

Xét a có 2 chữ số: $a_1 \neq 0$ nên có 4.5 = 20 số

Xét a có 3 chữ số: tương tự thì có 4.5.5 = 100 số

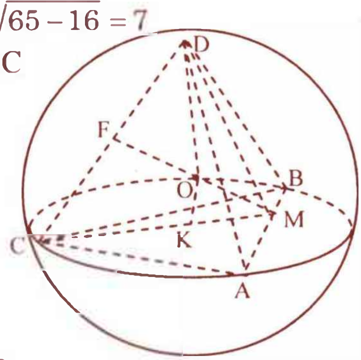
Xét a có 4 chữ số: tương tự thì có 4.5.5.5 = 500 số

Lưu ý rằng các chữ số chọn không nhất thiết phân biệt.

Vậy tổng cộng có: 5 + 20 + 100 + 500 = 625 số

Câu 7. Gọi M, F thứ tự là trung điểm của AB, CD và K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó K thuộc CM. Hạ KO ⊥ FM thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, R = OD.

Ta có $CM = DM = \sqrt{74-9} = \sqrt{65}$ Và $MF = \sqrt{65-16} = 7$



Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có $R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow CK = R = \frac{37}{\sqrt{65}}$.

Các tam giác đồng dạng OKM và CFM suy ra $\frac{OM}{MK} = \frac{CM}{MF}$

$\Rightarrow OM = \frac{MK.CM}{MF} = \frac{(CM - R)CM}{MF} = \frac{28}{7} = 4$

Do đó OF = 3. Suy ra $R = OD = \sqrt{OF^2 + FD^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 100\pi$

Câu 8. Đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BD nênAC: y = m. Gọi

A(4 – m; m), $C\left(\frac{m+2}{3};m\right)$ thì giao điểm của hai đường chéo I(2; m). Vì

I là trung điểm của AC nên $4 - m + \frac{m+2}{3} = 4 \Rightarrow m = 1$.

Suy ra A(3; 1), C(1; 1), I(2; 1)
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều.

$IB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}.\frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra hai điểm

$B\left(2;1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(2;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $B\left(2;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(2;1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Câu 9. Điều kiện $x \geq 1$. Ta nhân lượng liên hợp $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} > 0$.

BPT $\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}) > (x-2)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 4(x-1) - (x+2) > (x-2)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 3(x-2) > (x-2)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$

Xét các trường hợp sau:

Nếu $1 \leq x < 2$: BPT $\Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow 9 < 4(x-1) + x + 2 + 4\sqrt{(x-1)(x+2)}$

$\Leftrightarrow 11 - 5x < 4\sqrt{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow 121 - 110x + 25x^2 < 16x^2 + 16x - 32$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 17 < 0 \Leftrightarrow 7 - 4\sqrt{2} < x < 7 + 4\sqrt{2}$

Chọn nghiệm $7 - 4\sqrt{2} < x < 2$

Nếu x = 2 thì 0 > 0: loại. Nếu x > 2 thì BPT $\Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

Vì x > 2 nên VT $> 2\sqrt{1} + \sqrt{3} > 3$: vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình $7 - 4\sqrt{2} < x < 2$.

Câu 10. Vì a, b, c, d dương có tổng a + b +c + d = 4 nên 0 < a,b,c, d < 4.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^3}$ trên D = (0;4)

Tiếp tuyến tại x = 1 là $y = \frac{2x-1}{27}$

Với 0 < x < 4, ta có $\frac{x^3}{(x+2)^3} \geq \frac{2x-1}{27} \Leftrightarrow 27x^3) \geq (2x-1)(x+2)^3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 6x - 4) \geq 0$: đúng với mọi x thuộc (0;4).

Do đó $\left(\frac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\frac{d}{d+2}\right)^3$

$= f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$

$\geq \frac{2a-1}{27} + \frac{2b-1}{27} + \frac{2c-1}{27} + \frac{2d-1}{27} = \frac{2(a+b+c+d)-4}{27} = \frac{4}{27}$

Vậy $\left(\frac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\frac{d}{d+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}$

Dấu bằng khi a = b =c = d = 1.

ĐỀ SỐ 54

Câu 1. (1 điểm)Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

Câu 2. (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$, biết khoảng cách từ giao điểm I của hai đường tiệm cận của (C) đến tiếp tuyến bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $8z^4 + 8z^3 = z + 1$ và biểu diễn tập nghiệm đó.

b) Giải phương trình: $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^{\pi/2} e^{3x}\sin 5x.dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(–2; 6; 3), B(1; 0; 6) và C(0; 2; –1). Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với đường thẳng BC và tìm toạ độ tiếp điểm của chúng.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính gọn $S = 8(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$.

b) Trong khai triển:

$P(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + ... + x^{100})$, tính tổng tất cả hệ số và tính tổng tất cả hệ số của các luỹ thừa lẻ của x.

Câu 7. (1 điểm) Cho tứ diện SABC và G là trọng tâm của tứ diện. Một mp(α) quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N. Gọi V là thể tích tứ diện SABC, V_1 là thể tích tứ diện SAMN.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{4}{9} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{1}{2}$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng (Δ) thay đổi có phương trình tổng quát ax + by + c = 0 thoả điều kiện $25a^2 + 9b^2 = c^2$. Chứng minh tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến (Δ) không đổi.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\dfrac{3}{2} \\ y+2(x-2)\sqrt{x+2}=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực không âm phân biệt. Chứng minh rằng: $\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{y+z}{(y-z)^2}+\dfrac{z+x}{(z-x)^2} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$
- Sự biến thiên:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right] = \pm\infty$$

$y' = 3x^2 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \dfrac{4}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$+\infty$

Hàm số f tăng trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(\frac{4}{3};+\infty)$; giảm trên $(0; \frac{4}{3})$. Hàm số đạt cực đai tại $x = 0$, $y(0) = 1$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{4}{3}$, $y(\dfrac{4}{3}) = -\dfrac{5}{27}$.

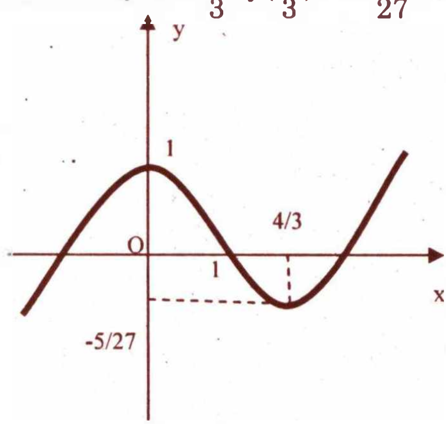
- Đồ thị :(C) cắt Oy tại (0; 1)

$y = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hay $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$y'' = 6x - 4$ nên $y'' = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ do đó đồ thị đối xứng nhau qua điểm uốn $I(\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{27})$.



Câu 2.

- Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang: $y = 1$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x = -1$

Nên giao điểm I(–1;1).

Ta có: $y' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0.$

Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) thì $y_0 = \dfrac{x_0 - 3}{x_0 + 1}$, $x_0 \neq -1$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ tại M là:

$$y = \frac{4}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 3}{x_0 + 1}$$

$\Leftrightarrow 4x - (x_0 + 1)^2 y + (x_0^2 - 6x_0 - 3) = 0.$

Theo đề: $d(I, \Delta) = 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|-4 - (x_0+1)^2 + (x_0^2 - 6x_0 - 3)\right|}{\sqrt{16 + (x_0+1)^4}} = 2\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^4 - 8(x_0 + 1)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 1$ hoặc $x_0 = -3$

Với $x_0 = 1$, phương trình Δ: $y = x - 2$;

Với $x_0 = -3$, phương trình Δ': $y = x + 6$.

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến Δ: $y = x - 2$; Δ': $y = x + 6$.

Câu 3.

a) Ta có $8z^4 + 8z^3 = z + 1 \Leftrightarrow (z + 1)(8z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (z + 1)(2z - 1)(4z^2 + 2z + 1) = 0$

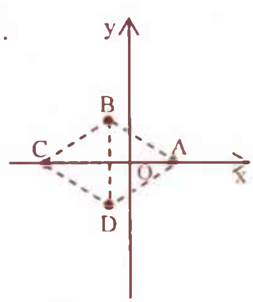
$\Leftrightarrow (z + 1)(2z - 1) = 0$ hay $4z^2 + 2z + 1 = 0$

Nghiệm của $z + 1 = 0$ là $z_1 = -1$, nghiệm của $2z - 1 = 0$ là $z_2 = \dfrac{1}{2}$.

Nghiệm của $4z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2z + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0.$

là $z_3 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ và $z_4 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm được biểu diễn bởi 4 điểm A, B, C, D tạo thành hình thoi ABCD.



b) Điều kiện: $x > 1$, phương trình: $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$.

$$\Leftrightarrow \log_{2^2}\log_2 x + \log_2\log_{2^2} x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\frac{1}{2} + \log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2\log_2 x = 3.$$

$\Leftrightarrow \log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (chọn).

Vậy nghiệm phương trình x =16.

Câu 4.

Ta có $I = \int_0^{\pi/2} e^{3x}\sin 5x.dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2} e^{3x}\cos 5xdx$

Đặt $u = e^{3x}$, dv = cos5xdx. Khi đó du = $3e^{3x}$, $v = \frac{1}{5}\sin 5x$.

$$\int_0^{\pi/2} e^{3x}\cos 5xdx = \left(e^{3x}\frac{1}{5}\sin 5x\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{5}.I \Rightarrow I = \frac{3.e^{\frac{3\pi}{2}}+5}{34}.$$

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-6;3)$ và $\overrightarrow{AC} = (2;-4;-4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (36;18;0) \Rightarrow S_{ABC} = 18\sqrt{5}$ và $BC = 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow R = d(A; BC) = 2\sqrt{30}$

PT mặt cầu: $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 120$

Gọi H(x; y; z) là tiếp điểm, ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -7)$

$\overrightarrow{AH} = (x + 2; y - 6; z - 3) \perp \overrightarrow{BC}$

và $\overrightarrow{BH} = (x - 1; y; z - 6)$ cùng phương $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+7z=7 \\ 2x+y=2 \\ 7y+2z=12 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

Câu 6.

a) $S = 8(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$

$= 8(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$.

$= 8\cos 2\alpha(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$

$= \cos 2\alpha - 4\cos 2\alpha\sin^2 2\alpha - \cos(4\alpha + 2\alpha)$

$= \cos 2\alpha - 2\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \cos 4\alpha\cos 2\alpha + \sin 4\alpha\sin 2\alpha$

$= \cos 2\alpha - (\cos 4\alpha\cos 2\alpha + \sin 4\alpha\sin 2\alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0$.

b) Đa thức P(x) sau khi khai triển, rút gọn được dạng

$P(x) = a_0 + a_1 + ... + a_k x^k + ... + . a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$

Ta có: $P(1) = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n$

$P(-1) = a_0 - a_1 + - ... + (-1)^{n-1}. a_{n-1} + (-1)^n. a_n$

nên $P(1) + P(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2m} + ...)$

và $P(1) - P(-1) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2m+1} + ...)$

Do đó sau khi khai triển đa thức thì:

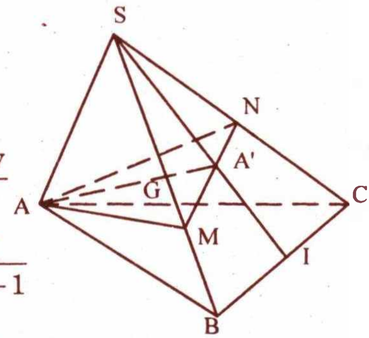
Tổng các hệ số bằng P(1) = (1 + 1 +... + 1)(1 − 1 + 1 − 1 +.. + 1) = 101.

Tổng các hệ số theo luỹ thừa lẻ bằng $\frac{P(1)-P(-1)}{2}=0$. hay cách khác, vì $P(x)=P(-x)$: hàm số chẵn nên tổng các hệ số của các luỹ thừa lẻ của x bằng 0.

Câu 7. Gọi A' là trọng tâm ΔSBC, I là trung điểm BC.

Ta có A,G, A' thẳng hàng, S, A', I thẳng hàng

Đặt $\frac{SM}{SB}=x$, $\frac{SN}{SC}=y$, với $0\le x, y\le 1$.



Ta có: $\frac{V_1}{V}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=xy$

Mặt khác: $\frac{S_{SMA'}}{S_{SIB}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SA'}{SI}\Rightarrow\frac{S_{SMA'}}{S_{SCB}}=\frac{2x}{3}$

Tương tự: $\frac{S_{SNA'}}{S_{SCB}}=\frac{2y}{3}\Rightarrow\frac{S_{SMA'}+S_{SNA}}{S_{SCB}}=\frac{x+y}{3}$

Hay $\frac{S_{SMN}}{S_{SCB}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=xy=\frac{x+y}{3}\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$

Kết hợp ta có điều kiện $\frac{1}{2}\le x\le 1$, $\frac{1}{2}\le y\le 1$

Ta có: $\frac{V_1}{V}=xy=\frac{x^2}{3x-1}$. Xét $f(x)=\frac{x^2}{3x-1}$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{4}{9}$	↗	$\frac{1}{2}$

Vậy ta có bất đẳng thức: $\frac{4}{9}\le\frac{V_1}{V}\le\frac{1}{2}$.

Câu 8. Phương trình tổng quát Δ: $ax+by+c=0$ thoả điều kiện: $25a^2+9b^2=c^2$.

Ta có $c^2=25-9=16\Leftrightarrow c=4$ $(c>0)$

Suy ra: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$

Nên: $d(F_1, d)=\frac{|-4a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d(F_2, d)=\frac{|4a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Tích 2 khoảng cách cần tìm là

$$d(F_1, d).\,d(F_2, d)=\frac{|-4a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|4a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c^2-16a^2|}{a^2+b^2}=9.$$

Vậy tích 2 khoảng cách cần tìm là 9 không đổi.

Câu 9. Điều kiện: $x, y\ge -2$.

Đặt u = $\sqrt{x+2}$, v = $\sqrt{y+2}$ (u, v $\geq$ 0)

Hệ $\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\dfrac{3}{2} \\ y+2(x-2)\sqrt{x+2}=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v=\dfrac{7}{2} \\ v^2+2u^3-8u=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Thay $v = u^2 - \dfrac{7}{2}$ vào phương trình thứ hai

$$u^4 + 2u^3 - 7u^2 - 8u + 12 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u+3)(u^2-4) = 0$$

Thử lại điều kiện, chọn u = 2; $v = \dfrac{1}{2}$

Suy ra nghiệm của hệ $(x; y) = \left(2; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Câu 10. Bất đẳng thức: $\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{y+z}{(y-z)^2}+\dfrac{z+x}{(z-x)^2} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{y+z}{(y-z)^2}+\frac{z+x}{(z-x^2}\right) \geq 9$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x > y > z \geq 0$.

Đặt $f(z) = (x+y+z)\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{y+z}{(y-z)^2}+\dfrac{z+x}{(z-x)^2}\right)$, $z \geq 0$ thì f '(z) >0 nên f đồng biến.

Do đó $f(z) \geq f(0) = (x+y)\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$

$$= (x+y)^2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{xy}\right)$$

$$= (x+y)^2\left(\frac{1}{(x+y)^2-4xy}+\frac{1}{xy}\right)$$

$$(x+y)^2\left(\frac{1}{(x+y)^2-4xy}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\right) \geq (x+y)^2\frac{9}{(x+y)^2} = 9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z=0 \\ (x+y)^2-4xy=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x^2-4xy+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=(2\pm\sqrt{3})y \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 55

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x}{x-1}$

Câu 2. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(t) = \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)}$ với $t > 0$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z-1)(\bar{z}+i)$ là số thực.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2-xy+y^2} = 16 \\ \log_4(x^2+y^2) = \dfrac{1}{2} + \log_4(xy) \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_1^2 \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, xét đường thẳng Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): $mx + y - mz - 1 = 0$ và (α'): $x - my + z - m = 0$. Chứng minh góc giữa Δ_m và trục Oz không đổi.; hoảng cách giữa Δ_m và Oz không đổi.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tìm nghiệm $x \in [0; \pi]$ của phương trình:

$2\cos4x - (\sqrt{3} - 2)\cos2x = \sin2x + \sqrt{3}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm bốn chữ số sao cho mỗi chữ số đứng sau lớn hơn các chữ số đứng trước nó.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.Chứng minh rằng ABCD là tứ diện đều và các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB: $x - 2y - 1 = 0$,đường chéo BD: $x - 7y + 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho biết rằng đường chéo AC qua điểm M(2; 1).

Câu 9. (1 điểm) Tìm m để phương trình:

$\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{3+2x-x^2} = 2m$ có nghiệm.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x| + \left|1 + \dfrac{2}{x-1}\right|$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R** \ {1}.

• Sự biến thiên:

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$

Do đó đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 2$ nên đường thẳng y = 2 là tiệm cận ngang của đồ thị.

Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \neq 1.$

Bảng biến thiên

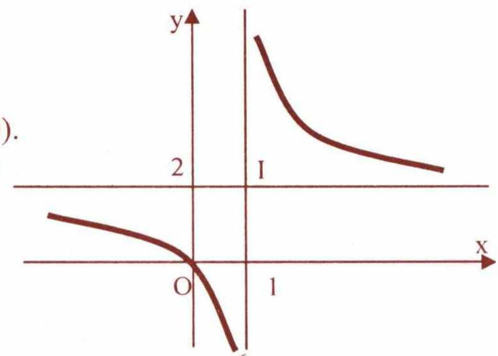
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

• Đồ thị:

Đồ thị (C) cắt Ox,Oy tại gốc O(0;0).

(C) nhận giao điểm I(1;2) hai tiệm cận làm tâm đối xứng.



Câu 2.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2 - t + 2\sqrt{1+t}}{6(t+4)^2.\sqrt{1+t}}$,

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+t} = t - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 \geq 0 \\ 4(1+t) = (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 8.$

Bảng biến thiên:

t	0		8		$+\infty$
f'		+	0	+	
f	0 ↗		$\frac{1}{18}$	↘	0

Vậy $\max f = f(8) = \dfrac{1}{18}$.

Câu 3.

a) Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$.

Ta có $(z-1)(\overline{z}+i) = (x - 1 + yi)(x - (y-1)i)$

$= x(x-1) + y(y-1) + (x + y - 1)i$

Suy ra $(z-1)(\overline{z}+i)$ là số thực $\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

Nên ta có $|z - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Do đó x = 1, y = 0 hoặc x = −1, y = 2.Vậy z = 1, z = −1 + 2i.

b) Điều kiện xy > 0.

Hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2 - xy + y^2} = 16 \\ \log_4(x^2 + y^2) = \dfrac{1}{2} + \log_4(xy) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 4 \\ \log_4(x^2 + y^2) = \log_4 2 + \log_4(xy) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 4 \\ \log_4(x^2 + y^2) = \log_4(2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (2; 2), (–2; –2).

Câu 4. Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-1}{t^2}dt$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, khi $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Ta có $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = -\int_1^{1/2} t\sqrt{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^{1/2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}d(1+t^2) = -\frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - 2\sqrt{2}\right)$

Câu 5. Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng với các vectơ pháp tuyến là

$\overrightarrow{n_1} = (m; 1; -m)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1; -m; 1)$.

Do đó Δ_m có vectơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{u_m} = [(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (1 - m^2; -2m; -1 - m^2)$.

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$.

Nếu gọi φ_m là góc giữa hai đường thẳng Δ_m và Oz thì:

$$\cos\phi_m = \frac{|\overrightarrow{u_m}.\overrightarrow{k}|}{|\overrightarrow{u_m}|.|\overrightarrow{k}|} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + 4m^2 + (1 + m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\varphi_m = 45^o$: không đổi.

Điểm M(x; y; z) thuộc Δ_m khi toạ độ của M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \end{cases}$$

Khử z từ hệ phương trình, ta được phương trình:

$2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0$.

Đây là phương trình của mặt phẳng (α_m) chứa Δ_m và song song với trục Oz. Do đó, khoảng cách giữa Δ_m và Oz bằng khoảng cách từ gốc O(0; 0; 0) thuộc Oz tới mp(α_m).

Vậy khoảng cách đó bằng: $d_m = \frac{|-1 - m^2|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{m^4 + 2m^2 + 1}} = 1$

: không đổi.

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình lượng giác đã cho

$$2(\cos 4x + \cos 2x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\cos 3x - \sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn các nghiệm $x \in [0, \pi]$ của PT là: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{11\pi}{12}; \frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}\right\}$.

b) Giả sử số thỏa mãn bài toán là $\overline{abcd}$ với d chẵn là $1 \le a < b < c < d$. Suy ra $d \ge 4$.

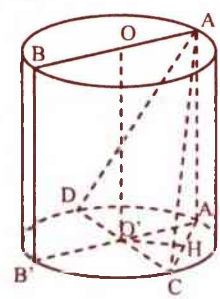
Xét d = 4. Để lập được $\overline{abc}$ thỏa mãn $1 \le a < b < c < 4$ ta chọn được một cách a = 1, b = 2, c = 3.

Xét d = 6. Khi đó chọn bộ (a, b, c) từ {1, 2, 3, 4, 5} nên số cách lập $\overline{abc}$ là $C_5^3 = 10$.

Xét d = 8. Khi đó chọn bộ (a, b, c) từ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} nên số cách lập $\overline{abc}$ là $C_7^3 = 35$.

Vậy số các số thỏa mãn là 1 + 10 + 35 = 46.

Câu 7. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, thì A, B thuộc đường tròn này.



Khi đó $A'B' \perp CD$ nên A'CB'D là hình vuông có đường chéo CD = 2R, do đó $A'C = R\sqrt{2}$, ngoài ra $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra AC = 2R.

Tương tự ta có AD = BC = BD = 2R.

Vậy ABCD là tứ diện đều.

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB và CD, H trung điểm A'C.

Ta có: d(OO'; AC) = d(OO', (AA'C)) = OH' = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự, khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO' đều bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra các đường thẳng AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ có trục là OO' và có bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Đường thẳng AC đi qua M(2;1) có phương trình

$\Leftrightarrow a(x-2)+b(y-1)=0\ (a^2+b^2\neq 0)$

Ta có: cos(AB, AC) = cos(AB, BD)

$\Leftrightarrow \dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{15}{5\sqrt{2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2(a-2b)^2=9(a^2+b^2) \Leftrightarrow 7a^2+8ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(7a+b)=0.$

Với $a+b=0$, chọn $a=1$, $b=-1$.

Phương trình đường thẳng AC' là AC: $x-y-1=0$.

Từ đó ta tìm được A(1;0), B(11;5), C(6;5), D(–4;0)

Với $7a+b=0$, chọn $a=1$, $b=-7$.

Phương trình đường thẳng AC là AC: $x-7y+5=0$.

Đường thẳng này song song với BD (loại).

Vậy đường thẳng cần tìm là AC: $x-y-1=0$.

Câu 9. Phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{3+2x-x^2}=2m$.

Điều kiện $-1\leq x\leq 3$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$, $x\in[1;3]$

$$t'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}.\sqrt{3-x}},\ x\in(-1;3);$$

$$t'=0\Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<3\\ \sqrt{1+x}=\sqrt{3-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Ta có $t(-1)=t(3)=2$; $t(1)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[-1;3]} t=2\sqrt{2};\ \min\limits_{x\in[-1;3]} t=2 \Rightarrow 2\leq t\leq 2\sqrt{2},\ \forall x\in[-1;3]$

Với $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$, $x\in[-1;3]$, ta có:

$$t^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow t^2=4+2\sqrt{3+2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]\\ t+\dfrac{t^2-4}{2}=2m\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]\\ t^2+2t-4=4m\quad (*)\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t-4$, $t\in[2;2\sqrt{2}]$;

$f'(t)=2t+2>0,\ \forall t\in[2;2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in[2,2\sqrt{2}]} f(t)=f(2)=4;\ \max\limits_{t\in[2,2\sqrt{2}]} f(t)=f(2\sqrt{2})=4(1+\sqrt{2})$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm $t\in[2;2\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow 4 \le 4m \le 4(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow 1 \le m \le 1 + \sqrt{2}$

Vậy giá trị cần tìm là $1 \le m \le 1 + \sqrt{2}$.

Câu 10. Hàm số $y = |x| + \left|1 + \dfrac{2}{x-1}\right|$.

Tập xác định D = **R** \ {1}.

Khi $x < -1$ hoặc $1 < x$ thì $|x| > 1 \Rightarrow y > 1$

Khi $0 < x < 1$ thì $\left|1 + \dfrac{2x}{1-x}\right| = 1 + \dfrac{2x}{1-x} > 1 \Rightarrow y > 1$

Khi $-1 \le x \le 0$ thì $y = \dfrac{x^2+1}{1-x} \Rightarrow y' = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

Mặt khác: $y(-1) = 1$; $y(0) = 1$; $y(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2 < 1$

Vậy: $\min\limits_{x \in D} y = y(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.

ĐỀ SỐ 56

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 2. (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số:

$y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ biết tiếp tuyến này đi qua gốc toạ độ.

Câu 3. (1 điểm)

a) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình: $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^2 = -1$.

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 + z_1^2\right)\left(1 + z_2^2\right)$.

b) Tìm tham số m để bất phương trình có nghiệm với mọi x:

$1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(mx^2 + 4x + m)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng quanh trục Oy, giới hạn bởi: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Câu 5. (1 điểm) Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P) $3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) và toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho ABC là tam giác đều.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính 3 góc của tam giác ABC biết bán kính đường tròn ngoại tiếp R, nội tiếp r thỏa mãn: $\sin^3\dfrac{A}{2} + \sin^3\dfrac{B}{2} + \sin^3\dfrac{C}{2} = \dfrac{3r}{4R}$.

b) Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập $X = \{x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 - 12x + 11 \le 0\}$. Tính xác suất để ba số được chọn ra có tổng là một số chẵn.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 45°. Tính thể tích hình chóp S.ABCD và tính tang của góc giữa mặt bên và đáy.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là I(–6; 0), đường trung tuyến AM: $13x - 6y - 2 = 0$ và đường cao AH: $x - 2y - 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x-2y} + \sqrt{4x+y} = 5 \\ 2x + \dfrac{2y^2}{x} = 5y \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$|a-b| + |b-c| + |c-a| + 3\sqrt[3]{abc} = 1$. Chứng minh: $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \le \frac{1}{3}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 3$

- Tập xác định: D = **R**, hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

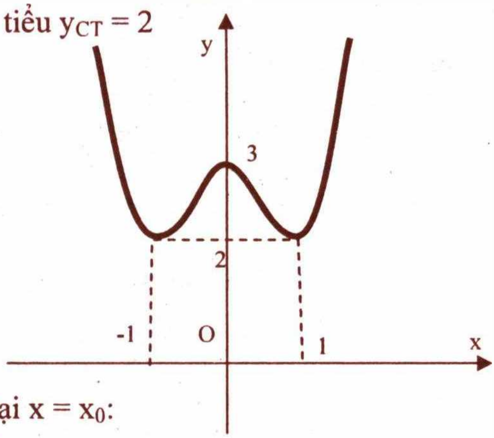
Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 0, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$

- Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 4$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hai điểm uốn $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{22}{9})$.

Đồ thị đối xứng nhau qua Oy.



Câu 2.

Tập xác định: D = **R**

$y' = x^2 - 4x + 3$

Phương trình tiếp tuyến tổng quát tại $x = x_0$:

Δ: $y = (x_0^2 - 4x_0 + 3)(x - x_0) + \frac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0$

Tiếp tuyến qua gốc khi: $0 = (x_0^2 - 4x_o + 3)(-x_o) + \frac{1}{3}x_o^3 - 2x_o^2 + 3x_o$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow x_o = 0 \text{ hoặc } x_o = 3.$$

Với $x_o = 0$ thì có tiếp tuyến là $y = 3x$

Với $x_o = 3$ thì có tiếp tuyến là $y = 0$.

Câu 3.

a) Từ giả thiết: $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow \frac{z-1}{2z-i} = i$ hoặc $\frac{z-1}{2z-i} = -i$

$\Leftrightarrow z_1 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ hoặc $z_2 = 0$ Suy ra: $P = (1 + z_1^2)(1 + z_2^2) = \frac{13}{25} + \frac{16}{25}i$.

b) Bất phương trình: $\log_5 5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$ (hàm đồng biến)

$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2 - 4x - m + 5 \geq 0 & (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (2) \end{cases}$

Ta tìm m để hệ thoả mãn với mọi x

Xét $m = 5$ thì (1): $-4x \geq 0, \forall x$: loại

Xét $m = 0$ thì (2): $4x > 0, \forall x$: loại

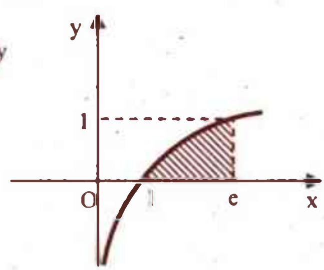
Xét $m \neq 5, m \neq 0$ thì điều kiện

$$\begin{cases} \Delta_1' < 0, \ 5 - m > 0 \\ \Delta_2 < 0, \ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (5+m)^2 \leq 0, m < 5 \\ 4 - m^2 < 0, \quad m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3$$

Vậy giá trị cần tìm là $2 < m \leq 3$.

Câu 4. Cho $x = e \Rightarrow y = \ln x = 1$, $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

Dựa vào đồ thị, thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng quanh trục Oy, giới hạn bởi: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.



$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 \left(e^2 - e^{2y}\right)dy$$

$$= \pi\left(e^2.y - \frac{1}{2}e^{2y}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(e^2 + 1\right) \text{ (đvtt).}$$

Câu 5. Gọi $I(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 0; 2)$, $\overrightarrow{AI} = (x; y; z + 13)$

Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ hay

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Mặt khác $I \in (P) \Rightarrow 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

Ta có $AB = 2\sqrt{2}$, gọi điểm $C(x; y; z)$ thì

$$\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải ra có hai điểm: $C(2; -2; -3)$, $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 6.

a) Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ nên

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{S}{p}}{R} = \frac{abc}{4R^2p} = \frac{abc}{2R^2(a+b+c)}$$

$$= \frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \geq 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

do đó dấu bằng xảy ra nên tam giác ABC đều.

Vậy 3 góc $A = B = C = 60^0$.

b) Ta có: $x^2 - 12 + 11 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 11 \Rightarrow X = \{1; 2; 3; ...; 11\}$.

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 số trong 11 số là C_{11}^3.

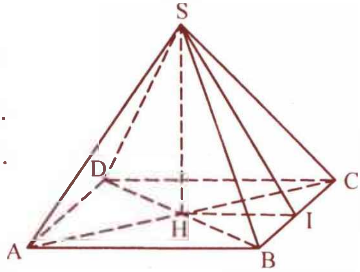
Số cách chọn 3 số có tổng là số chẵn: hoặc 3 số chẵn hoặc một số chẵn và 2 số lẻ là $C_5^3 + C_5^1C_6^2$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{C_5^3 + C_5^1C_6^2}{C_{11}^3} = \dfrac{85}{165} = \dfrac{17}{33}$.

Câu 7. Hình chóp đều nên hình chiếu của S lên đáy là tâm H của hình vuông ABCD.

Tam giác vuông SAH có góc $A = 45^o$ nên là tam giác vuông cân tại H.

Do đó $SH = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Thể tích $V = \frac{1}{3}S_đ.h = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Gọi I là trung điểm của BC thì SI, HI $\perp$ BC.

Do đó $\widehat{SIH} = \alpha$ là góc giữa mặt bên và đáy.

Tam giác vuông SIH:

$$\tan\alpha = \frac{SH}{HI} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{2}.$$

Câu 8. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - 14 = 0 \\ 13x - 6y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases} \text{ nên } A(-4;-9).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua I thì A'(–8; 9) nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi K là trực tâm của tam giác ABC.

Tứ giác BKCA' có hai cặp cạnh đối diện song song nên là hình bình hành nên KA' và BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

Ta có K thuộc AH nên K(2k + 14; k), M thuộc AM nên $M\left(m; \frac{13m-2}{6}\right)$

Vì M là trung điểm của KA' nên $\begin{cases} 2k + 14 - 8 = 2.m \\ k + 9 = 2.\frac{13m-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = 2 \end{cases}$

nên K(12;–1), M(2;4).

Đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT nên BC:

$2x + y - 8 = 0$. Ta có B(b; 8 – 2b).

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên:

$IA = IB \Leftrightarrow 4 + 81 = (b + 6)^2 + (2b - 8)^2$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Với b = 3 ta có B(3; 2) và suy ra C(1; 6)

Với b = 1 ta có B(1; 6) và suy ra C(3; 2).

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x - 2y} + \sqrt{4x + y} = 5 \\ 2x + \frac{2y^2}{x} = 5y \end{cases}$

Điều kiện: $3x - 2y \geq 0$, $y \geq 0$; $x \neq 0$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ thành:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ x = 2y \end{array}\right.$$

Với $y = 2x \Rightarrow 4x + y = 6x \geq 0 \Rightarrow 3x - 2y = -x < 0$: loại.

Với x = 2y. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, giải thì được nghiệm của hệ là (2; 1).

Câu 10. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Từ giả thiết ta có $1 = a - b + b - c + a - c + 3\sqrt[3]{abc} = 2a - 2c + 3\sqrt[3]{abc}$

$\geq 2a - 2c + 3c \geq a + b - 2c + 3c = a + b + c$.

Do đó ta có: $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.\sqrt{ac} + \sqrt{bc}.\sqrt{ba} + \sqrt{ca}.\sqrt{cb}$

$$\leq ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 57

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 - 6x + 2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm hàm số y có đồ thị đối xứng với đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{x-4}{x+1}$ qua tiệm cận đứng của (C).

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải hệ phương trình nghiệm phức: $\begin{cases} z_1 z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i \end{cases}$.

b) Giải phương trình: $\log_2[3\log_2(3x - 1) - 1] = x$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết A (a;0;0), B (–a;0;0), C(0;1;0), $B_1(-a;0;b)$, $a > 0$, $b > 0$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1.

Nếu a + b = 4, tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $3\tan3x + \cot2x = 2\tan x + \frac{2}{\sin 4x}$.

b) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có SA = SB = SC = 2a, AB = 3a, $BC = a\sqrt{3}$ $(a > 0)$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm N(7; 3) và cắt (C) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho đoạn NE = 3NF.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x}(3\sqrt{y}+2) = 8 \\ \sqrt{x}(y\sqrt{y}-2) = 6 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**.

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

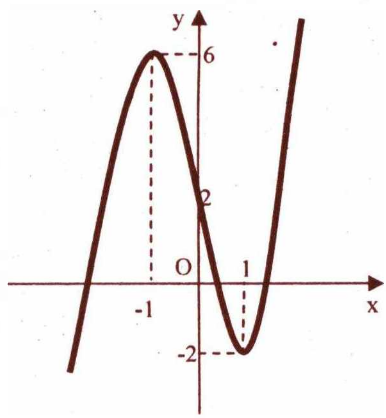
Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & 6 & \searrow & -2 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = -2$

• Đồ thị: $y'' = 12x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên điểm uốn I(0;2) là tâm đối xứng.



Câu 2.

Tập xác định: D = **R** \ {−1}.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$

$\Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = -1$

Nếu M(x; y) là điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số đã cho và điểm M'(x'; y') đối xứng với M qua đường thẳng $x = -1$,thì ta có $x + x' = -2$ và $y = y'$.

Từ đó ta suy ra $x = -2 - x'$ và $y = y'$.

Thay các giá trị này vào $y = \dfrac{x-4}{x+1}$ ta được $y' = \dfrac{-2-x'-4}{-2-x'+1} \Rightarrow y' = \dfrac{x'+6}{x'+1}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{x+6}{x+1}$.

Câu 3.

a) Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2$

nên: $-5 + 2i = (z_1 + z_2)^2 - 2(-5-5i)$

suy ra $(z_1 + z_2)^2 = -15 - 8i = (1-4i)^2$

Do đó $z_1 + z_2 = 1 - 4i$ hoặc $z_1 + z_2 = -1 + 4i$

Nên $z_2 = -z_1 + 1 - 4i$ hoặc $z_2 = -z_1 - 1 + 4i$

z_2 là các nghiệm phương trình

$z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$ hoặc: $z^2 + (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$

Lập biệt thức Δ_1, Δ_2 từ đó giải được 4 nghiệm (z_1, z_2):

$(2-i, -1-3i), (-1-3i, 2-i), (-2+i, 1+3i), (1+3i, -2+i)$.

b) Điều kiện: $3x - 1 > 0$, $3\log_2(3x - 1) > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$.

Đặt $y = \log_2(3x - 1)$ thì PT: $\log_2[3\log_2(3x - 1) - 1] = x$

ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x = \log_2(3y-1) \\ y = \log_2(3x-1) \end{cases}$

Do đó $\log_2(3x - 1) + x = \log_2(3y - 1) + y$ (*)

Xét $f(t) = \log_2(3t - 1) + t$, $t > \dfrac{1}{3}$ thì $f'(t) = \dfrac{3}{(3t-1)\ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t > \dfrac{1}{3}$

nên f là hàm đồng biến, do đó phương trình (*):

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x = \log_2(3x - 1)$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 2^x \Leftrightarrow 2^x - 3x + 1 = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 3x - 1$, $x > \dfrac{1}{3}$

Ta có $g'(x) = 2^x.\ln 2 - 3$, $g''(x) = 2^x.\ln^2 2 > 0$ nên g' đồng biến trên D. Do đó $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm, mà $g(1) = g(3) = 0$ nên suy ra tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Câu 4. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x(x+1)} = t^2 - (2x+1) \Rightarrow x = \left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)^2$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 1 + \sqrt{2}$

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(t-1)(t^2+1)}{2t^3}dt = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^3 - t^2 + t + 1}{2t^3}dt$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2 - t^{-3}}\right)dt = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$.

Câu 5. Ta có: $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = (0; 0; b)$

nên $C_1(0; 1; b)$, $\overline{B_1C} = (a; 1; -b)$, $\overline{AC_1} = (-a; 1; b)$, $\overline{AB_1} = (-2a; 0; b)$

và $[\overline{B_1C}, \overline{AC_1}] = (2b; 0; 2a)$

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right].\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$d(B_1C; AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a+b}{2} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = 2. Vậy khoảng cách giữa B_1C và AC_1 lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi a = b = 2.

Câu 6.

a) Điều kiện: $\cos 3x \ne 0$, $\sin 4x \ne 0$

Phương trình đã cho biến đổi như sau:

$$3\tan 3x = 2\tan x + \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x \sin 2x} \Leftrightarrow 3\tan 3x = \tan 2x + 2\tan x$$

$$\Leftrightarrow (\tan 3x - \tan 2x) + 2(\tan 3x - \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos 3x}\left(\frac{1}{\cos 2x} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos 2x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) Giả sử số lập được là $x = \overline{abcde}$, a, b, c, d, e bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 và đôi một khác nhau.

– Xét số tận cùng e = 0

Ghép các chữ số 1, 2, 3 đứng liền nhau, có 3! = 6 cách.

Chọn thêm một chữ số từ (4, 5, 6) có 3 cách. Sắp xếp bộ 1, 2, 3 và số vừa chọn có 2! cách. Suy ra trường hợp này có 6.3.2 = 36 số.

– Xét số tận cùng e = 5

Ghép các chữ số 1, 2, 3 đứng liền nhau, có 3! = 6 cách.

Chọn thêm một chữ số từ {0, 4, 6}:

Số được chọn là 0, khi đó d = 0 nên có 6 số; còn số được chọn là 4 hoặc 6, khi đó số các số là 6.2.2! = 24 nên có 6 + 24 = 30 số.

Vậy có 36 + 30 = 66 số.

Câu 7. Kẻ $SH \perp AC$. Do SA = SC nên H là trung điểm AC (1)

Vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA = HB = HC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABC vuông tại B có H là tâm đường tròn ngoại tiếp

Do đó $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = a$.

SH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, trong mặt phẳng (SAC) đường trung trực của SA cắt SH tại O là tâm mặt cầu.

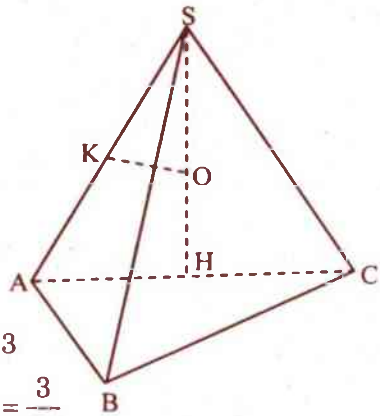
Gọi K là trung điểm SA.

Khi đó hai tam giác vuông SOK và SAH đồng dạng nên $\frac{SO}{SA} = \frac{SK}{SH}$.

Suy ra bán kính mặt cầu:

$$R = SO = \frac{SK.SA}{SH} = 2a.$$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.



Câu 8. (C) có tâm $I(1; -1)$ và $R = 5$.

Ta có $NE.NF = IN^2 - R^2 = 27$

$\Rightarrow NF = 3$ và $NE = 9$.

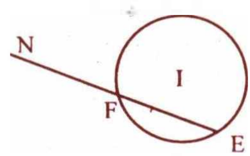
Gọi $F(a; b)$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(a-7)^2 + (b-3)^2 = 9\\ a^2 + b^2 - 2a + 2b - 23 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, b = 3\\ a = \frac{76}{13}, b = \frac{3}{13}\end{array}\right.$$

Với $a = 4, b = 3 \Rightarrow F(4; 3)$

$\Rightarrow (\Delta): y - 3 = 0.$

Với $a = \frac{76}{13}, b = \frac{3}{13} \Rightarrow F\left(\frac{76}{13}; \frac{3}{13}\right)$



$\Rightarrow (\Delta): 12x - 5y - 69 = 0.$

Vậy có 2 đường thẳng $(\Delta): y - 3 = 0$; $(\Delta): 12x - 5y - 69 = 0$.

Câu 9. Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, $(u > 0, v > 0)$

Hệ $\begin{cases}x\sqrt{x}(3\sqrt{y} + 2) = 8\\ \sqrt{x}(y\sqrt{y} - 2) = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3(3v + 2) = 8\\ u(v^3 - 2) = 6\end{cases}$

Đặt $t = \frac{1}{u}(t > 0 \Rightarrow \begin{cases}8t^3 = 3v + 2\\ v^3 = 6t + 2\end{cases} \Rightarrow (2t - v)(4t^2 + 2tv + v^2) = -3(2t - v)$

$\Leftrightarrow (2t - v)\left(\underbrace{4t^2 + 2tv + v^2}_{\geq 0} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow v = 2t$

Suy ra: $4t^3 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -\frac{1}{2}$ (loại)

$\Rightarrow u = 1, v = 2 \Rightarrow x = 1, y = 4.$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(1; 4)$.

Câu 10. Đặt $f(a, b, c) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc$

$\Rightarrow f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$\text{Min}\{b, c\} \leq a \leq \max\{b, c\} \Rightarrow 0 \leq a \leq 2$

Ta có $f(a, b, c) - f(a, \sqrt{b^2 + c^2}, 0) = c(a - b)(c - c) \leq 0$

Do đó $f(a, b, c) \leq f(a, \sqrt{b^2 + c^2}, 0) = 6a - a^3, 0 \leq a \leq 2$

Xét $g(a) = 6a - a^3$, $a \in [0; 2]$, $g'(x) = 6 - 3a^2$

Lập BBT$\Rightarrow$ maxP = max g(a) = g($\sqrt{2}$) = $4\sqrt{2}$.

Dấu bằng khi (a, b, c) $\in \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}); (\sqrt{2}, 2, 0); (0, \sqrt{2}, 0);$

$(0, \sqrt{2}, 2); (2, 0, \sqrt{2})\}$.

ĐỀ SỐ 58

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm) Xác định m để hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ đạt hai cực trị tại x_1, x_2 sao cho: $|x_1 - x_2| \le 2$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z để cho: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm:

$$(\sqrt{5}+1)^x + 2m(\sqrt{5}-1)^x = 2^x.$$

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \int_0^{\pi/4} x\tan^2 x\,dx$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.
Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm ở trên d và tiếp xúc với hai mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz).

Câu 6. (1 điểm)

a) Không dùng máy tính, tính: $T = \sin 6^\circ.\sin 42^\circ.\sin 66^\circ.\sin 78^\circ$.

b) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt. Tính xác suất để trong số đó có mặt chữ số 1 và chữ số 3.

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng (P) cho dường tròn (C) tâm O đường kính AB = 2R. Lấy một điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O sao cho $OS = R\sqrt{3}$. I là điểm thuộc đoạn SO với $SI = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, M là điểm thuộc (C). Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SM}$ với H là hình chiếu của I lên SM và xác định vị trí của M trên (C) để cho tứ diện HAMB có thể tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AA': $2x - y + 1 = 0$, trung tuyến BM: $y + 3 = 0$, đường trung trực của AB là Δ: $x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x} + \dfrac{4+\sqrt{y}}{4-y} + \dfrac{4+\sqrt{z}}{4-z} \ge 5$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- Sự biến thiên:

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$

Do đó đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

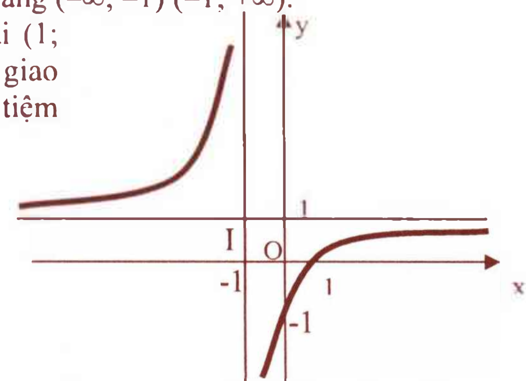
$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \ne -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ $(-1; +\infty)$.

- Đồ thị: Đồ thị (C) cắt Ox tại (1; 0), cắt Oy tại (0; –1), và nhận giao điểm I(–1; 1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại hai điểm x_1, x_2 có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m > -1 + \sqrt{3}$ hoặc $m < -1 - \sqrt{3}$ (1)

Mặt khác theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$; $x_1x_2 = 3$.

Khi đó: $|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có giá trị m cần tìm là:

$-3 \le m < -1 - \sqrt{3}$; $-1 + \sqrt{3} < m \le 1$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, ta có:

$z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 + 3.2iy = x^2 + y^2 + 6yi$

Do đó: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy số phức $z = \dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$ hoặc $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

b) Phương trình: $(\sqrt{5} + 1)^x + 2m(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x + 2m\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = 1$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$, đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$, $t > 0$

PT: $t + \dfrac{2m}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t + 2m = 0$

Xét $t = 0 \Rightarrow m = 0$ thì PT: $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = 1$: thoả mãn

Xét $t \neq 0$, điều kiện có nghiệm $t > 0$: $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $0 < t_1 \leq t_2$

$\Leftrightarrow P < 0$ hoặc $(\Delta \geq 0, P > 0, S > 0) \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m = \dfrac{1}{8}$

Vậy có nghiệm: $m \leq 0$ hoặc $m = \dfrac{1}{8}$.

Cách khác: Xét hàm số và lập bảng biến thiên

Câu 4. Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x\tan^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi/4} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x} - \int_0^{\pi/4} xdx$$

$$= \int_0^{\pi/4} xd(\tan x) - \int_0^{\pi/4} xdx = x\tan x\Big|_x^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan xdx - \frac{x^2}{2}\Big|_x^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

Câu5. Gọi I là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) cần tìm, $I \in d$ nên $I(t - 3; t; 2t)$.

Ta có $d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz))$

$\Leftrightarrow |2t| = |t - 3| \Leftrightarrow t = -3$ hay $t = 1$.

Khi $t = -3 \Rightarrow I(-6; -3; -6)$, $R = 6$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S): $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 + (z + 6)^2 = 36$

Khi $t = 1 \Rightarrow I(-2; 1; 2)$, $R = 2$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Vậy có 2 mặt cầu (S): $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 + (z + 6)^2 = 36$ và

$$(S): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Câu 6.

a) Ta có: $\sin 42^o = \cos 48^o$, $\sin 66^o = \cos 24^o$, $\sin 78^0 = \cos 12^o$ nên:

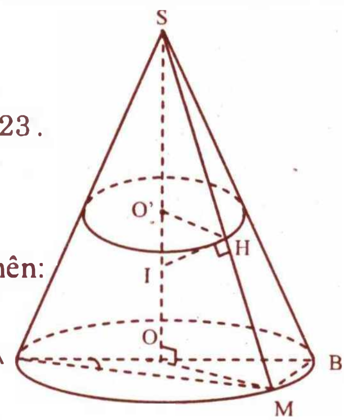
$$T.\cos 6^o = \sin 6^o \cos 6^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$$
$$= \frac{1}{2}\sin 12^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$$
$$= \frac{1}{4}\sin 24^o \cos 24^o \cos 48^o = \frac{1}{8}\sin 48^o \cos 48^o$$
$$= \frac{1}{16}\sin 96^o = \frac{1}{16}\cos 6^o \Rightarrow T = \frac{1}{16}.$$

b) Ta có số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt là $A_{10}^5 - A_9^4 = 27216$.

Để lập số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt trong đó có mặt chữ số 1 và chữ số 3 ta thực hiện như sau: lấy ra 3 số trong tập 8 chữ số {0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9} cùng với chữ số 1 và 3 rồi sắp xếp 5 chữ số đó theo thứ tự, và số đầu tiên khác chữ số 0.

Do đó có $C_8^3.5! - C_7^2.4! = 6216$ số.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{6216}{27216} = \dfrac{37}{162} \approx 0,23$.



Câu 7. Ta có $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}.R\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$

Tứ giác OMHI nội tiếp trong một đường tròn nên:
SH.SM =SI.SO.

Suy ra $\dfrac{SH}{SM} = \dfrac{SI.SO}{SM^2} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}.R\sqrt{3} : SM^2 = \dfrac{2R^2}{SM^2}$

Mà $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 3R^2 + R^2 = 4R^2$

Vậy $\dfrac{SH}{SM} = \dfrac{SI.SO}{SM^2} = \dfrac{2R^2}{SM^2} = \dfrac{1}{2}$.

Gọi V là thể tích của tứ diện HAMB thì: $V = \dfrac{1}{3}.S_{AMB}.\ OO'$.

Trong đó OO' là khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) và

$OO' = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ nên: V_{HAMB} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{AMB} lớn nhất

$\Leftrightarrow$ khoảng cách từ M đến AB lớn nhất.

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của cung AB.

Vậy giá trị lớn nhất của V là: $V_{max} = \dfrac{1}{6}.2R.R\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 8. Vì $A \in AA' \Rightarrow A(a; 2a + 1)$.

Vì điểm $B \in BM \Rightarrow B(b; -3)$.

Gọi N là trung điểm của AB thì $N\left(\frac{a+b}{2};a-1\right)$

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1)$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\\ N\in\Delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b-a)-(-4-2a)=0\\ \frac{a+b}{2}+(a-1)+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-5\end{cases}$

Từ đó suy ra A(1; 3), B(–5; –3).
Đường thẳng BC có phương trình $x + 2y + 11 = 0$.
Do đó C(–2c – 11; c).
Vì điểm $M \in BM \Rightarrow M(m; -3)$

Ta có M là trung điểm của AC nên $\begin{cases}1-2c-11=2m\\ 3+c=-6\end{cases}$

$\Rightarrow c=-9 \Rightarrow C)(7; -9)$.
Đường cao vẽ từ B có phương trình $x - 2y - 1 = 0$.

Trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y+1=0\\ x-2y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

Vậy trực tâm H(–1; –1).

Câu 9. Điều kiện: $x, y \geq -1$, $xy \geq 0$

Phương trình thứ nhất: $\sqrt{xy}=x+y-3$

Đặt $t=\sqrt{xy}=x+y-3$ $(t\geq 0)$.

Bình phương hai vế phương trình thứ hai:

$$x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=14$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+t+4}=11-t \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq t\leq 11\\ 4(t^2+t+4)=(11-t)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0\leq t\leq 11\\ 3t^2+26t-105=0\end{cases} \Leftrightarrow t=3$ Do đó $\begin{cases}x+y=6\\ xy=9\end{cases} \Leftrightarrow x=y=3$.

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = (3; 3).

Câu 10. Ta có:

$$VT=2\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\right)+\frac{2+\sqrt{x}}{4-x}+\frac{2+\sqrt{y}}{4-y}+\frac{2+\sqrt{z}}{4-z}$$

$$=2\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{y}}+\frac{1}{2-\sqrt{z}}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\frac{1}{4-x}+\frac{4-x}{9}\right)+\left(\frac{1}{4-y}+\frac{4-y}{9}\right)+\left(\frac{1}{4-z}+\frac{4-y}{9}\right)\geq 2$$

Suy ra: $\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\geq 2-\left(\frac{4-x}{9}+\frac{4-y}{9}+\frac{4-z}{9}\right)=1$

Ta có $2\sqrt{a}\leq a+1$ nên:

$$\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{y}}+\frac{1}{2-\sqrt{z}}=\frac{1}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x}}}+\frac{1}{2-\frac{2y}{2\sqrt{y}}}+\frac{1}{2-\frac{2z}{2\sqrt{z}}}$$

$$\geq\frac{1}{2-\frac{2x}{1+x}}+\frac{1}{2-\frac{2y}{1+y}}+\frac{1}{2-\frac{2z}{1+z}}=\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{z+1}{2}=3$$

Từ đó suy ra đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

ĐỀ SỐ 59

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=x^4+2x^2+1$.

Câu 2. (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đồ thị (C) của hàm số: $y=\frac{2x-3}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến (Δ) đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho số phức $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Tính $P=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^3+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)^4+\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)^5$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}=\frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I=\int_1^2\frac{8x^7+2}{x(1+x^7)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng Δ_1: $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+9}{6}$, Δ_2: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $1+\sin x+\sin 2x=\cos 3x$.

b) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển: $P(x) = (x + 1)^2.(3-x)^{10}$.

Câu 7. (1 điểm) Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC vuông tại A với C(–3; 0), B(7; 0), bán kính $r = 2\sqrt{10} - 5$ và tâm đường tròn nội tiếp J có tung độ dương.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 6y} = y + 3 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z ≠ 0 và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{1}{y^2z^2} + \dfrac{1}{z^2x^2}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

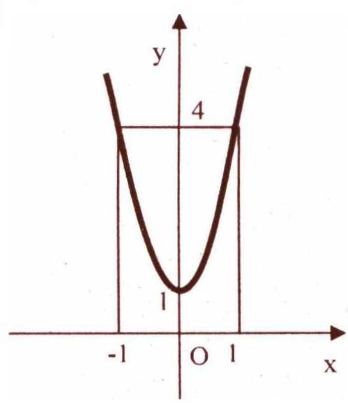
- Tập xác định: D = **R,** hàm số chẵn.
- Sự biến thiên:

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 4x(x^2 + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y(0) = 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–		+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến $(-\infty; 0)$

Hàm số đạt cực trị tại x = 0, $y_{CT} = 1$

- Đồ thị: cắt trục tung tại (0; 1) và đối xứng nhau qua Oy.

Câu 2.

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

Nên I(1; 2) là tâm đối xứng của (C).

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) tại $M(x_o; y_o) \in (C)$ là

$$(\Delta): y = \frac{1}{(x_o - 1)^2}(x - x_o) + 2 - \frac{1}{x_o - 1}$$

Hay $(\Delta): x - (x_o - 1)^2 y + 2x_o^2 - 6x_o + 3 = 0$

Khoảng cách từ I đến (Δ) là:

$$d = \frac{2|x_o - 1|}{\sqrt{1+(x_o-1)^4}} \le \frac{2|x_o - 1|}{\sqrt{2(x_o-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $|x_o - 1| = 1 \Leftrightarrow x_o = 0; x_o = 2$.

Vậy: (Δ): $y = x + 3$ hoặc (Δ): $y = x - 1$.

Câu 3.

a) Ta có $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ nên $2z + 1 = \sqrt{3}i \Rightarrow (2z+1)^2 = -3$

$$\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = -1.$$

Do đó $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = -1$$

Vậy $P = (-1)^2 + (-1)^3 + 2^4 + (-1)^5 = 15$.

b) Phương trình: $\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$.

Hai vế đều dương, lôgarit hoá hai vế theo cơ số 5:

$$(x-1)\log_5\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\log_5\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3x-4}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(\log_5 3 - 1) - \log_5 3 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_5 3 = \frac{3}{4}x - 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4\log_5 3 - 7}{4}\right) = \frac{-4 + \log_5 3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2(\log_5 3 - 4)}{4\log_5 3 - 7}.$$

Vậy tập nghiệm là $S = \left\{\frac{2(\log_5 3 - 4)}{4\log_5 3 - 7}\right\}$.

Câu 4. Ta có $I = \int_1^2 \frac{8x^7+2}{x(1+x^7)}dx$

$$= \int_1^2 \frac{8x^7+1+1}{x(1+x^7)}dx = \int_1^2 \frac{8x^7+1}{x^8+x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^7)}dx$$

$$= \ln\left(x^8+x\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x^6}{x^7(1+x^7)}dx = \ln 129 + \frac{1}{7}\int_1^2 \frac{d(x^7)}{x^7(1+x^7)}$$

$$= \ln 129 + \frac{1}{7}\ln\frac{x^7}{1+x^7}\Big|_1^2 = \ln 129 + \frac{1}{7}\ln\frac{256}{129}$$

Câu 5. Δ_2 qua A(1; 3; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + t; t; -9 + 6t)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2-t; 3-t; 8-6t)$, $[\overrightarrow{MA}, \vec{u}] = (8t - 14; 20-14t; t-4)$

$\Rightarrow |[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến Δ_2:

$$d(M; \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

Khoảng cách từ M đến (P):

$$d(M, (P)) = \frac{|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t - 20|}{3}.$$

Ta có $d(M, \Delta_2) = d(M, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \dfrac{|11t - 20|}{3}$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \dfrac{53}{35}$

Với $t = 1 \Rightarrow M(0; 1; -3)$, $t = \dfrac{53}{35} \Rightarrow M\left(\dfrac{18}{35}; \dfrac{53}{35}; \dfrac{3}{35}\right)$.

Câu 6.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$1 - \cos 3x + \sin x + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Xét: $\sin\dfrac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k2\pi}{3}$

$$\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy nghiệm $x = \dfrac{k2\pi}{3}$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $P(x) = (x^2 + 2x + 1)(3 - x)^{10}$

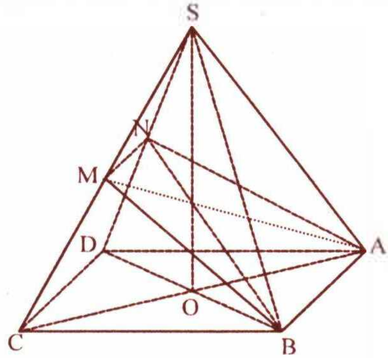
$= x^2(3 - x)^{10} + 2x(3-x)^{10} + (3-x)^{10}$

$$=x^2\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i.3^{10-i}(-x)^i+2x\sum_{j=0}^{10}C_{10}^j.3^{10-j}(-x)^j+\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.3^{10-k}.(-x)^k$$

Hệ số theo x^3 ứng với i = 1, j = 2, k = 3 là:

$$-C_{10}^1.3^9+2.C_{10}^2.3^8-C_{10}^3.3^7=131\,220\quad.$$

Câu 7. Vẽ MN // CD (N ∈ SD) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp(ABM).



Ta có: $\dfrac{V_{S.ANB}}{V_{S.ADB}}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ANB}=\dfrac{1}{2}V_{S.ADB}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$

Ta có: $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.BMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.BCD}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}.$

Do đó: $V_{S.ABMN}=V_{S.ANB}+V_{S.BMN}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}.$

Vậy tỉ số thể tích: $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMN.ABCD}}=\dfrac{3}{5}.$

Câu 8. Gọi $(x_0; y_0)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Để ý rằng B, C nằm trên trục Ox và $y_0>0$ nên ta có:

$y_0=r=2\sqrt{10}-5$ (1)

Mặt khác, góc BJC = $180^0-\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}\right)=180^0-\dfrac{90^0}{2}=135^0$

$\overrightarrow{BJ}=(x_0-7;y_0)$; $\overrightarrow{CJ}=(x_0+3;y_0)$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{CJ}=x_0^2-4x_0-21+y_0^2$ (2)

$\overrightarrow{BC}=(-10;0)\Rightarrow BC=10$

$\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{CJ}=BJ.CJ.\cos135^0=-BJ.CJ.\sin135^0=-2S_{JBC}$

$=-r.BC=-10r$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$x_0{}^2-4x_0-21+(2\sqrt{10}-5)^2=-10(2\sqrt{10}-5)$

$\Leftrightarrow\ x_0^2-4x_0-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2+\sqrt{10}\\x_0=2-\sqrt{10}\end{array}\right.$

Do đó có hai điểm J thoả mãn bài toán $J_1(2+\sqrt{10};2\sqrt{10}-5)$ và $J_2(2-\sqrt{10};2\sqrt{10}-5)$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC thoả mãn đề bài là:

(C_1): $(x-2-\sqrt{10})^2+(y-2\sqrt{10}+5)^2=(2\sqrt{10}-5)^2$

$(C_2): (x - 2 + \sqrt{10})^2 + (y - 2\sqrt{10} + 5)^2 = (2\sqrt{10} - 5)^2.$

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 6y} = y + 3 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ x^2 + 6y = (y + 3)^2 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ (x + y)(x - y) = 9 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x + y}$, $v = \sqrt{x - y}$ $(u, v \geq 0)$ ta được: $\begin{cases} u^2v^2 = 9 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ u + v = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x + y} = 3 \\ \sqrt{x - y} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x + y} = 1 \\ \sqrt{x - y} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $y \geq -3$, hệ đã cho có nghiệm duy nhất (x, y) là $(5;4)$.

Câu 10. Nhận xét: Với a, b, c dương tùy ý theo bất đẳng thức Côsi thì có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$. Dấu bằng khi $a = b = c$.

Đặt $t = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$

Áp dụng nhận xét, ta có

$$P = \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2} \geq \frac{1}{1 - 2t} + \frac{9}{t}$$

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{1}{1 - 2t} + \frac{9}{t}$ với $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$

suy ra $\min P = \min f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 30.$

ĐỀ SỐ 60

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 2. (1 điểm) Cho hai điểm A(0; −16) và B(−1; −8). Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số: $y = x^4 + 2x^2 - 4$ sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho z là số phức thỏa mãn $(1 - z)(i + \overline{z})$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $T = |z - i|$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - 2xy + y - 2x + 2 = 0 \\ 2\log_2(2x - y) + 3\log_2(y + 1) = 4 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM; tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Câu 6. (1 điểm)

a) Các góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$ Tính góc C.

b) Tính tổng: $T = \dfrac{1}{1.2}.C_n^0 + \dfrac{1}{2.3}.C_n^1 + \dfrac{1}{3.4}.C_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}.C_n^n$.

Câu 7 (1 điểm) Cho điểm M trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt mặt đối diện tại A', B',C' D' tương ứng. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $T = \dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'} + \dfrac{MD}{MD'}$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B($-\sqrt{3}$; 0), C($\sqrt{3}$; 0), góc giữa hai đường thẳng BC và AB bằng 30^o, góc giữa hai đường thẳng BC và CA bằng 60^o. Tìm tọa độ đỉnh A biết hoành độ A bé hơn 1.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{x} \geq \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z, t, s là các số thực thay đổi, thoả mãn: $0 < x \leq y \leq z \leq t \leq s$ và $x + y + z + t + s = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x(yz + ys + zt + ts) + zt(y + s - x)$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) • Tập xác định: D = **R**.

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$.

Bảng biến thiên:

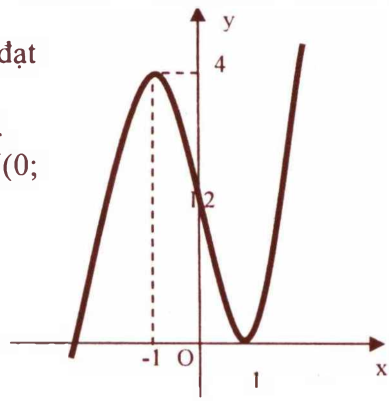
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 0$.

• Đồ thị: Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0; 2).

$y'' = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên điểm uốn I(0; 2) là tâm đối xứng.



Câu 2. Gọi $M(a; a^4 + 2a^2 - 4)$ thuộc (C).

Phương trình AB: $8x + y + 16 = 0$

Ta có $d(M; (AB)) = \dfrac{|a^4 + 2a^2 + 8a + 12|}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow S_{MAB} = \dfrac{1}{2}|a^4 + 2a^2 + 8a + 12| = \dfrac{1}{2}|(a^2 - 1)^2 + 4(a + 1)^2 + 7| \geq \dfrac{7}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = -1$.

Vậy min $S_{MAB} = \dfrac{7}{2}$ khi $a = -1 \Rightarrow M(-1; -1)$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{Z})$.

Ta có:

$(1 - z)(i + \bar{z}) = ((1 - x) - yi)(x - (y - 1)i)$

$= (1 - x)x - y(y - 1) - ((1 - x)(y - 1) + yx)i$

nên $(1 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo $\Leftrightarrow (1 - x)x - y(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2})$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi A(0;1) thì $T = |z - i| = AM$.

Đường tròn (C) cắt Oy tại A(0;1) và cắt Ox tại B(1;0), vì AB là đường kính nên $T = |z - i| = AM$ bé nhất khi $M \equiv A \Leftrightarrow z = i$.

$T = |z - i| = AM$ lớn nhất khi $M \equiv B \Leftrightarrow z = 1$.

Cách khác: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\alpha \\ \sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$

Nên $T^2 = |z - i|^2 = |x + (y + 1)i|^2 = x^2 + (y - 1)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha - \cos\alpha) = 1 + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Điều kiện: $2x > y > -1$

Hệ $\begin{cases} y^2 - 2xy + y - 2x + 2 = 0 \\ 2\log_2(2x - y) + 3\log_2(y + 1) = 4 \end{cases}$

Biến đổi hệ: $\begin{cases} (y - 2x)(y + 1) = -2 \\ (y - 2x)^2(y + 1)^3 = 16 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} (y - 2x)^2(y + 1)^2 = 4 \\ (y - 2x)^2(y + 1)^3 = 16 \end{cases}$ suy ra $y + 1 = 4$ nên $y = 3$.

Giải tiếp trên ta được nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{7}{4}; 3\right)$.

Câu 4. Ta có: $\frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

Từ đó $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{4}$.

Câu 5. Ta có C(–2; 0; 0), D(0; –1; 0), M(–1; 0; $\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

$\cos(SA.BM) = \left|\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM})\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SA, BM) = 30^0$

Ta có: $[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$

nên $d(SA, BM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vì MN // AB, CD nên N trung điểm SD $\Rightarrow N(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SN} = (0; -\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$

và $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$. Ta có:

$$V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SB}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy: $S_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$.

Câu 6.

a) Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

nên $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$= 2\cos\frac{A+B}{2} = 2(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2})$

Do đó $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(2\cos\frac{C}{2} - 1) = 0$

Vì $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} > 0$ nên $\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^0$.

b) Ta có số hạng tổng quát

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \frac{1}{k+2}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$$

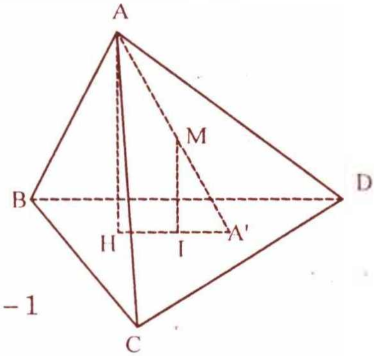
Áp dụng thì có:

$$T = \frac{1}{1.2}.C_n^0 + \frac{1}{2.3}.C_n^1 + \frac{1}{3.4}.C_n^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.C_n^n$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{n+2}^{n+2}) = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}.$$

Câu 7. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, M lên mặt phẳng (BCD). Ta có H, I, A' thẳng hàng.

Gọi V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của tứ diện ABCD và 4 hình chóp đỉnh M với các đáy là các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Ta có:



$$\frac{AA'}{MA'}=\frac{AH}{MI}=\frac{\frac{1}{3}AH.S_{BCD}}{\frac{1}{3}MI.S_{BCD}}=\frac{V}{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'}=\frac{V-V_1}{V_1}=\frac{V}{V_1}-1$$

Tương tự

$$\frac{MB}{MB'}=\frac{V}{V_2}-1,\ \frac{MC}{MC'}=\frac{V}{V_3}-1,\ \frac{MD}{MD'}=\frac{V}{V_4}-1$$

$$\Rightarrow T=V\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}+\frac{1}{V_3}+\frac{1}{V_4}\right)-4$$

$$=(V_1+V_2+V_3+V_4)\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}+\frac{1}{V_3}+\frac{1}{V_4}\right)-4 \quad \geq 16-4=12.$$

Vậy minT = 12 $\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tứ diện ABCD.

Câu 8. Gọi A(x; y) với x <1.

Khi đó $\overrightarrow{BA}=(x+\sqrt{3};y)$, $\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3};0)$, $\overrightarrow{CA}=(x-\sqrt{3};y)$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\left|\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\right|=\cos 30^0\\ \left|\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})\right|=\cos 60^0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left|2\sqrt{3}(x+\sqrt{3})\right|}{2\sqrt{3}\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\left|2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})\right|}{2\sqrt{3}\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+\sqrt{3})^2=3y^2\\ 3(x-\sqrt{3})^2=y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{3}\\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1\end{array}\right.\\ (x+\sqrt{3})^2=3y^2\end{cases}$$

Chọn $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có hai điểm $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 9. Điều kiện: x > 0.

Bất phương trình: $\sqrt{x}\geq\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{x} \geq \dfrac{(x+1)(x-1)^3}{x\left[(x-1)^2+1\right]} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x})^3}{x+1} \geq \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2+1}$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}, t \in \mathbf{R}$

Thì $f'(t) = \dfrac{t^4+3t^2}{(t^2+1)^2} \geq 0$ với mọi t do đó hàm f đồng biến trên **R.**

Bất phương trình: $f(\sqrt{x}) \geq f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq x-1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ x > 1, x \geq (x-1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ x > 1, x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{array}\right.$

Giải ra nghiệm bất phương trình: $0 < x \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 10. Từ giả thiết, suy ra $0 < x \leq \dfrac{1}{5}$.

Ta có $P = x[y(z+s) + t(z+s)] + zt(y+s-x)$

$\Rightarrow P = x(y+t)(z+s) + zt(y+s-x)$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$x(y+t)(z+s) \leq x\left(\dfrac{y+t+z+s}{2}\right)^2$$

$$zt(y+s-x) \leq \left(\dfrac{y+z+t+s-x}{3}\right)^3$$

Từ đó: $P \leq \dfrac{x(1-x)^2}{4} + \dfrac{(1-2x)^3}{27}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x(1-x)^2}{4} + \dfrac{(1-2x)^3}{27}$, $0 < x \leq \dfrac{1}{5}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{36}(-5x^2 - 4x + 1) \geq 0, \forall x \in (0; \dfrac{1}{5})$

Suy ra f(x) đồng biến trên $(0; \dfrac{1}{5}] \Rightarrow f(x) \leq f(\dfrac{1}{5}) = \dfrac{1}{25}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{25}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = t = s = \dfrac{1}{5}$.

****

MỤC LỤC

Công ti TNHH
AN PHA VN
50 Nguyễn Văn Săng
P.TSN, Q.Tân Phú
ĐT: 08.62676463

SÁCH CÓ BÁN TẠI

Tp. Hà Nội:

Công ti TNHH Trình Dậu
98 Lê Thanh Nghị
ĐT: 04.38680092

Công ti TNHH Quảng Lợi
32 Gia Ngư. ĐT: 04.38246605

Công ti TNHH Việt Kim Long
393 Vĩnh Hưng, Q.Hoàng Mai
ĐT: 04.36462755

Nhà sách Bình Thủy
67 Nguyễn Khoái, Q.HBT
ĐT: 04.39845439

Nhà sách Ngọc Hòa
54B Bà Triệu, Q.HK
ĐT: 04.38258410

Tp. Vinh

Nhà sách Công Yến
225 Lê Duẩn. ĐT: 3554777

Tp. Đà Nẵng

Công ti TNHH Bốn Phương
4 Lý Thái Tổ. ĐT: 3646596

Nhà sách Lam Châu
129 Phan Chu Trinh
ĐT: 0511.3821317

Khánh Hòa

Phát hành sách Khánh Hòa -
34 Thống Nhất - Nha Trang

Tp. Long Xuyên

Thư quán Long Xuyên
3/5 Tôn Đức Thắng.
ĐT: 0913.797.350

Tp.Hồ Chí Minh:

Công ti TNHH S-TBGD Đức Trí
10A - 10B Đinh Tiên Hoàng,
Q.1. ĐT: 08.38228300

Nhà sách 142 Trần Huy Liệu
ĐT: 08.38458295

Davibooks.vn (NS trực tuyến)

Và hệ thống các siêu thị sách của công ti **Phương Nam, Fahasa, Gia Lai CTC...** trên toàn quốc.

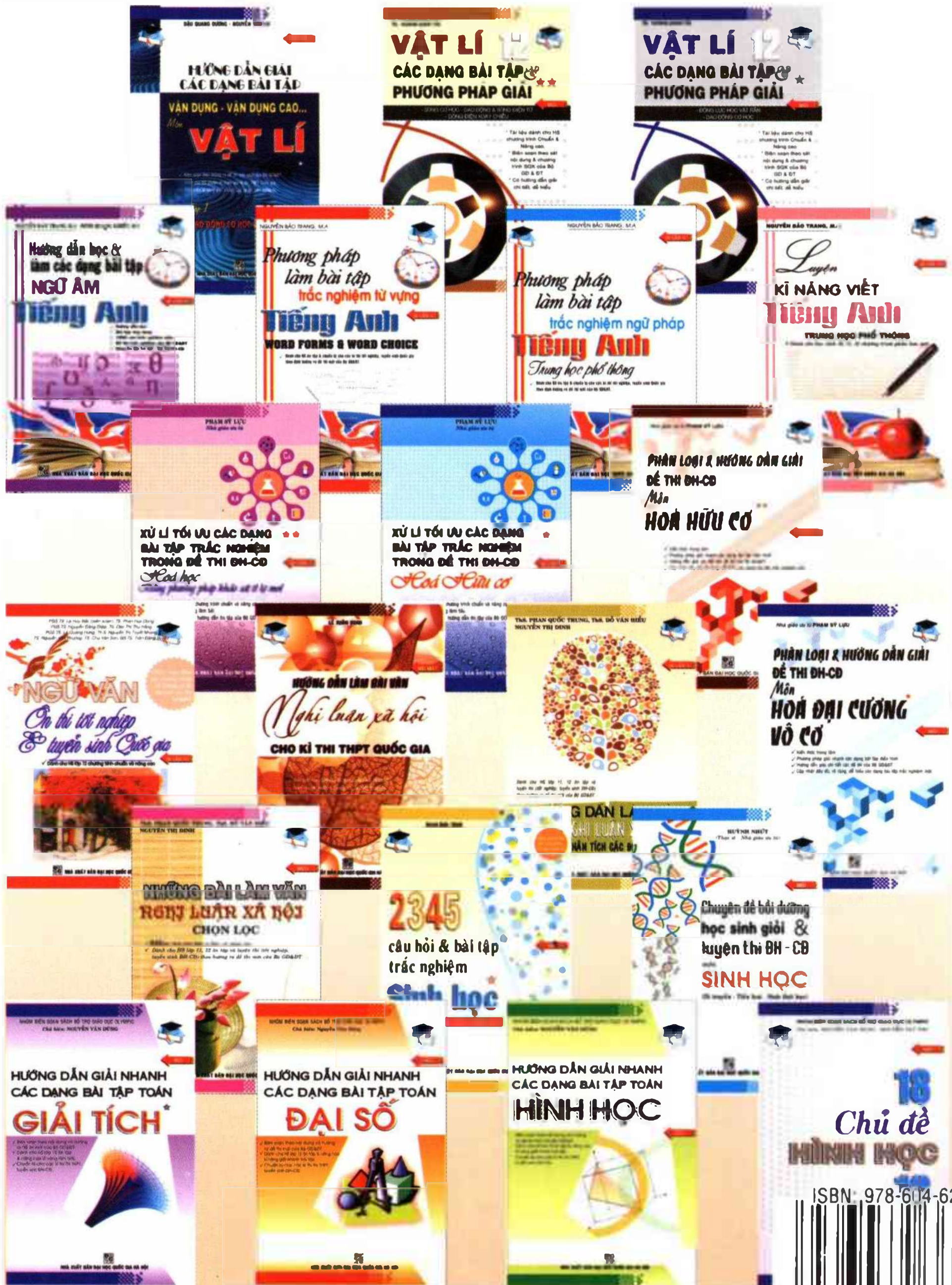
DẠY TỐT HỌC TỐT

ABC

TRUNG TÂM SÁCH GIÁO DỤC ALPHA

ĐT: 08.62676463, FAX: 08.38547464
www.alphaeduvn.com - email: *alphabookcenter@yahoo.com*

Mời các bạn tìm đọc:



ISBN: 978-604-62-3675-3

alphabookcenter@yahoo.com
Sách dày 364tr, in giấy BB, có tem chống giả bìa 1.

8 936039 379201
Giá: 62.000đ