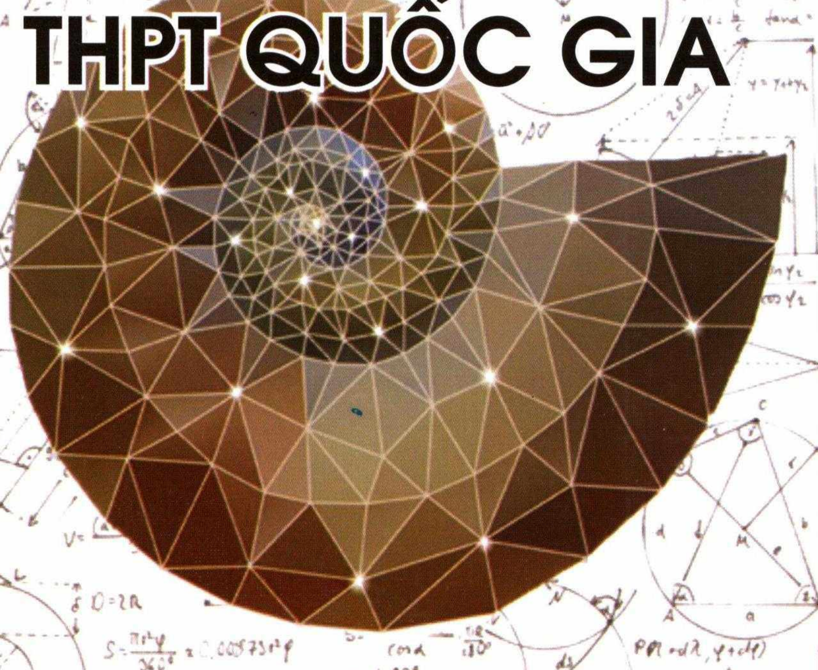
Thạc sĩ - Nhà giáo ưu tú
LÊ HOÀNH PHÒ

- Ôn tập kiến thức & kĩ năng trọng tâm.
- Cập nhật các dạng bài tập mới theo hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.

BỘ ĐỀ TOÁN

LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

MỚI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Thạc sĩ - Nhà giáo ưu tú
LÊ HOÀNH PHÒ

✔ Ôn tập kiến thức & kĩ năng trọng tâm.
✔ Cập nhật các dạng bài tập mới theo hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.

BỘ ĐỀ TOÁN

LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập: (04) 39714896;
Quản lí Xuất bản: (04) 39728806; Tổng Biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập
TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập nội dung
VŨ THỊ THUÝ-NGUYỄN ĐỨC THIỆN
Sửa bài
NGỌC VÂN
Chế bản
CÔNG TI AN PHA VN
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đơn vị liên kết xuất bản
CÔNG TI AN PHA VN
50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, TP. HCM

SÁCH LIÊN KẾT

BỘ ĐỀ TOÁN LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
Mã số: 1L-539DH2015
In 1.500 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công Ty TNHH In Và Bao bì Hưng Phú
Địa chỉ: 162A/1 Khu Phố 1A, P. An Phú, TX. Thuận An, Bình Dương.
Số xuất bản: 2501-2015/CXBIPH/8-311/ĐHQGHN
Quyết định xuất bản số: 538 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2016.
ISBN: 978-604-62-3673-3

LỜI NÓI ĐẦU

*Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 12 chuẩn bị thật tốt cho **KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA** đạt điểm khá, điểm cao để tốt nghiệp và trúng tuyển vào các trường Cao đẳng, Đại học mà mình đã xác định nghề nghiệp cho tương lai.*

***BỘ ĐỀ TOÁN LUYỆN THI THPT QUỐC GIA** gồm 60 đề tổng hợp luyện thị. Mỗi đề có 10 câu theo cấu trúc mới nhất bao gồm đầy đủ nội dung Toán 12 và Toán lớp 10, 11 với các chủ điểm KHẢO SÁT HÀM SỐ, SỐ PHỨC, PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ , LOGARRIT, NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN, HÌNH HỌC KHÔNG GIAN, TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN, LƯỢNG GIÁC, TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON, PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ, TỌA ĐỘ PHẲNG, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.*

***BỘ ĐỀ TOÁN LUYỆN THI THPT QUỐC GIA** dùng các kiến thức và phương pháp giải Toán lớp 12, kết hợp ôn tập Toán lớp 10 và 11, chú trọng luyện tập Toán căn bản và nâng cao, Toán khó và Toán tổng hợp, giúp các bạn rèn luyện kỹ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán trong kiểm tra, thi cử. Phần đầu là 2 phụ lục về các công thức Toán về Đại số và Giải tích, Lượng giác và Hình học để học sinh ôn tập và vân dụng.*

Các đề toán trong bộ sách này được biên soạn sát với cấu trúc mới nhất của bộ GD-ĐT, đầy đủ các mức độ nhận biết, thực hành, vận dụng, vận dụng cao.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những sai sót mà tác giả chưa thấy hết, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc, học sinh để lần in sau hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- Trung tâm sách giáo dục Alpha
- Công ty TNHH Alpha VN
Địa chỉ: 50 Nguyễn Văn Săng, quận Tân Phú, tp.HCM.
Điện thoại: 08.62676463, 38547464
Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cảm ơn!

Tác giả

CÔNG THỨC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

1.1. TẬP HỢP

N: Tập hợp các số tự nhiên, **N***: Tập hợp các số nguyên dương.
Z: Tập hợp các số nguyên, **Q**: Tập hợp các số hữu tỉ.
R: Tập hợp các số thực, **R***: Tập hợp các số thực khác 0.

Các phép toán

Phép hợp: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.
Phép giao: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
Phép hiệu: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
Phần bù của A trong E ($A \subset E$): $C_E A = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin A\}$.

Đoạn, khoảng và nửa khoảng

Tập $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$
Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$.
Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$.
Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$.
Nửa khoảng $(a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$.
Khoảng $(a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$.
Khoảng $(-\infty; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$.
Nửa khoảng $[a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \ge a\}$.
Nửa khoảng $(-\infty; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\}$.

1.2. HÀM SỐ VÀ TÍNH CHẤT

Cho hàm số f xác định trên K (khoảng, nửa khoảng, đoạn).
– Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu:
$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
– Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu:
$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
– Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu:
$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng
– Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu
$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

1.3. HÀM SỐ BẬC NHẤT

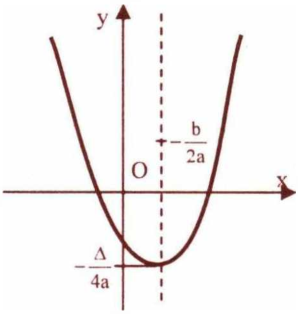
Hàm số bậc nhất $y = ax + b$, ($a \neq 0$). Tập xác định $D = \mathbf{R}$, có hệ số góc $a = \tan(Ox, d)$.
– Quan hệ 2 đường thẳng (d): $y = ax + b$, (d'): $y = a'x + b'$
(d) song song (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$, (d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$

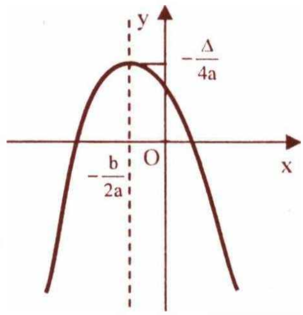
(d) trùng với (d') $\Leftrightarrow$ a = a' và b = b', (d) vuông góc (d') $\Leftrightarrow$ a.a' = –1.

1.4. HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có tập xác định D = **R**

Đồ thị là một đường parabol có đỉnh là điểm $I(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$; có hướng bề lõm lên trên nếu a > 0, xuống dưới nếu a < 0.





x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

1.5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Giải và biện luận phương trình: ax + b = 0

D = **R**, ax + b = 0 $\Leftrightarrow$ ax = –b

Nếu a $\neq$ 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{b}{a}$

Nếu a = 0 thì phương trình trở thành: 0x = –b

Khi b = 0: Phương trình có nghiệm với mọi x

Khi b $\neq$ 0: Phương trình vô nghiệm.

1.6. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Lập $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Định lí Viet: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Đảo lại nếu hai số x_1, x_2 có tổng $x_1 + x_2 = S$ và tích $x_1x_2 = P$ thì chúng là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$. Phương trình này có nghiệm khi $S^2 - 4P \geq 0$.

– Phân tích nhân tử: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

– Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$

Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$

1.7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

– Biến đổi vế trái thành tích số

– Dùng máy tính cá nhân để tìm nghiệm $x = x_0$ rồi phân tích thừa số, chia đa thức vế trái cho $(x - x_0)$ hoặc dùng sơ đồ Hooc – ne

	a	b	c	d
$x = x_0$	a	$b' = ax_0 + b$	$c' = b'x_0 + c$	$d' = c'x_0 + d = 0$

Do đó $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(ax^2 + b'x + c')$

1.8. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Đưa về bậc nhất, bậc hai bằng cách sau: quy đồng, phân tích đa thức nằm ở vế trái của phương trình thành tích hay đặt ẩn phụ để đưa phương trình bậc cao đã cho về phương trình bậc thấp theo ẩn phụ đó. Nếu tổng các hệ số $a + b + c + \ldots$ của phương trình bậc cao bằng 0 thì có nghiệm $x = 1$, còn tổng đan dấu các hệ số $a - b + c - d + \ldots$ bằng 0 thì có nghiệm $x = -1$.

– Dạng $ax^4 + bx^2 + x = 0$, $a \neq 0$. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$

Phương trình trở thành $at^2 + bt + c = 0$.

– Dạng $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c') = d$. Đặt $t = x^2 + bx$

Phương trình trở thành $(t + c)(t + c') = d$.

– Dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$

Nếu $a + b = c + d$ thì đặt $t = x^2 + (a + b)x$

Phương trình trở thành $(x^2 + (a + b)x + ab)(x^2 + (c + d)x + cd) = m$

hay $(t + ab)(t + cd) = m$.

– Dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$. Đặt $x = t - \dfrac{a + b}{2}$

Phương trình trở thành: $(t + \dfrac{a + b}{2})^4 + (t - \dfrac{a + b}{2})^4 = c$

Khai triển thành phương trình trùng phương.

– Phương trình quy hồi (đối xứng hệ số) bậc n:

$$Ax^{n} + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + ... + Cx^2 + Bx + A = 0.$$

Nếu n lẻ thì có nghiệm x = – 1,

Nếu n chẵn, n = 2m thì chia 2 vế cho $x^m \neq 0$ và đặt ẩn phụ

$$t = x + \frac{1}{x},\ |t| \geq 2.$$

1.9. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

– Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } a'^2 + b'^2 \neq 0)$$

Lập các định thức: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b;$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b;\ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Khi $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

Khi $D = 0$, $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm

Khi $D = D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm (x; y) thoả ax + by = c.

– Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn: Khử dần các ẩn bằng phương pháp thế hay phương pháp cộng.

1.10. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI, BẬC CAO

Hệ phương trình có phương trình bậc nhất:

Dùng phương pháp thế từ phương trình bậc nhất của hệ.

Hệ đối xứng loại I: $\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$, trong đó F_1 và F_2 là các biểu thức đối xứng đối với x và y. Đặt x + y = S và xy = P rồi biến đổi về hệ phương trình theo S và P. Giải hệ phương trình đó ta tìm được các nghiệm (S; P), chọn các nghiệm thoả mãn điều kiện $S^2 \geq 4P$. Từ đó giải ra nghiệm (x; y).

Hệ đối xứng loại II: $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ F(y,x) = 0 \end{cases}$, trong đó F là biểu thức đối với x và y.

Thông thường ta giải hệ bằng cách giữ lại một phương trình và đem hai phương trình trong hệ "trừ cho nhau" để đưa về phương trình tích số (x – y).A(x, y) = 0.

Hệ đẳng cấp (thuần nhất)

Dạng $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d & (1) \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có thể biến đổi thành tích số, hoặc lập biệt thức Δ để tính ẩn này theo ẩn kia. Thế vào (1) để giải tiếp.

Dạng $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d & (1) \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' & (2) \end{cases}$ Tạo hệ số tự do ở vế phải bằng 0, bằng cách nhân (1) với d', (2) với d rồi trừ nhau để đưa về dạng trên hay khử một ẩn bậc hai, chẳng hạn nhân (1) với a', (2) với a rồi trừ nhau, từ đó tính y theo x. Thế vào một phương trình để giải tiếp.

Tổng quát, hệ đẳng cấp (thuần nhất) bậc n: Xét $x = 0$, xét $x \neq 0$, chia 2 vế cho x^n hay đặt $y = kx$, đưa về giải theo ẩn k. Hoặc ngược lại, xét $y = 0$, xét $y \neq 0$, và đặt $x = ky$.

1.11. BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức Côsi

– Cho hai số a và b không âm:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \; a+b \ge 2\sqrt{ab}, \; ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \; \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

– Cho ba số a, b và c không âm:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}\,;\; a+b+c \ge 3.\sqrt[3]{abc}$$

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3;\; \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối

$|x+y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y cùng dấu.

$|x-y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y trái dấu.

Bất đẳng thức Svac

Với mọi a, b, c, d thì: $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Hay $|ac + bd| \ge \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$. Dấu bằng khi ad = bc.

1.12. DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$:

Cho $f(x) = ax + b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	trái dấu a	0	cùng dấu a

1.13. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

Tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

Bảng xét dấu:

$\Delta < 0$	$af(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$
$\Delta = 0$	$af(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2$	$af(x) < 0, \forall x \in (x_1, x_2)$ $af(x) > 0, \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

Tam thức bậc hai không đổi dấu trên **R**:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

1.14. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Khử dấu giá trị tuyệt đối: dùng định nghĩa, chia miền xét dấu, đặt điều kiện rồi bình phương, dấu bằng của bất đẳng thức,...

$$|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases},\ \sqrt{A^2} = |A|$$

$$|B| = B \Leftrightarrow B \geq 0,\ |B| = -B \Leftrightarrow B \leq 0$$

– Dạng $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \geq 0,\ A = B \\ A < 0,\ -A = B \end{array}\right.$

– Dạng $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

– Dạng $|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0$

– Dạng $|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0$

– Dạng $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0, f(x) \leq -g(x) \text{ hay } f(x) \geq g(x) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ g(x) > 0, f^2(x) \geq g^2(x) \end{array}\right.$$

– Dạng $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

1.15. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Khử căn thức: đặt điều kiện rồi bình phương, chuyển vế bình phương, đặt ẩn phụ kèm điều kiện, đặt ẩn phụ chuyển về hệ phương trình, nhân lương liên hiệp, thêm bớt đại lượng, biến đổi tích số, dùng hằng đẳng thức, đánh giá, dùng tính chất hàm tăng giảm, bất đẳng thức,...

– Dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

– Dạng $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

– Dạng: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

– Dạng: $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$.

1.16. HAI QUY TẮC ĐẾM

Quy tắc cộng:

Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo một trong 2 phương án A hoặc B. Phương án A có thể thực hiện theo n cách, phương án B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo n + m cách.

Tổng quát, giả sử một công việc có thể được tiến hành theo một trong k phương án A_1, A_2,...., A_k. Phương án A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, phương án A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách..., phương án A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo tổng $n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách.

Quy tắc nhân:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm 2 công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện theo n cách, công đoạn B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo n. m cách.

Tổng quát, giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn A_1, A_2,..., A_k. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách,..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo tích $n_1n_2...n_k$ cách.

1.17. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Giai thừa:

$1! = 1$, $2! = 1.2$, $3! = 1.2.3$, $n! = 1.2.3...(n-1)n$

Quy ước $0! = 1$.

Hoán vị:

Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$. Một hoán vị của n phần tử của A là một bộ sắp thứ tự n phần tử này, mỗi phần tử có mặt đúng 1 lần.

Số hoán vị n phần tử: $P_n = n!$

Chỉnh hợp:

Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$ và số nguyên dương k, $1 \leq k \leq n$. Một chỉnh hợp n chập k phần tử của tập A là một bộ sắp thứ tự k phần tử từ n phần tử của A.

Số chỉnh hợp n chập k: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

Khi k = n thì $A_n^n = P_n = n!$.

Tổ hợp:

Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$ và số nguyên k: $0 \leq k \leq n$. Một tổ hợp n chập k phần tử của tập A là một tập hợp con của A có k phần tử.

Số tổ hợp n chập k: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

1.18. NHỊ THỨC NEWTON

Các hằng đẳng thức

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;...

Tam giác Pascal

Ta có thể sắp xếp các hệ số của khai triển trên thành bảng dạng tam giác, gọi là tam giác Pascal tương ứng với mũ n của (a + b):

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	4	1	
n = 5	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1

...

Quy tắc đóng khung chính là tính chất $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

– Số số hạng là n + 1

– Tổng số mũ của a và b là (n – k) + k = n, quy ước số mũ của a giảm dần còn b tăng dần.

– Các cặp hệ số cách đều biên bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$

– Số hạng tổng quát thứ k + 1 là: $T_{k+1} = C_n^k.a^{n-k}.b^k$.

1.19. XÁC SUẤT

Xác suất:

– Mỗi phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu Ω các biến cố sơ cấp. Tuỳ theo yêu cầu của phép thử để tìm không gian mẫu các biến cố sơ cấp.

– Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Một phần tử của Ω_A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Giả sử phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu là Ω và các kết quả của T là đồng khả năng.

Nếu A là một biến cố và $\Omega_A \subset \Omega$ là tập hợp mô tả A thì xác suất của A là tỉ số phần tử của Ω_A và của Ω: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$.

Quy tắc cộng các biến cố xung khắc

– Biến cố hợp của 2 biến cố A và B là biến cố " A hoặc B xảy ra", ký hiệu $A \cup B$. Tập mô tả của biến cố hợp $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$. Mở rộng cho hợp nhiều biến cố.

– Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Tập mô tả của 2 biến cố A và B xung khắc: $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$

– Quy tắc cộng: Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tổng quát, nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các biến cố đôi một xung khắc thì:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$

Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A là biến cố " không xảy ra A ", ký hiệu $\overline{A}$. Ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Quy tắc nhân các biến cố độc lập

– Biến cố giao của 2 biến cố A và B là biến cố " A và B cùng xảy ra", ký hiệu AB. Tập mô tả của biến cố giao AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$. Mở rộng cho giao nhiều biến cố.

– Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Khi 2 biến cố A và B độc lập thì không lập được tập mô tả tương đương.

– Quy tắc nhân: Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì: $P(AB) = P(A)P(B)$

Tổng quát, nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các biến cố độc lập thì:

$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k)$.

1.20. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Biến ngẫu nhiên rời rạc X là đại lượng nhận các giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán được, $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$.

Bảng phân bố xác suất:

Mô tả tập giá trị $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ của biến ngẫu nhiên rời rạc X và xác suất $P(X = x_i) = p_i$ $(i = 1, 2,..., n)$. Thông thường các giá trị của X trên bảng phân bố xác suất được viết theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải.

Kỳ vọng:

Đặc trưng cho giá trị trung bình của X.

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2,..., x_n\}$. Kì vọng của X: $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 +... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

Phương sai:

Phương sai của X là một số không âm được tính theo công thức:

$$V(X) = (x_1-\mu)^2p_1 + (x_2-\mu)^2p_2 +... + (x_2-\mu)^2p_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i$$

với $p_i = P(X = x_i)$, kỳ vọng $\mu = E(X)$,

hoặc: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2p_i - \mu^2$.

Độ lệch chuẩn:

Căn bậc hai của phương sai của X được gọi là độ lệch chuẩn của X: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

1.21. THỐNG KÊ

– Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí dữ liệu.

– Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một mẫu, số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước mẫu N: $\{x_1, x_2,..., x_N\}$.

– Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một mẫu số liệu $\{x_1, x_2,..., x_N\}$.

– Tần số là số lần xuất hiện n_i của mỗi giá trị x_i trong mẫu số liệu.

– Tần suất f_i của giá trị x_i: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Số trung bình, trung vị và mốt

– Số trung bình: $\overline{x}$ .Giả sử ta có mẫu số liệu kích thước N:

$\{x_1, x_2,..., x_N\}$.

Số trung bình $\overline{x}$ của mẫu số liệu này được tính bởi công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Nếu giá trị x_i có tần số n_i với i = 1, 2,..., m thì:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i.x_i,\ \sum_{i=1}^{m} n_i = N\ .$$

Nếu cho bởi các lớp thì đại diện x_i là trung điểm, ta có công thức gần đúng: $\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i$.

– Số trung vị: M_e. Giả sử ta có một mẫu số liệu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ được gọi là số trung vị. Nếu N là một số chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}$ + 1 được gọi là số trung vị, kí hiệu M_e.

– Mốt: M_0. Giá trị có tần số lớn nhất của một mẫu số liệu được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là M_0. Nếu trong bảng phân bố tần số có nhiều giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì các giá trị đó là mốt.

Phương sai và độ lệch chuẩn:

Phương sai của mẫu số liệu, kí hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$ trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.

Hoặc: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$.

Nếu cho bởi bảng tần số hoặc ghép lớp thì:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 \text{ hoặc } s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2$$

Căn bậc hai số học của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là

$$s : s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}\ .$$

1.22. CHỨNG MINH QUY NẠP

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh A(n) là một mệnh đề đúng khi n = 1.

Bước 2: Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, từ giả thiết A(n) là một mệnh đề đúng khi $n = k$, chứng minh A(n) cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

1.23. DÃY SỐ

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbf{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn hay dãy số. Kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), và gọi là u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó.

Dãy số (u_n) viết dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Ba cách cho một dãy số

– Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát u_n.

– Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi hay bằng quy nạp u_1 và u_{n+1} theo u_n; u_1, u_2 và u_{n+2} theo u_n, u_{n+1};...

– Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Tính tăng, giảm của dãy số

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$.

Tính bị chặn của dãy số

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \le M$.

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \ge m$.

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, m \le u_n \le M$.

1.24. CẤP SỐ CỘNG

– Cấp số cộng là một dãy số hữu hạn hay vô hạn mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \ge 2, u_n = u_{n-1} + d$.

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

– Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

– Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$.

– Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ thì

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

1.25. CẤP SỐ NHÂN

– Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

– Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là: $u_k^2 = u_{k-1}.\ u_{k+1}$.

– Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$.

– Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$.

1.26. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Dãy có giới hạn là 0

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó: $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$

$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbf{N}^*: n > n_o \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

– Kết quả: $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$

$\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

– Định lí: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

– Định lí: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n)

Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Dãy có giới hạn là số thực

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$:

$\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

– Định lí: Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$

Và nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

– Định lí: Giả sử $\lim u_n = A$, $\lim v_n = B$ và k là một hằng số.

Khi đó: $\lim(u_n + v_n) = A + B$; $\lim(u_n - v_n) = A - B$

$\lim(u_n.v_n) = AB$; $\lim(k.u_n) = kA$; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{A}{B}$ (nếu $B \neq 0$).

– Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: công bội q với $|q| < 1$.

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Dãy có giới hạn là vô cực

Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở, đều lớn hơn số dương đó: $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\frac{1}{u_n} = 0$.

1.27. GIỚI HẠN HÀM SỐ

Giới hạn của hàm số

– Giả sử (a; b) là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in (a; b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n và $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nếu có 2 dãy x_n, x'_n cùng tiến đến x_0 mà $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Định lí về giới hạn hữu hạn

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ $(A, B \in \mathbf{R})$.

Khi đó: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$; $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = AB$; Nếu $B \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = cA$.

Định lí vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lí: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1.28. HÀM SỐ LIÊN TỤC

– Hàm số f xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

– Hàm số f liên tục trên khoảng K nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

– Hàm số f xác định trên đoạn [a; b] được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và,

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Các định lí

– Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

– Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

– Các hàm số lượng giác y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx liên tục trên tập xác định của chúng.

Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục:

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu f(a) ≠ f(b) thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b), tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a; b) sao cho f(c) = M.

– Hệ quả: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và f(a) f(b) < 0 tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a; b) sao cho f(c) = 0, tức là phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm x = c thuộc khoảng (a; b).

1.29. ĐẠO HÀM

Đạo hàm của các hàm số tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và điểm x_0 thuộc khoảng đó. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

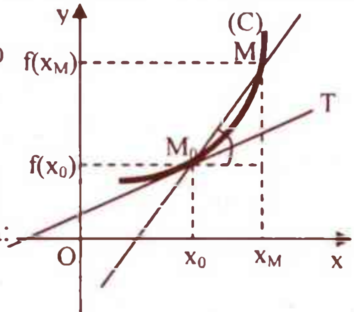
Đặt $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số thì ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

– Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm



Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có phương trình là:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình s = s(t) bằng đạo hàm của hàm số

$s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên **R** và $y' = 0$.

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên **R** và $y' = 1$.

Hàm số $y = x^n$ ($n \in$ **N**, $n \geq 2$) có đạo hàm trên **R** và $y' = nx^{n-1}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Các quy tắc tính đạo hàm

Tổng hai hàm số: $(u + v)' = u' + v'$

Hiệu hai hàm số: $(u - v)' = u' - v'$

Tích hai hàm số: $(u.v)' = u'.v + u.v'$

Thương hai hàm số: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Hàm số hợp: $f'_x = f'_u.\, u'_x$

Công thức đạo hàm lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$; $(\sin u)' = u'.\cos u$

$(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$; $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$; $(\cot u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$.

1.30. VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx được kí hiệu $df(x_0)$ là: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ là $dy = y'dx$.

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm f và kí hiệu là f'', tức là: $f'' = (f')'$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Gia tốc (tức thời) $a(t_0)$ tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là: $a(t_0) = s''(t_0)$.

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ (với $n \in N$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$.

Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$.

$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$, $(n \in N, n \geq 2)$.

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$.

Các công thức gốc:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}; \; y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$y = \sin(ax+b) \Rightarrow y^{(n)} = a^n.\sin(ax + b + n\frac{\pi}{2})$$

$$y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

$$y = \cos(ax+b) \Rightarrow y^{(n)} = a^n.\cos(ax + b + n\frac{\pi}{2}).$$

1.31. DÙNG ĐẠO HÀM XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

– Nếu hàm số f đồng biến trên (a; b) thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

– Nếu hàm số f nghịch biến trên (a; b) thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên (a; b)

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số nghịch biến trên (a; b)

Khi $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì kết quả trên vẫn đúng.

Nếu hàm số f đồng biến trên (a; b) và liên tục trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] thì đồng biến trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] tương ứng.

Nếu hàm số f nghịch biến trên (a; b) và liên tục trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] thì nghịch biến trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] tương ứng.

1.32. CỰC TRỊ

Cho hàm số f xác định trên tập hợp D ($D \subset \mathbf{R}$) và $x_0 \in D$.

a) x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng (a; b) chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f, kí hiệu $y_{CĐ}$.

b) x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng (a; b) chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số f, kí hiệu y_{CT}.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị, nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

Điều kiện cần để hàm số có cực trị:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_o. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_o thì $f'(x_o) = 0$.

Điều kiện đủ để hàm số có cực trị: có hai dấu hiệu:

– Cho $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0, có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$:

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì f đạt cực tiểu tại x_0

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì f đạt cực đại tại x_0.

– Cho $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

1.33. TIỆM CẬN

– Đường thẳng $x = x_o$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$$

– Đường thẳng $y = y_o$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_o$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_o$.

– Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x)$ nếu $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$ hoặc

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax).$$

Nếu đồ thị $y = f(x) = ax + b + r(x)$ và $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$ thì tiệm cận ngang và xiên: $y = ax + b$.

1.34. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Điểm uốn của đồ thị:

Cho $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $I(x_0;f(x_0))$ là điểm uốn của đường cong (C): $y = f(x)$.

Điểm uốn $I(x_0;f(x_0))$ của đường cong (C): $y = f(x)$ thì một trong 2 khoảng (a,x_0), (x_0,b), tiếp tuyến tại điểm I nằm phía trên đồ thị còn ở khoảng kia thì tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.

Sơ đồ chung về khảo sát và vẽ đồ thị:

Bước1: Tập xác định

– Tập xác định D = **R**

– Xét tính chẵn, lẻ nếu có.

Bước 2: Chiều biến thiên

– Tính các giới hạn, tìm tiệm cận của hàm hữu tỉ.

– Tính đạo hàm cấp một, xét dấu

– Lập bảng biến thiên rồi chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến và cực đại, cực tiểu.

Bước 3: Vẽ đồ thị

– Tính đạo hàm cấp hai, xét dấu để chỉ ra điểm uốn của hàm đa thức.

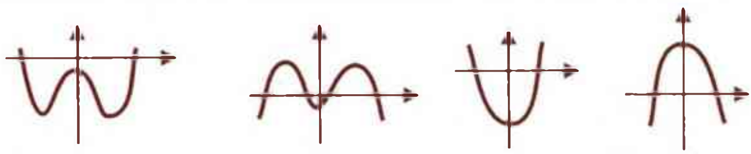
– Cho vài giá trị đặc biệt, giao điểm với hai trục toạ độ.

– Vẽ đúng đồ thị.

Các dạng đồ thị hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Đồ thị hàm bậc ba có tâm đối xứng là điểm uốn.

Các dạng đồ thị hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$



Đồ thị hàm trùng phương nhận trục tung là trục đối xứng.

Các dạng đồ thị hàm hữu tỉ 1/1: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

Đồ thị hàm hữu tỉ có tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

1.35. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

Sự tương giao

Cho 2 đồ thị của hàm số: $y = f(x)$, $y = g(x)$. Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ là một phương trình đại số, tuỳ theo số nghiệm mà có quan hệ tương giao: vô nghiệm: không có điểm chung, 1 nghiệm (đơn): cắt nhau, 1 nghiệm kép: tiếp xúc, 2 nghiệm: 2 giao điểm,....

– Phương trình bậc 3 là $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ luôn luôn có nghiệm. Nếu có nghiệm $x = x_0$ thì ta phân tích thành tích số:

$(x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0$

– Nếu đặt hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì điều kiện:có 1 nghiệm: đồ thị không có cực trị hoặc $y_{CĐ}.\, y_{CT} > 0$, có 2 nghiệm: $y_{CĐ}.\, y_{CT} = 0$, có 3 nghiệm phân biệt: $y_{CĐ}.\, y_{CT} < 0$.

– Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm dương khi: $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} < 0 \\ x_{CD}, x_{CT} > 0 \\ a.f(0) < 0 \end{cases}$

– Hai điểm trên 2 nhánh đồ thị $y = \dfrac{g(x)}{x-k}$, ta thường lấy hoành độ k – a và k + b với a, b > 0.

Góc và khoảng cách

– Góc giữa 2 đường thẳng:

$$\cos\alpha = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|AA'+BB'|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

– Đoạn $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

– Từ $M_0(x_0, y_0)$ đến (Δ): Ax + By + C = 0: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

– Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập cấp số cộng khi $0 < t_1 < t_2$, $t_2 = 9t_1$.

Tiếp tuyến và tiếp xúc

Cho đồ thị (C): y = f(x)

– Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến này có 3 yếu tố: hoành độ tiếp điểm x_0, tung độ tiếp điểm y_0 và hệ số góc: $f'(x_0) = k = \tan(Ox,t)$

– Tiếp tuyến đi qua $A(x_A, y_A)$: Lập phương trình tiếp tuyến tổng quát tại x_0 với ẩn x_0 rồi cho qua A thì tính được x_0.

Cách khác: lập phương trình đường thẳng qua A: $y - y_A = k(x - x_A)$ ⇔ y = g(x).Tìm hệ số góc k bằng cách giải hệ phương trình cho tiếp điểm.

– Điều kiện 2 đồ thị y = f(x) và y = g(x). tiếp xúc là hệ phương trình: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

Với hai đường thẳng d: y = ax + b, d′: y = a′x + b′ thì có:

d ≡ d′ khi a = a′, b = b′; d // d′ khi a = a′, b ≠ b′; d ⊥ d′ khi a. a′ = –1.

Điểm đặc biệt của họ đồ thị: (C_m): y = f(x,m)

– Điểm $A(x_A, y_A) \in (C_m) \Leftrightarrow y_A = f(x_A, m)$.

Nếu ta coi $f(x_A, m) - y_A = 0$ là phương trình theo ẩn m thì số giá trị tham số m là số đồ thị đi qua điểm A.

– Điểm cố định của họ là điểm mà mọi đồ thị đều đi qua:

$M_0(x_0, y_0) \in (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m), \forall m$

– Điểm mà họ không đi qua là điểm mà không có đồ thị nào của họ đi qua với mọi tham số: $M_0(x_0, y_0) \notin (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 \neq f(x_0, m)\ \forall m$

Nhóm theo tham số và áp dụng các mệnh đề sau:

$Am + B = 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0$

$Am^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0, C = 0$

$Am + B \neq 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B \neq 0$

$Am^2 + Bm + C \neq 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0, C \neq 0$

hoặc $A \neq 0, \Delta = B^2 - 4AC < 0$.

Yếu tố đối xứng.

– Hàm số chẵn: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng nhau qua trục tung.

– Hàm số lẻ: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$

Đồ thị hàm số lẻ đối xứng nhau qua gốc O.

– Công thức chuyển hệ trục bằng phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$.

$$(Oxy) \to (IXY) \text{ với } I(x_0, y_0): \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

– Điểm A đối xứng B qua I khi I là trung điểm đoạn AB.

– Điểm A đối xứng B qua đường thẳng d khi d là trung trực của đoạn AB.

– Điều kiện (C) nhận $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng.

$y_0 = \dfrac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2}$, $\forall x_0 - x, x_0 + x \in D$, hoặc chuyển trục bằng phép tịnh tiến đến gốc I nói trên là hàm số lẻ.

– Điều kiện (C) nhận d: $x = a$ làm trục đối xứng;

$f(a - x) = f(a + x), \forall a-x, a + x \in D$,hoặc chuyển trục bằng phép tịnh tiến đến S(a,0) là hàm số chẵn.

Quỹ tích điểm

Tìm toạ độ x, y của M, khử tham số giữa x và y. Giới hạn: chuyển điều kiện nếu có của tham số về điều kiện của x (hay y).

Đặc biệt: Nếu $M(x,y) \in (V)$ thì chỉ cần tìm x rồi rút tham số để thế, khử tham số.

Biến đổi đồ thị

Cho các số dương p, q và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G).

Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$; xuống dưới q đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$.

Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x + p)$; sang phải p đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x - p)$.

Nếu lấy đối xứng qua trục Ox thì được $y = -f(x)$

Nếu lấy đối xứng qua trục Oy thì được $y = f(-x)$

Nếu lấy đối xứng qua gốc O thì được $y = -f(-x)$.

Đặc biệt đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$: bằng cách giữ nguyên phần đồ thị (G) phía trên trục hoành, còn phần phía dưới trục hoành thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Đồ thị $y = f(|x|)$: bằng cách giữ nguyên phần đồ thị (G) bên phải trục tung, và lấy đối xứng phần đó qua trục tung (do hàm số chẵn).

– Công thức chuyển hệ trục Oxy thành IXY bằng phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$ với điểm $I(x_0, y_0)$: $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$.

1.36. BIẾN ĐỔI LŨY THỪA VÀ MŨ

– Luỹ thừa với số mũ nguyên dương:

$a^n = a.a...a$, n thừa số a (với mọi a và $n \in \mathbf{N}^*$)

– Luỹ thừa với số mũ 0 và nguyên âm:

$a^0 = 1$ và $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (với $a \neq 0$ và $n \in \mathbf{N}^*$)

– Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ;

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ a (với $a > 0$ và $r = \dfrac{m}{n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$)

– Luỹ thừa với số mũ thực:

$a^\alpha = \lim a^{r_n}$ (với $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $r_n \in \mathbf{Q}$ và $\lim r_n = \alpha$).

– Căn bậc n:

Khi n lẻ, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$ (với mọi a)

Khi n chẵn, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ (với $a \geq 0$).

– Biến đổi luỹ thừa: Với các số $a > 0$, $b > 0$, α và β tuỳ ý, ta có:

$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$; $(a : b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$

– Quan hệ so sánh:

Nếu $\alpha > 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Nếu $0 < a < b$ thì: $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

– Biến đổi căn bậc cao: Với hai số không âm a, b, hai số nguyên dương m, n và hai số nguyên p, q tuỳ ý, ta có: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b > 0)$, $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ $(a > 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$. Đặc biệt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

1.37. BIẾN ĐỔI LÔGARIT

– Lôgarit cơ số a: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ $(0 < a \neq 1$ và $b > 0)$

– Lôgarit cơ số 10: $\log_{10}b = \lg b$ hay $\log b$

– Lôgarit cơ số e: $\log_e b = \ln b$ ($e \approx 2{,}7183$)

– Tính chất: $\log_a 1 = 0$ và $\log_a a^b = b$ với $a > 0, a \neq 1$.

$a^{\log_a b} = b$ với $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

– Biến đổi lôgarit trong điều kiện xác định:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,\ \log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -\log_a c$$

$$\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b \text{ (với mọi } \alpha),\ \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b\ (n \in \mathbf{N}^*)$$

– Đổi cơ số trong điều kiện xác định:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \text{ hay } \log_a b.\ \log_b x = \log_a x$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ hay } \log_a b.\log_b a = 1;\ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$$

– Quan hệ so sánh với $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

1.38. HÀM SỐ LUỸ THỪA, MŨ, LÔGARIT

Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$:

Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

Hàm số mũ: $y = a^x$:

Tập xác định **R**, nhận mọi giá trị thuộc $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases};\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đồng biến trên **R** nếu $a > 1$, nghịch biến trên **R** nếu $0 < a < 1$.

Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, nằm ở phía trên trục hoành và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

Liên tục trên tập xác định $(0; +\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc **R**.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ -\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases};\ \lim_{x\to+0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a < 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

Đồ thị luôn cắt trục hoành tại điểm (1; 0), nằm ở bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x > 0)$, $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$, với $u > 0$.

$(a^x)' = a^x\ln a$; $(e^x)' = e^x$; $(a^u)' = a^u u'\ln a$; $(e^u)' = e^u u'$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

1.39. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Phương pháp chung:

– Đưa về cùng một cơ số

– Đặt ẩn phụ

– Lôgarit hoá

– Sử dụng tính chất của hàm số, đánh giá hai vế,...

Phương trình

– Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Nếu $b \le 0$, phương trình vô nghiệm

Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

– Phương trình mũ $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a\neq 1,\ f(x)=g(x)\end{array}\right.$

– Phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

– Phương trình lôgarit

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a>0, a\neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \text{ hay } g(x)>0 \\ f(x)=g(x)\end{cases}$

Bất phương trình

– Bất phương trình mũ:

Nếu $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Nếu $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

– Bất phương trình:

$a^x < m \Leftrightarrow x < \log_a m$ (với $m > 0$ và $a > 1$)

$a^x < m \Leftrightarrow x > \log_a m$ (với $m > 0$ và $0 < a < 1$)

– Bất phương trình lôgarit:

Nếu a > 1: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Nếu 0 < a < 1: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

– Bất phương trình:

$\log_a x < m \Leftrightarrow 0 < x < a^m$ (với a > 1)

$\log_a x < m \Leftrightarrow x > a^m$ (với 0 < a < 1).

1.40. NGUYÊN HÀM

Cho K là một khoảng (a;b), nửa khoảng (a;b], [a,b) hay đoạn [a;b]. Hàm số F(x) gọi là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in K$

Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì họ các nguyên hàm của f(x) là: $\int f(x)dx = F(x) + C$, C là hằng số bất kì

Bảng các nguyên hàm:

$\int dx = x + C$; $\int k.dx = kx + C$ với k là hằng số

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$; $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

Với $\alpha \neq -1$: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\int u^\alpha.u'dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad$ $\int \cos u.u'.dx = \sin u + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad$ $\int \sin u.u'.dx = -\cos u + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{\cos^2 u}dx = \tan u + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{\sin^2 u}dx = -\cot u + C$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\quad$ $\int e^u.u'dx = e^u + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\quad$ $\int a^u.u'.dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$ $(a>0, a \neq 1)$

Tính chất cơ bản:

Nếu f và g là hai hàm số liên tục trên K thì:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với mọi số k.

Nguyên hàm đổi biến

Dạng 1: Nếu x = u(t) có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int f(x)dx = \int f(u(t)).u'(t).dt$$

Dạng 2: Nếu t = v(x) có đạo hàm liên tục trên K và có

$f(x)dx = g(t)dt$ thì: $\int f(x)dx = \int g(t)dt$.

Nguyên hàm từng phần

Nếu u(x), v(x) có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

1.41. TÍCH PHÂN

Giả sử f(x) liên tục trên khoảng K và a, b ∈ K và F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) thì: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Tính chất:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

Nếu f(x) ≥ 0 trên [a,b] thì $\int_a^b f(x) \ge 0$.

Tích phân đổi biến số:

Dạng 1: Nếu x = u(t) có đạo hàm liên tục trên [α, β] và u(α) = a, u(β) = b thì: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t).dt$.

Dạng 2: Nếu t = v(x) có đạo hàm liên tục và f(x)dx = g(t)dt thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt$$

Tích phân từng phần:

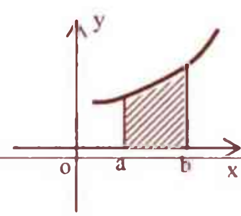
Nếu u(x), v(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [a;b] thì

$$\int_a^b u.dv = (u.v)\Big|_a^b - \int_a^b v.du.$$

1.42. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

Diện tích hình phẳng

– Từ định nghĩa tích phân, với y = f(x) ≥ 0 và liên tục trên đoạn [a,b] thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục hoành và 2 đường thẳng x = a, x = b là:



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

– Mở rộng cho y = f(x) bất kỳ liên tục trên đoạn [a,b] thì diện tích giới hạn như trên là: $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

– Đối với 2 đồ thị y = f(x), y = g(x) liên tục trên đoạn [a,b] thì diện tích giới hạn bởi 2 đồ thị đó và 2 đường thẳng x = a, x =b là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

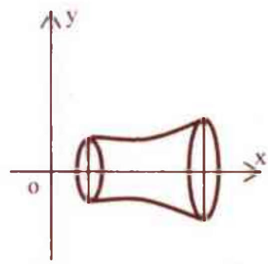
Nếu trên đoạn 2 nghiệm x = m,x = n liên tiếp của f(x) = g(x) thì:

$$\int_m^n |f(x) - g(x)|dx = \left|\int_m^n (f(x) - g(x))dx\right|.$$

Thể tích khối tròn xoay

– Thể tích vật thể tổng quát

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



– Thể tích khối tròn xoay:

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi y = f(x), y = 0 (trục hoành) và x = a, x = b quanh trục hoành $V = \pi\int_a^b y^2dx$.

Đặc biệt, nếu quay quanh trục Oy hình phẳng giới hạn bởi x = g(y), x = 0 và y = c, y = d thì có thể tích: $V = \pi\int_c^d x^2dy$.

1.43. PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

– Tập hợp số phức: **C**

– Số phức (dạng đại số): z = a + bi (a, b ∈ **R**, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)

Gọi a là phần thực, b là phần ảo của z.

– Hai số phức bằng nhau a + bi = a' + b'i (a, b, a', b' ∈ **R**) ⇔ a = a', b = b'

– Cộng, trừ số phức, nhân hai số phức:

(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i

(a + bi) – (a' + b'i) = (a – a') + (b – b')i

(a + bi) (a' + b'i) = (aa' – bb') + (ab' + ba')i (a, b, a', b' ∈ **R**)

– Số phức liên hiệp của số phức: z = a + bi, (a, b ∈ **R**) là $\bar{z}$ = a – bi

Kết quả $\bar{\bar{z}} = z; \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$.

– Môn đun của số phức: $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

– Số phức nghịch đảo của số phức z ($z \neq 0$): $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$

– Chia hai số phức: Phép chia của z' cho $z \neq 0$:

$$\frac{z'}{z} = z'.z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Với hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i \neq 0$ thì có:

$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$$

Kết quả

1) $i^2 = -1, i^3 = i^2 i = -i, i^4 = i^2.i^2 = 1,...,$ tổng quát:
$i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -1.$

2) $(1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i; (1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i.$

3) $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8, (1 - i\sqrt{3})^3 = -8$
$(\sqrt{3} + i)^3 = 8i, (\sqrt{3} - i)^3 = -8i.$

4) z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

1.44. CĂN BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM PHỨC

Căn bậc hai của số phức

z là một căn bậc hai của số phức w $\Leftrightarrow z^2 = w$.

Số phức $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$ và số phức $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau:

Hai căn bậc hai của số thực $w = a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$.

Hai căn bậc hai của số thực $w = a < 0$ là $\pm i\sqrt{-a}$.

Phương trình bậc hai nghiệm phức

$Az^2 + Bz + C = 0$ với A, B, C là các số phức, $A \neq 0$

Lập biệt thức: $\Delta = B^2 - 4AC$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z = \frac{-B}{2A}$

Nếu $\Delta \neq 0$, gọi các căn bậc hai của Δ là ω thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \frac{-B \pm \omega}{2A}$.

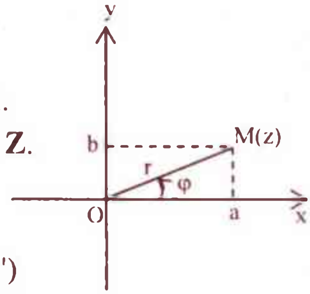
Đặc biệt: nếu Δ là số thực $\Delta < 0$ thì nghiệm: $z_{1,2} = \frac{-B \pm i\sqrt{-\Delta}}{2A}$ và nếu Δ là số thực $\Delta > 0$ thì nghiệm: $z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$.

1.45. SỐ PHỨC LƯỢNG GIÁC

Cho số phức: $z = a + bi$ với a, b $\in$ **R**, $z \neq 0$, ta có

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r > 0$ là dạng lượng giác của z

với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.



Gọi φ là một acgumen của z với số đo rađian.

Góc lượng giác (Ox, OM) = $\varphi + k2\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

tức là các acgumen sai khác $k2\pi$.

Phép toán dạng lượng giác

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

thì có: $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')],\ z' \neq 0$$

Đặc biệt: $z^2 = r^2 = (\cos2\varphi + i\sin2\varphi)$

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Công thức Moa-vrơ

Với n là số nguyên, $n \geq 1$ thì $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Đặc biệt: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ HÌNH HỌC

2.1. ĐƠN VỊ VÀ ĐỘ DÀI CUNG

– Hai đơn vị: cung tròn bán kính R, có độ dài l, có số đo radian là α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo a^{o} $(0 \le a \le 360)$ thì:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi a}{180},\ a = \frac{\alpha.180}{\pi}$$

$$1^{o} = \frac{\pi}{180}\ \text{rad},\ 1\ \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o}$$

Với $\pi \approx 3{,}14$ thì $1^{o} \approx 0{,}0175$ rad và ngược lại, 1 rad $\approx 57^{o}17'45''$

– Độ dài cung $l = \alpha R$.

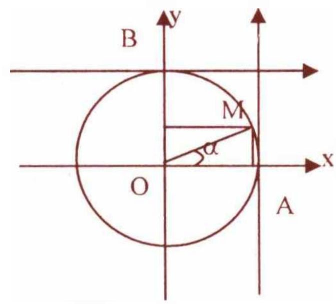
2.2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Cho góc lượng giác α, xét điểm M(x; y) trên đường tròn lượng giác xác định bởi α:

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$,

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ (khi $\alpha \ne 90^{0} + k180^{0}$)

$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$ (khi $\alpha \ne k180^{0}$);



Hệ thức cơ bản:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\text{khi } \cos\alpha \ne 0);\ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\text{khi } \sin\alpha \ne 0)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Các trục lượng giác:

Trục sin là trục tung Oy, trục cosin là trục hoành Ox.

Trục tang là At cùng hướng với trục tung, A(1; 0).

Trục cotang là Bs cùng hướng với trục hoành, B(0; 1).

– Dấu các giá trị lượng giác khi điểm cuối M thuộc góc phần tư.

	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cot	+	–	+	–

2.3. GÓC CUNG LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Đối nhau: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$;

Hơn kém π: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$; $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$;

Bù nhau: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$;

Phụ nhau: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$;

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$.

2.4. CÔNG THỨC CỘNG

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Đặc biệt: $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$,

$\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha \mp \frac{\pi}{4})$.

2.5. CÔNG THỨC NHÂN

Công thức nhân hai:

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\ \tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Công thức hạ bậc hai:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos2\alpha}{2},$$

hay: $1 + \cos2\alpha = 2.\cos^2\alpha$; $1 - \cos2\alpha = 2.\sin^2\alpha$.

$$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos2\alpha}{1 + \cos2\alpha},\ \cot^2\alpha = \frac{1 + \cos2\alpha}{1 - \cos2\alpha}.$$

Công thức nhân ba:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

2.6. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta};\ \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta};\ \cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)].$$

2.7. ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC VÀO ĐẠI SỐ

Lượng giác hoá: đưa hàm số lượng giác vào bài toán đại số.

– Nếu $|x| \le 1$ thì đặt $x = \sin t$ hay $x = \cos t$

– Nếu $|x| \le r$, $r > 0$ thì đặt $x = r.\sin t$ hay $x = r.\cos t$

– Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$

– Nếu $x^2 + y^2 = r^2$ thì đặt $x = r.\sin t$ và $y = r.\cos t$

– Nếu $|x| \ge 1$ thì đặt $x = \dfrac{1}{\sin t}$ hay $\dfrac{1}{\cos t}$

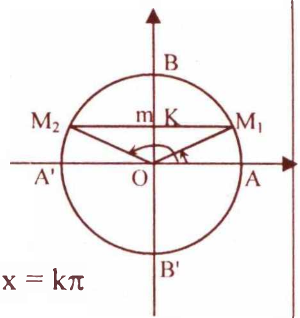
– Nếu $x \in \mathbf{R}$ thì đặt $x = \tan u$ hay $x = \cot u$

– Nếu có $a + b + c = abc$, $ab + bc + ca = 1$ thì đặt các đại lượng tang của các góc như các góc của tam giác,...

2.8. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

– **Phương trình sinx = m**

Vì $|\sin x| \le 1$ với mọi x nên khi $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm, còn khi $|m| \le 1$ thì phương trình có nghiệm.



$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Đặc biệt: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

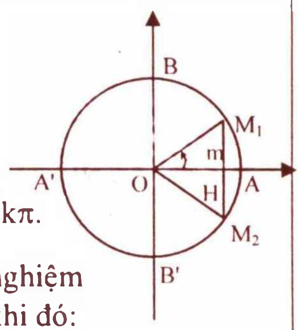
$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

Với $|m| \le 1$, phương trình sinx = m có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ta kí hiệu nghiệm đó là arcsin m, khi đó:

$$\sin x = m, |m| \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbf{Z}.$$

– **Phương trình cosx = m**

Vì $|\cos x| \le 1$ với mọi x nên khi $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm, còn khi $|m| \le 1$ thì phương trình có nghiệm



$$\cos x = \cos\alpha = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Đặc biệt: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

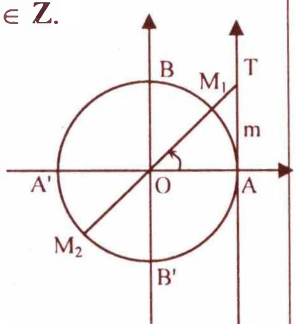
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi;\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Với $|m| \le 1$, phương trình cosx = m có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $[0; \pi]$, kí hiệu nghiệm đó là arccos m, khi đó:

$$\cos x = m, |m| \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbf{Z}.$$

– **Phương trình tanx = m**

Điều kiện xác định là $\cos x \ne 0$. Vì tanx nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.



$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Đặc biệt: $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Với mọi số m cho trước,

phương trình tanx = m có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

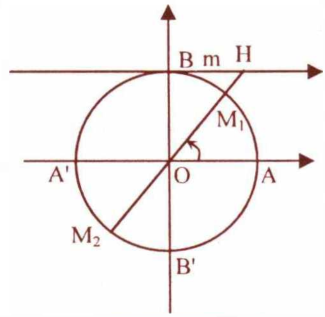
Ta kí hiệu nghiệm đó là arctan m, khi đó:

$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

– **Phương trình cotx = m**

Điều kiện xác định là $\sin x \neq 0$. Vì cotx nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi x.

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$



Đặc biệt: $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Với mọi số m cho trước, phương trình cotx = m có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $(0; \pi)$.

Ta kí hiệu nghiệm đó là arccotx, khi đó:

$\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, m + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

2.9. PHƯƠNG TRÌNH THEO MỘT HÀM LƯỢNG GIÁC

Dạng:

$a.\sin x + b = 0$; $\quad a.\cos x + b = 0$

$a.\tan x + b = 0$; $\quad a.\cot x + b = 0$

$a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0$; $\quad a.\cos^2 x + b.\cos x + c = 0$

$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0$; $\quad a.\cot^2 x + b.\cot x + c = 0$

$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x + c.\sin x + d = 0,\ldots$

Chọn một hàm số lượng giác, biểu thức lượng giác thích hợp để đưa phương trình cho theo hàm số lượng giác, biểu thức lượng giác đó hoặc tích các phương trình cơ bản.

2.10. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN, COS

Dạng: $a.\sin x + b.\cos x = c$ với a hoặc b khác 0.

Ta có $a^2 + b^2 \neq 0$ nên:

$$a.\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

Vì $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại số α sao cho:

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ta có:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha).$$

Do đó, việc giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ được đưa về giải phương trình lượng giác cơ bản $\sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Suy ra điều kiện phương trình: a.sinx + b.cosx = c có nghiệm khi và chỉ khi $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2$.

Đặc biệt: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{6})$; $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{3})$.

2.11. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP (THUẦN NHẤT) ĐỐI VỚI SIN, COS

Dạng: $a.\sin x + b.\cos x = 0$,

$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = 0$,

$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x.\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos^3 x = 0$,...

Với bậc n = 1, 2, 3.... Xét cosx = 0, xét cosx ≠ 0 và chia 2 vế cho $\cos^n x$ thì phương trình thành phương trình theo t = tanx.

Tăng giảm bậc: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$C = C(\sin^2 x + \cos^2 x) = C(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \ldots$

2.12. VECTƠ VÀ PHÉP TOÁN

– Vectơ là một đoạn thẳng có hướng

– Vectơ $\overrightarrow{AB}$: A là điểm đầu, B là điểm cuối.

– Độ dài hay môđun của $\overrightarrow{AB}$ là đoạn AB: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

– Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau: $\vec{0}$

– Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

– Hai vectơ cùng phương khi giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

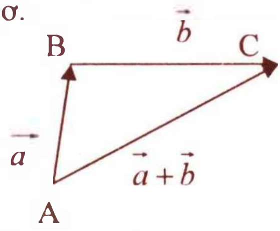
– Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

– Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài:

$\vec{a} = \vec{b}$. Để thuận lợi, ta kí hiệu một vectơ xác định nào đó bởi một chữ in thường và có dấu vectơ trên đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$,...

Tổng và hiệu của hai vectơ

– Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy điểm A bất kỳ trong mặt phẳng, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và vẽ tiếp vectơ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ gọi là tổng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Mở rộng tổng của nhiều vectơ.



– Tính chất:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

– Quy tắc ba điểm: Với ba điểm M, N, P tuỳ ý thì:

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

– Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành ABCD thì:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

– Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ $\vec{b}$ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$:

$\vec{b} = -\vec{a}$: ngược hướng và cùng độ dài với $\vec{a}$.

– Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

– Quy tắc về hiệu của hai vectơ: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$.

Phép nhân của vectơ với số thực

– Tích (phép nhân) của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ: $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

– Tính chất:

$k.(l\vec{a}) = (kl).\vec{a}$, $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$

$k.\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

– Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$

– Điểm I là trung điểm đoạn AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với M tuỳ ý

– Điểm G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với M bất kỳ

– Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

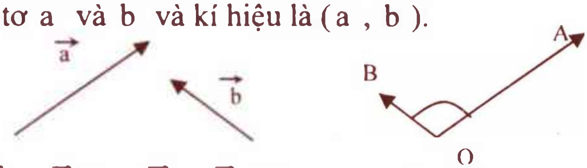
Trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ khi:

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0},$$

Tâm tỉ cự G của hệ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gắn với hệ số $k_1, k_2, \ldots, k_n$ có tổng $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$: $k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

2.13. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG

– Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



– Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hay $\vec{b} = \vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý từ 0° đến 180°. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

– Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

– Tính chất: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$ với mọi $k \in \mathbf{R}$

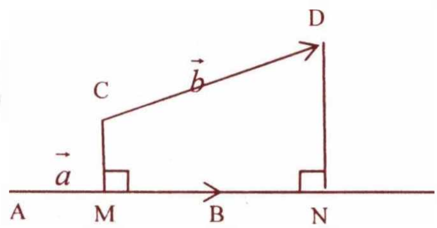
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

– Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$,

– Công thức chiếu:

$$\vec{a}.\vec{b} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \vec{a}.\vec{b}\,'$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overline{AB}.\overline{MN}$$



Đặc biệt trong tam giác ABC thì:

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

– Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

– Góc giữa hai vectơ: $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD}$

– Góc của tam giác ABC: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$

– Để tính độ dài AB, ta có thể dùng bình phương vô hướng:

$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

2.14. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

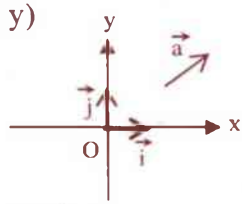
Hệ trục Oxy hay $(O, \vec{i}, \vec{j})$ với hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ nên Ox và $\vec{j}$ trên Oy.

– Toạ độ vectơ $\vec{a}$ trên Oxy: $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}\,(x; y)$

$\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

$\vec{i} = (1; 0)$

$\vec{j} = (0; 1)$



– Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a}\,(x; y) = \vec{b}\,(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

– Cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$

Phép cộng: $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$

Phép trừ: $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

Phép nhân với số k: $k\vec{a} = (kx; ky)$

$\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi có số $k \in \mathbf{R}$: $x' = kx$, $y' = ky$.

– Toạ độ điểm M: M(x; y) hay M = (x; y): $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

– Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$

– Toạ độ điểm I của đoạn AB: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

– Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

– Biểu diễn một vectơ theo 2 vectơ không cùng phương là giải hệ phương trình để tìm 2 hệ số k, m: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.

– Tích vô hướng hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

– Độ dài vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

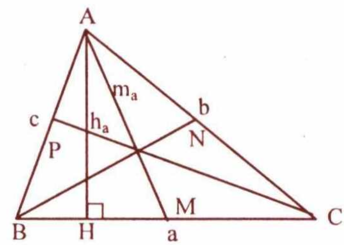
– Khoảng cách $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

– Góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

2.15. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho tam giác ABC gọi 3 cạnh a, b, c đối diện với 3 góc A, B, C, tương ứng 3 đường cao h_a, h_b, h_c, 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c, 3 phân giác d_a, d_b, d_c hay l_a, l_b, l_c bán kính đường tròn nội tiếp r, ngoại tiếp R và nửa chu vi $p = \frac{(a+b+c)}{2}$.



Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra: $a = 2R\sin A$ hay $\sin A = \frac{a}{2R}$

Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Suy ra: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Định lý trung tuyến: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

Suy ra: $m_a = AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Định lý diện tích: $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab.\sin C$

$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hêrông)

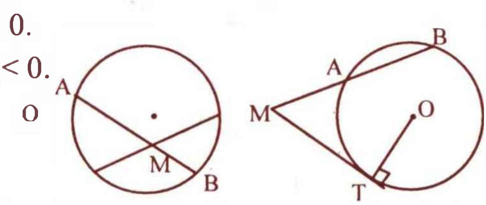
2.16. ĐƯỜNG TRÒN

– Qua điểm M vẽ cát tuyến MAB với đường tròn (O; R) thì tích $\overline{MA}.\overline{MB}$ gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn đó và kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$: $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2$.

Nếu M nằm ngoài (O; R) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} > 0$. Trong trường hợp này nếu MT là tiếp tuyến của (O; R) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$.

Nếu M nằm trên (O; R) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$.

Nếu M nằm trong (O; R) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} < 0$.



– Cho tứ giác ABCD. Hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn là:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$$

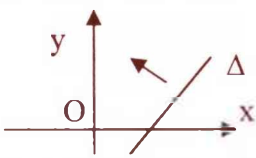
– Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn thẳng AB. Điều kiện cần và đủ để MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $\overline{MA}.\overline{MB} = MC^2$.

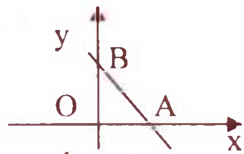
2.17. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

– Vectơ pháp tuyến (VTPT) của một đường thẳng vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng.

– Phương trình tổng quát của đường thẳng qua điểm $I(x_o; y_o)$ và có VTPT $\vec{n}(a; b)$ là:

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0.$$





– Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn: đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) với $a, b \neq 0$ là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

– Phương trình đường thẳng theo hệ số góc: đi qua $I(x_o; y_o)$ và có hệ số góc $k = \tan(Ox; \Delta)$: $y - y_o = k(x - x_o) \Rightarrow y = kx + m$.

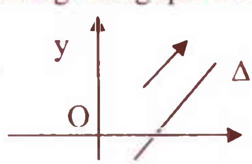
$d' // d: ax + by + c = 0 \Rightarrow d': ax + by + c' = 0,\ c' \neq c$

$d'' \perp d: ax + by + c = 0 \Rightarrow d'': bx - ay + c'' = 0.$

– Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng: vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng đường thẳng.

– Phương trình tham số của đường thẳng của đường thẳng qua điểm $I(x_o; y_o)$ và có VTCP $\vec{u}(a; b)$

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$



– Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}$, với $a, b \neq 0$

d qua A, B thì có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

d có hệ số góc k thì VTCP $\vec{u} = (1; k)$.

2.18. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

– Khoảng cách giữa 2 điểm: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B + y_A)^2}$

– Khoảng cách từ điểm $M_o(x_o; y_o)$ đến đường thẳng Δ

$ax + by + c = 0$ được cho bởi công thức $d(M_o; \Delta) = \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Để tính khoảng cách từ một điểm M(x; y) đến đường thẳng thì đường thẳng phải viết dạng phương trình tổng quát.

– Vị trí của 2 điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N, y_N)$ đối với đường thẳng Δ:

$ax + by + c = 0$:

M, N cùng phía Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

M, N khác phía Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

– Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

– Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ được tính bởi công thức:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

– Góc giữa 2 đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì bằng 0^o. Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau là góc nhỏ nhất φ trong bốn góc tạo thành. Gọi $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ là các VTCP và $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ là các VTPT thì:

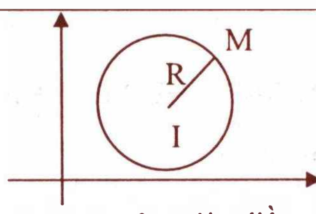
$$\cos\varphi = |\cos(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})| = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|.$$

– Góc A của tam giác ABC là góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

2.19. ĐƯỜNG TRÒN

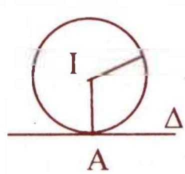
– Đường tròn tâm I $(x_o; y_o)$, bán kính R có phương trình:

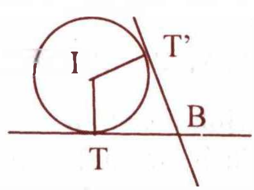
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$



– Phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm I(–a; –b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I tại điểm A: đường thẳng tiếp tuyến qua A, có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AI}$.





– Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm I bán kính R đi qua điểm B: Lập phương trình đường thẳng qua B có VTPT $\vec{n} = (a; b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Từ điều kiện tiếp xúc để tìm a và b.

– Tiếp tuyến chung với 2 đường tròn (C) và đường tròn (C'):

$$\Delta: ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } \begin{cases} d(I,\Delta) = R \\ d(I,\Delta') = R' \end{cases}.$$

2.20. ĐƯỜNG ELIP

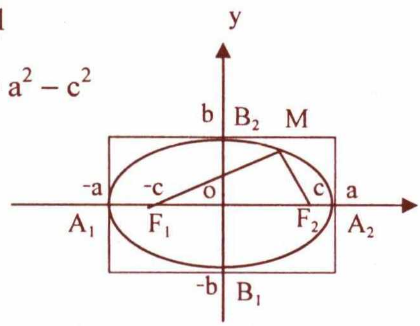
Cho 2 điểm F_1, F_2 phân biệt

Elip (E) = $\{M / MF_1 + MF_2 = 2a\}$, $a > c$.

F_1, F_2 gọi là 2 tiêu điểm và tiêu cự $F_1F_2 = 2c$

Phương trình chính tắc: (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với $a > b > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$



Tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

Trục lớn 2a, trục nhỏ 2b

Hình chữ nhật cơ sở $2a \times 2b$

Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} < 1$

Bán kính qua tiêu điểm:

$r_1 = MF_1 = a + ex$, $r_2 = MF_2 = a - ex$.

Elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có 2 đường chuẩn:

Δ_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ ứng với tiêu điểm F_1 $(-c; 0)$

Δ_2: $x = \dfrac{a}{e}$ ứng với tiêu điểm F_2 $(c; 0)$.

2.21. CÁC PHÉP DỜI HÌNH

Định nghĩa

Phép biến hình F gọi là phép dời hình nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = MN, tức là phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

F: $\begin{matrix} M \longmapsto M' \\ N \longmapsto N' \end{matrix}$

thì M'N' = MN.

Định lí cơ bản

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

Các phép dời hình đặc biệt

– Phép đồng nhất, là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' trùng với M, tức là biến mọi điểm thành chính nó.

– Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ cho trước, là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

– Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua d. Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng trục, kí hiệu là $Đ_d$.

– Phép đối xứng qua điểm O là phép biến đổi mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O. Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng tâm, kí hiệu là $Đ_o$.

– Phép quay tâm O góc quay φ, biến điểm O thành O và biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho OM' = OM, (OM, OM') = φ, kí hiệu $Q_{(0;\varphi)}$.

Các phép đồng nhất, phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép quay đều là phép dời hình.

Hai hình bằng nhau

– Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

– Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

– Nếu hình (H_1) bằng hình (H_2) và hình (H_2) bằng hình (H_3) thì hình (H_1) bằng hình (H_3).

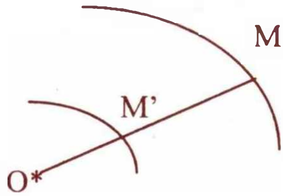
2.22. PHÉP VỊ TỰ

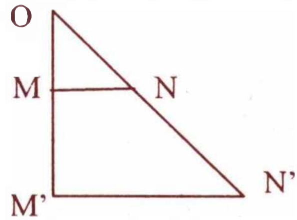
– Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = kMN, tức là phép đồng dạng là phép biến hình không làm thay đổi tỉ số khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

– Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó,…

Phép vị tự

– Cho điểm O và một số k ≠ 0. Phép biến hình biến một điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM'} = k\overline{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k. Kí hiệu $V_{(O,k)}$.





– Nếu M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k thì $\overline{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$; $M'N' = |k|.MN$.

– Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số |k|.

– Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

– Phép biến hình D gọi là phép dời hình nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = MN, tức là phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

2.23. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN HÌNH KHÔNG GIAN

Điểm, đường thẳng, mặt phẳng:

– Điểm thường đặt tên A, B, C, D,...

– Đường thẳng thường đặt tên a, b, c, d,..., Δ, Δ',...

– Mặt phẳng thường đặt tên (α), (β), (γ),..., (P), (Q),...

Quan hệ thuộc:

– Điểm A thuộc đường thẳng a: $A \in a$.

– Điểm B không thuộc đường thẳng a: $B \notin a$

– Điểm A thuộc mặt phẳng (P): $A \in (P)$, $A \in mp(P)$.

– Điểm B không thuộc mặt phẳng (P): $B \notin (P)$, $B \notin mp(P)$.

– Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Q): $d \subset (Q)$, $d \subset mp(Q)$

– Đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (α): $a \not\subset (\alpha)$, $a \not\subset mp(\alpha)$.

Hình biểu diễn:

Vẽ hình phẳng của các hình không gian với các quy tắc:

– Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.

– Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

– Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A' thuộc đường thẳng a', trong đó a' biểu diễn cho đường thẳng a.

– Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (– – –) để biểu diễn cho những đường bị khuất.

Các tính chất thừa nhận của hình học không gian:

– Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

– Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

– Tính chất 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

– Tính chất 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung này gọi là giao điểm của 2 mặt phẳng cắt nhau.

– Tính chất 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lý: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

Cách xác định đường thẳng:

Một đường thẳng được xác định khi biết:

– hai điểm phân biệt của nó,

– hai mặt phẳng phân biệt cùng chứa nó.

Cách xác định mặt phẳng:

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết:

– Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng;

– Mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

– Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Nếu có nhiều điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng không đồng phẳng.

Hình chóp và hình tứ diện:

– Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ với đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác,... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác...

– Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện hay là tứ diện và kí hiệu là

ABCD. Tứ diện ABCD có thể coi là hình chóp tam giác với 4 cách chọn đỉnh chóp.

2.24. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

– Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.

– Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

– Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

– Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian: có 4 vị trí tương đối là 2 đường thẳng trùng nhau, song song, cắt nhau và chéo nhau.

– Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

– Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Trọng tâm của tứ diện

Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

2.25. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG

– Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

– Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là đường thẳng song song mặt phẳng, đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

Các định lí cơ bản:

Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (P) thì a song song với (P).

– Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.

– Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

– Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

– Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.

2.26. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

– Hai mặt phẳng song song nếu chúng không có điểm chung.

– Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là 2 mặt trùng nhau, 2 mặt cắt nhau và 2 mặt song song.

Các định lý cơ bản:

– Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

– Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

– Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).

– Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

– Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

Định lý Ta-lét:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Đảo lại,giả sử trên hai đường thẳng a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Hình lăng trụ và hình chóp cụt

– Hình lăng trụ có 2 đáy là 2 mặt song song và bằng nhau, các cạnh bên song song và bằng nhau. Nếu đáy là hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác,...

– Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp. Trong hình hộp, bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, điểm cắt nhau đó gọi là tâm hình hộp.

– Hình chóp cụt tạo nên khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng song song với đáy. Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác,...

2.27. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa vectơ và các phép toán, quy tắc trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng:

– Tổng 2 vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

– Hiệu 2 vectơ: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

– Nhân vectơ với 1 số: $k\vec{a}$

– Hai vectơ cùng phương: giá của chúng song song hoặc trùng nhau, $\vec{b} = k\vec{a}$

– Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$

– Quy tắc trung điểm: I là trung điểm của AB thì:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và với mọi điểm M thì: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

– Quy tắc trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, và với mọi điểm M thì:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

– Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD thì:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

– Trọng tâm tứ diện: G là trọng tâm tứ diện ABCD thì

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, và với mọi điểm M thì:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MD}$

– Quy tắc hình hộp: ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$

– Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

– Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vectơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với các số m, n, p duy nhất.

2.28. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

– Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.

– Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°. Kí hiệu $a \perp b$.

– Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc ta chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ hay $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

– Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

– Nếu a // b và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

2.29. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

– Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

– Định lí: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

– Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

– Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

– Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

– Định lí ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

– Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

– Trục của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tam giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp.

Trục của tam giác là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác.

Quan hệ song song và vuông góc

– Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

– Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

– Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

– Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.

– Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

– Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^o.

– Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

2.30. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Góc giữa hai mặt phẳng

– Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc của chúng là 0^o.

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ nếu mặt phẳng (R) vuông góc với Δ, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến p và q thì góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng p, q.

– Diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

Hai mặt phẳng vuông góc

– Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

– Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

– Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

– Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

– Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

– Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

2.31. KHOẢNG CÁCH

– Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên đường thẳng.

– Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

– Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của đường thẳng đến mặt phẳng.

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

– Đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng chéo nhau gọi là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau.

– Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2.32. KHỐI ĐA DIỆN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

Hình đa diện và khối đa diện

– Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện:

(1) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

(2) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

– Hình đa diện chia không gian làm hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài. Hình đa diện cùng với phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.

– Mỗi khối đa diện có thể phân chia được thành những khối tứ diện.

Mỗi đa giác của hình H được gọi là một mặt của khối đa diện. Các đỉnh, các cạnh của mỗi mặt còn gọi là đỉnh, cạnh của khối đa diện. Các điểm nằm trong hình H còn gọi là điểm trong của khối đa diện.

Phép dời hình

– Một phép biến hình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ: nếu F biến hai điểm bất kì M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN.

Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng...

Hợp thành của những phép dời hình là phép dời hình.

Các phép dời hình đặc biệt

– Phép đồng nhất: phép dời hình biến điểm M bất kì thành chính nó.

– Phép tịnh tiến: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{MM'} = \vec{v}$.

– Phép đối xứng qua đường thẳng (phép đối xứng trục): Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho trong mặt phẳng (M, d), d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.

– Phép đối xứng qua một điểm (phép đối xứng tâm): Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM} + \overline{OM'} = \vec{0}$, hay O là trung điểm của MM'.

– Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.

Hai hình bằng nhau

– Hai hình đa diện gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đối với các khối đa diện lồi: Nếu phép dời hình F biến tập các đỉnh của khối đa diện lồi H thành tập các đỉnh của khối đa diện lồi H' thì F biến H thành H'.

Định lý: Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', AC = A'C', BD = B'D'.

2.33. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU VÀ PHÉP VỊ TỰ

Phép vị tự

Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho

$$\overline{OM'} = k\overline{OM}$$ gọi là phép vị tự.

Điểm O gọi là tâm vị tự, số k gọi là tỉ số vị tự.

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$ và do đó $M'N' = |k|MN$.

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

– Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành hình H_1 mà hình H_1 bằng hình H'.

Khối đa diện đều

– Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn thẳng AB cũng thuộc khối đó.

– Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

(1) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh;

(2) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

Khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh được gọi là khối đa diện đều loại {n, p}.

– Có năm loại khối đa diện đều: khối tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

Khối tứ diện đều là loại {3; 3}; khối bát diện đều là loại {3; 4}; khối lập phương là loại {4; 3}; khối 20 mặt đều là loại {3; 5} và khối 12 mặt đều là loại {5; 3}.

2.34. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích của khối đa diện: mỗi khối đa diện có thể tích là một số dương, thoả mãn ba tính chất sau đây:

(1) Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(2) Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ đó.

(3) Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.

– Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó. V = B. h.

– Thể tích khối hộp chữ nhật có 3 kích thước a,b,c là: V = abc.

–Thể tích khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$.

– Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối tứ diện tương ứng.

– Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó: $V = \frac{1}{3}B.h$

– Thể tích khối chóp cụt: $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{BB'} + B')h$.

2.35. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

– Tập hợp các điểm trong không gian, cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R. Kí hiệu là S(O; R).

$S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$

– Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O; R) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu S(O; R) hoặc hình cầu S(O; R). Như vậy, khối cầu S(O; R) là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R$.

Một mặt cầu được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc biết một đường kính AB của nó.

– Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu:

Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó:

– Nếu d < R thì mp(P) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm là H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

– Nếu d = R thì mp(P) tiếp xúc mặt cầu tại một điểm duy nhất H.

– Nếu d > R thì mp(P) không cắt mặt cầu S(O; R)

Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ, gọi d là khoảng cách từ O tới Δ và H là hình chiếu của O trên Δ. Khi đó:

– Nếu d < R thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt A, B và dây AB = $2\sqrt{R^2 - d^2}$.

– Nếu d = R thì Δ tiếp xúc mặt cầu tại một điểm duy nhất.

– Nếu d > R thì Δ không cắt mặt cầu.

Tiếp tuyến xuất phát từ 1 điểm ngoài mặt cầu:

Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

– Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp.

– Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là lăng trụ đứng và đáy của hình lăng trụ đó có đường tròn ngoại tiếp.

Xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp

– Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn (C), gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1 thì $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

– Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn. Gọi I, I' là hai tâm của đường tròn ngoại tiếp 2 đáy thì II' là trục của 2 đường tròn. Gọi O là trung điểm của II' thì O cách đều các đỉnh nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt cầu nội tiếp hình đa diện

Mặt cầu tiếp xúc với mọi mặt của hình đa diện gọi là mặt cầu nội tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là ngoại tiếp mặt cầu đó.

Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp:

Tìm điểm I các đều tất cả các mặt của khối đa diện. Với 2 mặt song song thì I thuộc mặt phẳng song song cách đều, với 2 mặt phẳng cắt nhau thì I thuộc mặt phân giác (chứa giao tuyến và qua một đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng lần lượt thuộc 2 mặt phẳng, vuông góc với giao tuyến).

2.36 MẶT TRỤ - HÌNH TRỤ

Mặt trụ tròn xoay: Mặt trụ tròn xoay sinh ra khi quay đường thẳng *l* song song đường thẳng Δ cố định và cách đường thẳng Δ một đoạn R không đổi.

Mặt trụ (T) có trục Δ và bán kính R.

Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ thì đường thẳng l đi qua M và song song với Δ cũng nằm trên mặt trụ đó.

Hình trụ, khối trụ

Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') vuônggóc với trục được gọi là hình trụ.

Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là khối trụ.

– Trục OO'

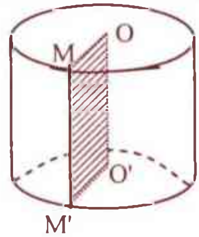
– Đường sinh $MM' = l$

– Bán kính đáy R và chiều cao h thì

$h = l = OO'$, $R = OM$

– Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rl$

– Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$.



2.37. MẶT NÓN - HÌNH NÓN

Mặt nón tròn xoay

Mặt nón tròn xoay sinh ra khi quay đường thẳng l cắt đường thẳng Δ cố định tại S và hợp với đường thẳng Δ một góc α không đổi. Mặt nón (N) có trục Δ, đỉnh S và góc ở đỉnh là 2α.

Nếu M là một điểm tuỳ ý của mặt nón khác với điểm S thì đường thẳng SM nằm hoàn toàn trên mặt nón đó.

Hình nón, khối nón

– Phần của mặt nón giới hạn bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục được gọi là hình nón.

– Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

Trục SO

Đường sinh $SM = l$

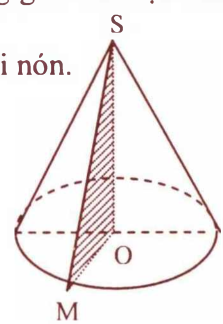
Góc ở đỉnh là 2α.

Bán kính đáy R và chiều cao h thì:

$l^2 = h^2 + R^2$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



2.38. TOẠ ĐỘ KHÔNG GIAN

Ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trên 3 trục Ox, Oy, Oz:

$\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

$M(x,y,z)$ hay $M = (x,y,z)$: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$\vec{a}(x,y,z)$ hay $\vec{a} = (x,y,z)$: $\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Phép toán vectơ

Cho hai vectơ: $\vec{u} = (x,y,z)$ và $\vec{v} = (x',y',z')$ thì:

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z')$; $k\vec{u} = (kx; ky, kz)$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Cho hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ thì:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

M chia AB theo tỉ $k \neq 1$: $M\left(\frac{x_1 - kx_2}{1-k}; \frac{y_1 - ky_2}{1-k}; \frac{z_1 - kz_2}{1-k}\right)$.

Tích có hướng

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x,y,z)$ và $\vec{b} = (x',y',z')$ là một vectơ, kí hiệu và có tọa độ:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right) = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx').$$

Kết quả:

– Vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc chung với $\vec{a}, \vec{b}$

– Độ dài của vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$: $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

– 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

– 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

– 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq 0$

Diện tích và thể tích

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}|$

Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A'B'C': $V = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}|$.

2.39. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương trình mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$, với điều kiện $A^2+B^2+C^2-D>0$ là mặt cầu (S) có tâm I(−A, −B, −C) và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

2.40. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Vectơ pháp tuyến

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng.

Một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến cùng phương với nhau nên ta có thể chọn tọa độ tỉ lệ.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0,y_0)$ và có vectơ pháp tuyến

$\vec{n}=(A,B,C)$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ có phương trình:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

và biến đổi thành dạng phương trình tổng quát:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

Phương trình các mặt tọa độ:

(Oxy): $z=0$, (Oyz): $x=0$, (Ozx): $y=0$.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Mặt phẳng cắt 3 trục Ox, Oy Oz tại 3 điểm khác gốc O là A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

(P): $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ và

(Q): $A'x+B'y+C'z+D'=0$, $A'^2+B'^2+C'^2\neq 0$.

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau : $A:B:C\neq A':B':C'$

– Trùng nhau : $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

– Song song : $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và mp(P). Gọi IH = d là khoảng cách từ tâm I đến (P) thì:

– Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến. Đặc biệt, khi d = 0 thì mp(P) đi qua tâm I của mặt cầu, giao tuyến là đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính R.

– Nếu d = R: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu.

– Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.

2.41. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Vectơ chỉ phương

Vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.

Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương cùng phương với nhau nên ta có thể chọn tọa độ tỉ lệ.

Phương trình của đường thẳng:

Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u}=(a,b,c)$, $a^2+b^2+c^2>0$.

– Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

– Phương trình chính tắc khi a, b, c $\neq$ 0: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

Vị trí tương đối của 2 đường thẳng:

Đường thẳng d qua $A(x_A,y_A,z_A)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a,b,c)$.

Đường thẳng d' qua $B(x_B,y_B,z_B)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a',b',c')$.

Có 4 vị trí tương đối:

– Chéo nhau: $[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{AB}\neq 0$

– Cắt nhau: $[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{AB}=0$ và a: b: c $\neq$ a': b': c'

– Trùng nhau: $a : b : c = a' : b' : c' = (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

– Song song: $a : b : c = a' : b' : c' \neq (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Mặt phẳng (P) qua M_0 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau: $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$

– Song song: $\vec{u}.\vec{n}=0$ và $A\notin(P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u}.\vec{n}=0$ và $A\in(P)$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ và d = IH là khoảng cách từ O tới Δ.

– Nếu d < R: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B. Độ dài dây

$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

– Nếu d = R: đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu.

– Nếu d > R: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

2.42. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

– Góc giữa hai vectơ: $\vec{u} = (x,y,z)$ và $\vec{v} = (x',y',z')$:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

– Góc của tam giác ABC: $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

– Góc giữa 2 đường thẳng: d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$ thì

$\cos(d, d') = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

– Góc giữa 2 mặt phẳng: mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$ thì

$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$.

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$ thì $\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$.

– Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

– Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:

(Oxy) là $|z_0|$; (Oyz) là $|x_0|$; (Ozx) là $|y_0|$.

– Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng: (P): Ax + By + Cz + D = 0 là: $d(M_0, P) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

– Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:

Điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

- $$d(M_0; d) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM_0}; \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}.$$

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$

Đường thẳng d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right|}.$$

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{x}{4+x^2}$.

Câu 3. a) Tìm các căn bậc hai của số phức $\varpi = \dfrac{(3+i)^2}{1+i}$.

b) Tìm tất cả nghiệm thực dương của phương trình

$$10^{2x} + 250^x = 40^x + 6(25^x - 4^x)^2.$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^6 + 1}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có đỉnh A(2; –1; 3), B(4; 0; 1), C(–10; 5; 3). Tìm chân đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $4(\cos^3x + \sin^3x) = \cos x + 3\sin x$

b) Từ sáu chữ số 0; 1; 2; 3; 6; 9. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có bốn chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}$ bằng 60^0, góc giữa mặt phẳng (A'BD) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích hình hộp. Chứng minh CD song song với mặt phẳng (A'BD) và tính theo a khoảng cách giữa chúng.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định điểm $M(x_0; y_0)$ với các toạ độ $(x_0; y_0)$ nguyên, sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d: $30x - 70y + 21 = 0$ là ngắn nhất.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $(x^2 + x)^2 + (x-1)^2 = 6(x+1)^2$.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2x} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \text{ với } x > 0.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- Sự biến thiên:

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng: $x = 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = 2$ nên tiệm cận ngang: $y = 2$.

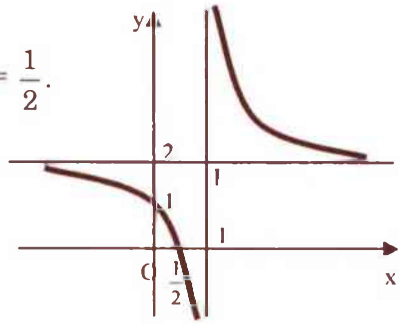
$y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. Hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

• Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.



Đồ thị nhận giao điểm I(1; 2) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Câu 2.

Tập xác định D = **R**.

Ta có $y' = \dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, thì có: $\max y = f(2) = \dfrac{1}{4}$; $\min y = f(-2) = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 3.

a) Tính gọn ta có: $\varpi = \dfrac{(3+i)^2}{1+i} = 7 - i$.

Gọi $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) là căn bậc hai của số phức $\varpi = 7 - i$.
Ta có $z^2 = 7 - i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 7 - i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 7 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

Suy ra: $4x^4 - 28x^2 - 1 = 0$
Từđó ta được hai căn bậc hai của ϖ là

$$z_1 = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{2}} - i\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{2}},\ z_2 = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{2}} + i\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{2}}.$$

b) Chia hai vế cho 2^{4x}, phương trình

$$10^{2x} + 250^x = 40^x + 6(25^x - 4^x)^2.$$

$$\Leftrightarrow 6\left(\frac{5}{2}\right)^{4x} - \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} - 13\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 6 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{5}\right)^x$ thì phương trình thành

$$6t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{3}.$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm dương của phương trình là:

$$x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Câu 4. $I = \int_0^1 \frac{x^4+x^2+1}{x^6+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^4-x^2+1)+2x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx$

Đặt $x = \tan t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{4})$; $dx = (1+\tan^2 t)dt$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx$

Khi $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{12}.$$

Vậy $I = I_1 + 2I_2 = \frac{5\pi}{12}$.

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{BA} = (-2; -1; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-14; 5; 2)$

Gọi BE là đường phân giác ngoài của góc B, khi đó:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Vì 2 vectơ $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$ cùng hướng nên E chia đoạn AC theo tỉ $k = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ điểm $E(5; -\frac{5}{2}; 3)$.

Câu 6.

a) Khi $\cos x = 0 \Rightarrow 4\sin^3 x = 3\sin x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin^2 x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$ vô nghiệm

Khi $\cos x \ne 0$ chia hai vế cho $\cos^3 x$:

$4(\cos^3 x + \sin^3 x) = \cos x + 3\sin x$.

$\Leftrightarrow 4(1 + \tan^3 x) = 1 + \tan^2 x + 3\tan x(1 + \tan^2 x)$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1; t = \sqrt{3}; t = -\sqrt{3}$

Vậy các nghiệm: $\frac{\pi}{4} + k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: 0; 3; 6; 9 chia hết cho 3 và 1 + 2 chia hết cho 3, vì vậy 4 chữ số khác nhau có tổng chia hết cho 3 là bảy tập hợp X sau:

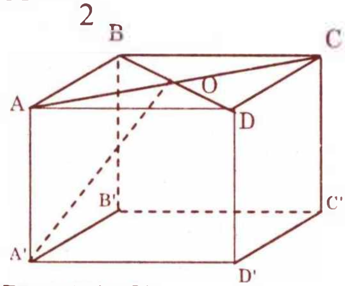
{0; 3; 6; 9}, {0; 1; 2; 3}, {0; 1; 2; 6}, {0; 1; 2; 9}, {1; 2; 3; 6},
{1; 2; 3; 9}, {1; 2; 6; 9}

Nếu X có chứa chữ số 0, thì mỗi tập sinh ra 3.3.2.1 = 18 số cần tìm và mỗi tập X không chứa chữ số 0 thì sinh ra 4.3.2.1= 24 số cần tìm.

Vậy số các số cần tìm là 18.4 + 24.3 = 144.

Câu 7. Gọi O là tâm hình thoi. Do ABCD là hình thoi nên $AO \perp BD$, kết hợp với $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow A'O \perp BD \Rightarrow \widehat{A'OA}$ là góc giữa mp(A'BD) và mặt đáy hình hộp $\Rightarrow \widehat{A'OA} = 60^o$.

Do $\widehat{ABC} = 60^o$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow AO = \frac{a}{2}$



Trong tam giác vuông A'AO ta có:

$$AA' = AO.\tan 60^o = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó thể tích của hình chóp:

$$V = S_{ABCD}.\ AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}.$$

Theo chứng minh trên ta có $BD \perp (A'AO) \Rightarrow (A'BD) \perp (A'AO)$

Trong tam giác vuông A'AO, dựng đường cao AH

Ta có $AH \perp (A'BD)$ nên d(A, (A'BD)) = AH.

Do CD' // BA' nên CD' // (A'BD)

Suy ra d(CD', (A'BD)) = d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) (do AO = CO).

$$= AH = AO.\sin 60^o = a\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 8. Ta có: $d(M, d) = \frac{|30x_0 - 70y_0 + 21|}{\sqrt{30^2 + 70^2}} = \frac{|30x_0 - 70y_0 + 21|}{10\sqrt{58}}$

Do x_0, y_0 nguyên nên $|30x_0 - 70y_0 + 21|$ là số nguyên không âm. Để tìm khoảng cách từ M đến đường thẳng d: $30x - 70y + 21 = 0$ là ngắn nhất, ta xét các trường hợp sau:

– Khi: $30x_0 - 70y_0 + 21 = 0 \Leftrightarrow 10(3x_0 - 7y_0) = -21$

Không tồn tại số nguyên x_0, y_0 thoả mãn

– Khi: $30x_0 - 70y_0 + 21 = -1 \Leftrightarrow 10(3x_0 - 7y_0) = -22$

Không tồn tại số nguyên x_0, y_0 thoả mãn

– Khi: $30x_0 - 70y_0 + 21 = 1 \Leftrightarrow 10(3x_0 - 7y_0) = -20 \Leftrightarrow 3x_0 - 7y_0 = -2$.

Phương trình này có tất cả các nghiệm nguyên x_0, y_0 là: $\begin{cases} x_0 = 4 + 7t \\ y_0 = 2 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{Z})$

Khi đó $d(M,(D)) = \dfrac{1}{10\sqrt{58}}$.

Vậy các điểm $M(4 + 7t; 2 + 3t)$ với $t \in \mathbf{Z}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Phương trình: $(x^2 + x)^2 + (x - 1)^2 = 6(x + 1)^2$.

Khi $x = -1$ thì PT vô nghiệm.

Khi $x \neq -1$, chia 2 vế cho $(x + 1)^2$ thì PT:

$$(x^2 + x)^2 + (x - 1)^2 = 6(x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{1-x}{x+1}\right)^2 = 6$$

Đặt $y = \dfrac{1-x}{x+1}$ thì có hệ $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ thì hệ $\begin{cases} S + P = 1 \\ S^2 - 2P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -4 \\ P = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = 2 \\ P = -1 \end{cases}$

Khi $\begin{cases} S = 2 \\ P = -1 \end{cases}$ thì x, y là nghiệm PT: $X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \pm \sqrt{2}$

Khi $\begin{cases} S = -4 \\ P = 5 \end{cases}$ thì x, y là nghiệm PT: $X^2 + 4X + 5 = 0$ (VN)

Vậy nghiệm phương trình: $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Cách khác: đặt $t = x + 1$ thì được phương trình

$t^4 - 2t^3 - 4t^2 - 4t + 4 = 0$ và chia 2 vế cho t^2.

Câu 10. Với $x > 0$, ta có $\left(\dfrac{3}{x^2} + 1\right)(3 + 1) \geq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{x}.\sqrt{3} + 1.1\right)^2 = \left(\dfrac{3}{x} + 1\right)^2$

Và $\sqrt{\dfrac{3}{x^2} + 1} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{x} + 1\right)$ nên $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2x} + \sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}$

$$\geq \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{2} \geq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\dfrac{7}{2}$ khi $x = 1$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 - 6x + 1$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2(m-1)x^2 - 2m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho số phức $z = 1 + i$. Tính z^4 và tìm các số nguyên dương n để số phức z^{2n} là số thực âm.

b) Giải bất phương trình: $3^{\sqrt{x+1}} \geq 81\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm hàm số f(x), biết rằng $f'(x) = 8\cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = 2019$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(4; -1; 2)$; $B(1; 2; 2)$; $C(1; -1; 5)$. Tìm tọa độ điểm S sao cho hình chóp S.ABC là hình chóp tam giác đều và cạnh bên SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 30^0, biết rằng tung độ của S là số dương.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính các giá trị lượng giác của góc α biết: $\tan\alpha = \frac{1}{2}, -\pi < \alpha < 0$.

b) Với n là số nguyên dương, cho khai triển

$$(x^2 + x + 1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$$

thỏa mãn $a_1 + 2a_2 + ... + 2na_{2n} = 81$. Tìm n.

Câu 7. (1 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M khác A. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và K là trực tâm của tam giác BCM. Chứng minh rằng HK vuông góc mp(BMC). Khi M thay đổi trên d, tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện KABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai điểm A(1;1) và B(–3; 5). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng Δ bằng 3 lần khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y = 7 \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Với a, b, c thay đổi thỏa mãn $a \geq 4$, $b \geq 5$, $c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$. Chứng minh $a + b + c \geq 16$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

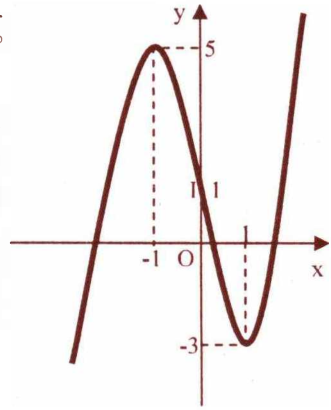
- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 5$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = -3$.

- Đồ thị: $y'' = 12x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên điểm uốn $I(1; 0)$ là tâm đối xứng. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

Câu 2. Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$y' = 4x(x^2 - m + 1)$, suy ra:

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt (y' đổi dấu qua ba nghiệm)

$\Leftrightarrow x^2 - m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow x^2 = m - 1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Hàm số có ba điểm cực trị là $(0; 1-2m)$, $(\pm\sqrt{m-1}\,; -m^2)$

Diện tích tam giác $S = (m - 1)^2\sqrt{m-1}$.

Do đó: $S = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 3$.

Câu 3.

a) Ta có: $(1 + i)^2 = 2i \Rightarrow z^4 = -4$

Suy ra: $(1 + i)^{2n} = (2i)^n = 2^n i^n$

Mà $i^n = i^{4k}.\, i^r = [(i)^2]^{2k}.\, i^r = [(-1)^2]^k.i^r = i^r$ với $r = 0; 1; 2; 3$

Và $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$; $i^3 = -i$.

Vậy để có z^{2n} là số thực âm thì $n = 4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$.

b) Điều kiện $x \geq -1$.

Bất phương trình $3^{\sqrt{x+1}} \geq 81\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$

$\Leftrightarrow\ 3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^{\frac{x}{4}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \frac{x}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} \geq x - 4$

Xét $x < 4$ thì thỏa mãn.

Xét $x \geq 4$ thì BPT $\Leftrightarrow 16(x+1) \geq (x-4)^2$

Giải bất phương trình và kết hợp với điều kiện thì tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-1; 24]$.

Câu 4. Ta có: $\int f'(x)dx = \int 8\cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)dx = 4\int\left[1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right]dx$

$$= 4\int dx + 4\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)dx = 4\int dx + 2\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)dx\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\int f'(x)dx = 4x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C$$

Nên hàm số cần tìm có dạng: $f(x) = 4x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

Mà $f(0) = 2019$ nên $f(0) = 2\sin\frac{\pi}{6} + C = 2019 \Rightarrow C = 2018$.

Vậy $f(x) = 4x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2018$.

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -3; 3)$

$\Rightarrow AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$. Vậy tam giác ABC đều

Trọng tâm tam giác ABC là $G(2; 0; 3)$; $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9; 9; 9)$ nên

$\vec{n} = (1; 1; 1)$ là một VTPT của mp(ABC).

Vì SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

nên $S(2 + t; t; 3 + t)$ với $t > 0$.

Theo giả thiết $\sin 30^0 = \left|\cos(\overrightarrow{SA}; \vec{n})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

Thay tọa độ vào đẳng thức trên, giải được $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy điểm $S\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; 3 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Câu 6.

a) Ta có $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2$.

Vì $-\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Và $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

b) Ta có $(x^2 + x + 1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$

Lấy đạo hàm 2 vế :$n(x^2 + x + 1)^{n-1}(2x + 1) = a_1 + 2a_2x + ... + 2na_{2n}x^{2n-1}$

Chọn $x = 1 \Rightarrow n.3^{n-1}.3 = n3^n = a_1 + 2a_2 + ... + 2na_{2n}$

Ta được $n.3^n = 81$

Xét hàm số $f(x) = x.3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x + x.3^x \ln 3 > 0$

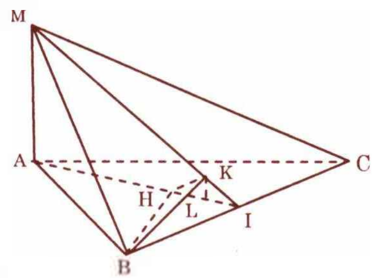
$\Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $f(3) = 81$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

Vậy: $n = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 7. - Chứng minh $HK \perp (BMC)$:

Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp MA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (MAC) \Rightarrow BH \perp MC$; $BK \perp MC$.



Suy ra $MC \perp (BHK)$

Tương tự: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp MA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (MAI) \quad \Rightarrow BC \perp HK$

Do $MC \perp (BHK) \quad \Rightarrow MC \perp HK$.

Nên có $HK \perp (BMC)$.

– Tìm giá trị lớn nhất của tứ diện KABC:

Trong tam giác MAI dựng $KL \perp AI$ thì KL là đường cao của tứ diện KABC.

Thể tích của tứ diện KABC là: $V_{KABC} = \dfrac{1}{3}KL.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}KL.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Khi V_{KABC} có giá trị lớn nhất thì KL phải có giá trị lớn nhất.

Ta có $KL.HI = HK.KI$ (cùng bằng $2S_{HKI}$)

$$\Rightarrow KL = \frac{HK.KI}{HI} \le \frac{HK^2 + KI^2}{2HI} = \frac{HI^2}{2HI} = \frac{HI}{2}$$

$$\Rightarrow KL \le \frac{HI}{2} = \frac{\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

Khi đó L là trung điểm của HI và thể tích lớn nhất của tứ diện KABC là

$$\max V_{KABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{12}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{48}.$$

Câu 8. Ta có Δ cắt AB tại M

$d(B, (\Delta)) = 3d(A, (\Delta))$

$\Leftrightarrow MB = 3MA \Leftrightarrow \overline{MB} = \pm 3\overline{MA}$.

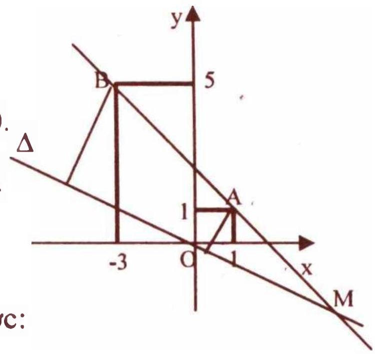
Ta có hai trường hợp:

– Xét $\overline{MB} = 3\overline{MA} \Leftrightarrow M(3; -1)$

$\Rightarrow (\Delta)$: x + 3y = 0.

– Xét $\overline{MB} = -3\overline{MA} \Leftrightarrow M(0; \frac{8}{5}) \Rightarrow (\Delta)$: x = 0.

Vậy có 2 đường thẳng (Δ): x + 3y = 0, x = 0.



Câu 9. Hệ: $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y = 7 \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Biến đổi phương trình ban đầu của hệ ta được:

$3y^2 + (x + 4)y - x - 7 = 0 \qquad (1)$

(1) là phương trình bậc hai theo y có:

$\Delta = x^2 + 8x + 16 - 12(-x - 7) = (x + 10)^2$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{-x-4-x-10}{6} = \dfrac{-x-7}{3} \\ y_2 = \dfrac{-x-4+x+10}{6} = 1 \end{array}\right.$

Với y = 1. Thay vào thì hệ thoả với mọi x

Với $y = \dfrac{-x-7}{3}$. Thay vào ta tìm được: $-5x^2 - 40x + 100 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -10 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm (2; –3), (x; 1) với mọi x.

Câu 10. Đặt a = x + 4, b = y + 5, c = z + 6 (x, y, z $\geq$ 0)

Do đó: $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = 90$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2y = 13$

Giả sử $x + y + z < 1 \Rightarrow x, y, z \in [0; 1)$.

Suy ra $x^2 \leq x$; $y^2 \leq y$; $z^2 \leq z$

nên: $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2y \leq 13(x + y + z) < 13$ (vô lý)

Do đó: $x + y + z \geq 1$.

Vậy: $a + b + c = x + y + z + 15 \geq 16$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 8x^2 + 7$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm trên đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $y = -3x + \dfrac{23}{3}$.

Câu 3.

a) Tính môđun của số phức z + i, biết $(z + i)(\overline{z} + i) = 2iz$.

b) Giải phương trình $\log_3 x^2 + 1 = (\log_{\sqrt{3}} x - 1)x$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho A(5; 5; 0) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4}$. Tìm toạ độ điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông cân tại A và có cạnh $BC = 2\sqrt{17}$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\tan^2 x - \tan^2 x \sin^3 x - (1 - \cos^3 x) = 0$.

b) Có hai đội thi học sinh giỏi Toán. Đội thứ nhất có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Đội thứ hai có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Chọn mỗi đội ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất chọn được ít nhất một học sinh nữ.

Câu 7. (1 điểm) Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Một mặt phẳng (α) di động nhưng luôn đi qua điểm C', song song với đường thẳng A'B' và chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Hãy xác định vị trí của (α) để hai phần đó có thể tích bằng nhau.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai điểm A(1;1) và B(–3; 5).Tìm toạ độ tâm I của đường tròn đi qua 2 điểm A, B và cắt trục tung tại hai điểm M và N sao cho $MN = 2\sqrt{15}$.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $x^2 - 6x = 2\sqrt{2x+3}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho ba dương x, y, z thay đổi và thỏa điều kiện: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^4 + y^4 + 8z^4$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (–2; 0) và (2; +∞), nghịch biến trên các khoảng (–∞; –2) và (0; 2).

Hàm số đạt CĐ(0; 7), đạt CT(–2; –9), (2; –9).

• Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 16$, $y'' = 0$

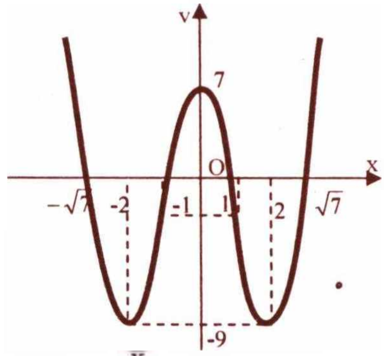
$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị có

hai điểm uốn $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{-17}{9}\right)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 7$, cho $y = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = \pm\sqrt{7}$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.



Câu 2. Gọi A, B đối xứng qua d $\Rightarrow AB \perp d \Rightarrow AB: y = \dfrac{x}{3} + m$

Hoành độ x_1, x_2 của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{3} + m \Leftrightarrow x^2 - (7-3m)x - 3m - 3 = 0 \qquad (1)$$

Theo định lí Viet, từ (1) suy ra $x_1 + x_2 = 7 - 3m$

Toạ độ trung điểm I của AB $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{7-3m}{2} \\ y = \dfrac{x}{3} + m = \dfrac{7+3m}{6} \end{cases}$

A, B đối xứng qua d nên $I \in d \Leftrightarrow \dfrac{7+3m}{6} = -3\dfrac{7-3m}{2} + \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow m = 1$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{10} \\ x_2 = 2 + \sqrt{10} \end{array}\right.$.

Vậy hai điểm cần tìm là: $\left(2-\sqrt{10}; \dfrac{5-\sqrt{10}}{3}\right), \left(2+\sqrt{10}; \dfrac{5+\sqrt{10}}{3}\right)$.

Câu 3.

a) Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$).

Từ giả thiết ta có: $[x + (y+1)i]\,[x + (1-y)i] = -2y + 2xi$

Do đó: $(x^2 + y^2 - 1) + 2xi = -2y + 2xi$

Hay: $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vậy: $|z + i| = |x + (y+1)i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x > 0$.

PT $\log_3 x^2 + 1 = (\log_{\sqrt{3}} x - 1)x$

$\Leftrightarrow 2\log_3 x + 1 = 2x\log_3 x - x \Leftrightarrow 2(x-1)\log_3 x = x + 1$

$\Leftrightarrow 2\log_3 x = \dfrac{x+1}{x-1}$ (với $x = 1 \Rightarrow 0 = 2$: VN)

Hàm số $y = f(x) = 2\log_3 x$ đồng biến trên $\mathbf{R}$

Hàm số $y = g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

Khi $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{3}\right) = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2$: chọn

Khi $x < \dfrac{1}{3} \Rightarrow f(x) < g(x)$: loại

Khi $\dfrac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$: loại

Khi $x = 3 \Rightarrow f(3) = g(3) = 2$: chọn

Khi $1 < x < 3 \Rightarrow f(x) < g(x)$: loại

Khi $3 < x \Rightarrow f(x) > g(x)$: loại.

Vậy nghiệm PT là $x = \dfrac{1}{3}$; $x = 3$.

Câu 4. Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{2}\left[1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Câu 5. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB^2 = \dfrac{1}{2}BC^2 = 34$

$B \in (d) \Rightarrow B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2t - 6; 3t - 6; 4t + 7)$

Ta có: $AB^2 = 34 \Rightarrow 29t^2 - 116t + 87 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = 1$

Vậy B(1; 2; 3), C(5; 8; –5) hoặc B(5; 8; –5), C(1; 2; 3)

Câu 6.

a) PT: $\tan^2x - \tan^2x.\sin^3x - (1 - \cos^3x) = 0$ (1)

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1 - \sin^3 x) = 1 - \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \sin^2x(1 - \sin^3x) = \cos^2x(1 - \cos^3x)$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x.\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x.\cos x = 0 \end{array}\right.$$

Xét $\left[\begin{array}{l}1-\cos x=0\\1-\sin x=0\\\sin x-\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\\sin x=1\\\tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

Xét sinx + cosx + sinx.cosx = 0

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. $(t \in [-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,]) \Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó: $t+\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0$.

Chọn $t=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\alpha+k\pi\\x=\frac{\pi}{4}-\alpha+k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

So sánh điều kiện, phương trình có các nghiệm là: $x=k2\pi$,

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi$ và $x=\frac{\pi}{4}-\alpha+k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Gọi A là biến cố chọn được một học sinh nam ở đội I

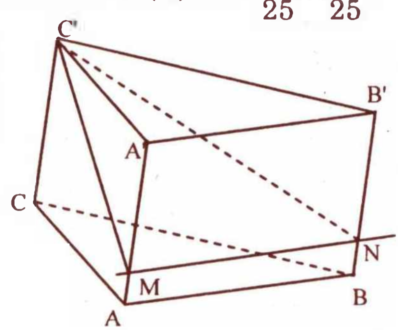
$\Rightarrow P(A)=\frac{7}{10}$. Gọi B là biến cố chọn được một học sinh nam ở đội II $\Rightarrow P(B)=\frac{4}{10}$

Gọi C là biến cố chọn hai học sinh nam

$\Rightarrow P(C)=P(A.B)=P(A).P(B)=\frac{7}{25}$.

Vậy xác suất chọn được ít nhất một học sinh nữ là: $P(\overline{C})=1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$.

Câu 7. Gọi V là thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Theo giả thiết, mặt phẳng (α) chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần.



Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh C, $V_2=V-V_1$ là thể tích của phần còn lại.

Ta cần xác định vị trí của (α) để:

$V_2=V_1 \Leftrightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_2}{V}=\frac{1}{2}$

Nếu (α) cắt cặp cạnh AC, BC thì $\frac{V_1}{V} \le \frac{V_{C'ABC}}{V}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$: không thỏa.

Vậy (α) phải cắt cặp cạnh AA', BB'.

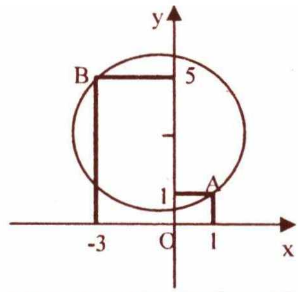
Gọi M và N tương ứng là giao điểm giữa (α) với các cạnh AA' và BB'. Theo giả thiết thì MN // A'B'.

Đặt $x = \dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{NB'}{BB'}$, $x \in (0; 1)$.

Ta có: $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{V_2}{V_{C'ABB'A'}} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{S_{MNB'A'}}{S_{ABB'A'}} = \dfrac{2}{3}.x \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$.

Vậy vị trí của (α) để hai phần đó có thể tích bằng nhau khi

$\dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{NB'}{BB'} = \dfrac{3}{4}$.



Câu 8. Gọi d là trung trực của AB

$\Rightarrow$ (d): $x - y + 4 = 0$

$I \in (d)$ nên $I(m; m + 4)$.

Hạ $IH \perp Oy \Rightarrow IH^2 = m^2$

Và $IA^2 = (m - 1)^2 + (m + 3)^2$

Do đó $2m^2 + 4m + 10 = m^2 + 15$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow m = 1; m = -5$.Vậy tâm I(1; 5) hay I(−5; −1).

Câu 9. Phương trình: $x^2 - 6x = 2\sqrt{2x+3}$.

Đặt $y - 3 = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ (y-3)^2 = 2x + 3 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 2y - 6 \\ (y-3)^2 = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 2y - 6 \\ y^2 - 6y = 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 2y - 6 \\ (x-y)(x+y-4) = 0 \end{cases}$$

Khi $x = y$ thì $x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{10}$.

Chọn nghiệm PT là $x = 4 + \sqrt{10}$.

Khi $y = 4 - x$ thì $x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Chọn nghiệm PT là $x = 2 - \sqrt{6}$.Vậy nghiệm PT là $x = 4 + \sqrt{10}$; $2 - \sqrt{6}$.

Câu 10. Theo giả thiết x, y, z dương và $x + y + z = 3$.

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

và $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow 2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2$

$\Rightarrow (3 - z)^4 = (x + y)^4 \leq [2(x^2 + y^2)]^2 = 4(x^2 + y^2)^2 \leq 8(x^4 + y^4)$

$\Rightarrow x^4 + y^4 \geq \dfrac{(3-z)^4}{8}$. Do đó $P = x^4 + y^4 + 8z^4 \geq \dfrac{(3-z)^4 + 64z^4}{8}$.

Xét $f(z) = (3 - z)^4 + 64z^4$ với $z \in (0; 3)$

$\Rightarrow f'(z) = 4.64z^3 - 4(3 - z)^3$

Do đó $f'(z) \geq 0 \Leftrightarrow 64z^3 \geq (3 - z)^3 \Leftrightarrow 4z \geq 3 - z \Leftrightarrow z \geq \dfrac{3}{5}$

Lập BBT thì: f(z) nhỏ nhất khi $z = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow P \ge \frac{f(z)}{8} \ge \min_{0<z<3} \frac{f(z)}{8} = \frac{3^4 2^3}{5^3} = \frac{648}{125}$

Khi $x = y = \frac{6}{5}; z = \frac{3}{5}$ thì $P = \frac{648}{125}$.Vậy: GTNN của P là $\frac{648}{125}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{-x+2}{x+2}$.

Câu 2. (1 điểm) Chứng minh rằng đồ thị (C_k) của hàm số $y = x^4 + kx^2 - k - 1$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định A và B khi k thay đổi. Tìm k để cho các tiếp tuyến của (C_k) tại A và tại B vuông góc với nhau.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $z^3 - 2z^2 + 6z - 5 = 0$.

b) Giải phương trình: $\log_2 \sqrt{7} + \log_{0,25}(3^{x+1} + 4) = \log_4(2 - 3^x)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0). Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tìm toạ độ tâm, bán kính đường tròn qua ba điểm A, B, C.

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Tính các giá trị lượng giác của góc 2α và $\frac{\alpha}{2}$.

b) Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$, tìm số hạng không chứa x biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} 4C_n^3 \ge 5C_{n-1}^3 \\ 3C_{n-1}^4 - 18C_{n-1}^3 + 22A_{n-2}^2 = 0 \end{cases}$$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA $\perp$ mp(ABC), AB = a, BC = $a\sqrt{3}$ và SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng qua A vuông góc với SC, cắt SC, SB lần lượt tại H và K. Trên mặt phẳng (SBC), đường thẳng HK cắt đường thẳng BC tại E. Tính thể tích khối tứ diện KAEC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC biết A(2; 6), cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: x – y + 6 = 0.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 = x^3(9 - x^3) \\ x^2y + y^2 = 6x \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R** \ {–2}.

• Sự biến thiên:

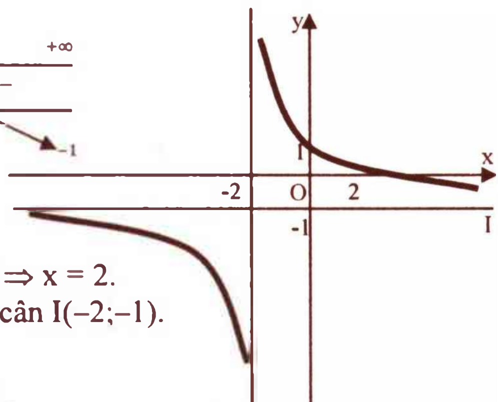
Tiệm cận đứng x = –2 vì $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} y = -\infty$.

Tiệm cận ngang y = –1 vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1$.

$y' = \frac{-4}{(x+2)^2} < 0, \forall x \neq -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1



Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

• Đồ thị: Cho x = 0 ⇒ y = 1; y = 0 ⇒ x = 2.

Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cân I(–2;–1).

Câu 2.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của đồ thị (C_k) của hàm số: $y = x^4 + kx^2 - k - 1$: $y_o = x_o^4 + kx_o^2 - k - 1, \forall k$

$\Leftrightarrow y_o = k(x_o^2 - 1) + x_o^4 - 1, \forall k \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 - 1 = 0 \\ y_o = x_o^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = -1, y_o = 0 \\ x_o = 1, y_o = 0 \end{array}\right.$

Vậy đồ thị luôn luôn đi qua hai điểm cố định A(1; 0) và B(–1; 0).

Ta có: $y' = 4x^3 + 2kx$. Hệ số góc tiếp tuyến của (C_k) tại A là $y'(1) = 4 + 2k$, tại B là $y'(-1) = -4 - 2k$

Điều kiện tiếp tuyến này vuông góc với nhau:

$y'(1).y'(-1) = -1 \Leftrightarrow (4 + 2k)(-4 - 2k) = -1$

$\Leftrightarrow 4k^2 + 16k + 15 = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{-3}{2}$ hoặc $k_2 = \frac{-5}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $k_1 = \frac{-3}{2}$ hoặc $k_2 = \frac{-5}{2}$.

Câu 3.

a) Ta có PT $z^3 - 2z^2 + 6z - 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 - z + 5) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$ hay $z^2 - z + 5 = 0$ ($\Delta = -19 = 19i^2$)

Suy ra phương trình có 3 nghiệm phức:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{19}i}{2}, z_2 = \frac{1 - \sqrt{19}i}{2}, z_3 = 1.$$

b) Điều kiện: $2 - 3^x > 0$

Ta có: PT: $\log_2 \sqrt{7} + \log_{0,25}(3^{x+1} + 4) = \log_4(2 - 3^x)$

$\Leftrightarrow \log_4 7 - \log 4(3^{x+1} + 4) = \log 4(2 - 3^x) \Leftrightarrow \log_4(3^{x+1} + 4)(2 - 3^x) = \log_4 7$

$\Leftrightarrow -3.3^{2x} + 2.3^x + 8 = 7 \Leftrightarrow 3.3^{2x} - 2.3^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x = 1$ hoặc $3^x = -\frac{1}{3}$ (VN) $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy nghiệm phương trình là $x = 0$.

Câu 4. Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2}$. Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}} = \int_{1/2}^1 \frac{tdt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Đặt $u = \sqrt{1 + t^2} \Rightarrow u^2 = 1 + t^2 \Rightarrow 2udu = 2tdt$

Khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{5}}{2}, t = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2}$ Do đó $I = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} du = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 5. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Phương trình của (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

(S) qua A, B, C, D nên ta có hệ: $\begin{cases} 12a - 4b + 6c + d = -49 \\ 2b + 12c + d = -37 \\ 4a - 2c + d = -5 \\ 8a + 2b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$ có tâm I(2; –1; 3), $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 3} = \sqrt{17}$.

Mặt phẳng (ABC) có pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -36; 0)$ hay (1; 2; 0) và qua A nên (ABC): $x + 2y - 2 = 0$.

Tâm H của đường tròn qua A, B, C là hình chiếu tâm mặt cầu I(2; –1; 3) lên (ABC). Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với mp(ABC) có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$.

Tham số t ứng với giao điểm H của Δ và mp(ABC) là tâm đường tròn giao tuyến: $(2 + t) + 2(-1 + 2t) - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow H\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; 3\right)$.

Đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \frac{\sqrt{405}}{5}$.

Câu 6.

a) Vì $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Do đó: $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ta có: $\sin2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$

$\tan2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$; $\cot2\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$ đều dương

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$

Từ đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$; $\cot\frac{\alpha}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

b) Điều kiện n nguyên dương, $n \geq 2$.

Ta có $3C_{n-1}^4 - 18C_{n-1}^3 + 22A_{n-2}^2 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 29n + 204 = 0 \Leftrightarrow n = 12$ hay $n = 17$.

Giải $4C_n^3 \geq 5C_{n-1}^3$ được $4 \leq n \leq 15$

So sánh kết quả trên thì chọn: n = 12

Khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{240-48k}{15}}$

Số hạng không chứa x ứng với $240 - 48k = 0 \Leftrightarrow k = 5$ là C_{12}^5.

Câu 7.

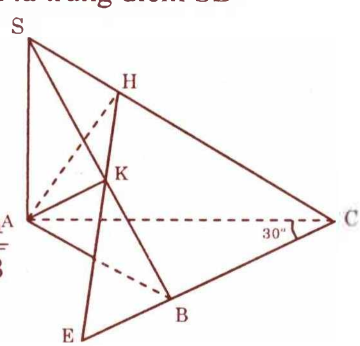
Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

$\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$

$SC \perp (AHE) \Rightarrow SC \perp AK$

$\Rightarrow$ K là trung điểm SB

$\Rightarrow d(K; AEC) = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}a$



Ta có: $SC \perp (AHE) \Rightarrow SC \perp AE$

$\Rightarrow AE \perp (SAC)$

$\Rightarrow AE \perp AH, \Rightarrow AE \perp AC$

$\Rightarrow \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a^2} \Rightarrow AE = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Vậy $V_{K.ABC} = \frac{1}{3}d(K;AEC)S_{\Delta AEC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}AE.AC = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$

Câu 8. Ta có: $d(A;(BC)) = \sqrt{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: $x - y + 6 = 0$ nên gọi $B(a; a + 6) \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Xét $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}};7+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow AB: (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y - 8\sqrt{3} + 4 = 0.$

Do đó $AC: (\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y - 8\sqrt{3} - 4 = 0.$

Xét $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}};7-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow AB: (\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y - 8\sqrt{3} - 4 = 0.$

Do đó $AC: (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y - 8\sqrt{3} + 4 = 0.$

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 = x^3(9 - x^3) \\ x^2y + y^2 = 6x \end{cases}$.

Khi $x = 0$ thì $\begin{cases} y^3 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$.Do đó nghiệm hệ phương trình (0; 0)

Khi $x \neq 0$ thì $x^6 + y^3 = 9x^3 \Leftrightarrow x^3 + \frac{y^3}{x^3} = 9 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{x}\right)^3 - 3y\left(x+\frac{y}{x}\right) = 9$

và $x^2y + y^2 = 6x \Leftrightarrow y\left(x+\frac{y}{x}\right) = 6$

Do đó $\left(x+\frac{y}{x}\right)^3 = 27 \Rightarrow x + \frac{y}{x} = 3$.

Nên $y = 2$ và $x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$.

Vậy nghiệm của hệ (1; 2), (2; 2), (0; 0).

Câu 10. Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c) \leq \frac{a(a+b)(b+c)}{b} + \frac{b(a+b)(b+c)}{c} + \frac{c(a+b)(b+c)}{a}$

$\Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + b)(b + c)$

$\leq \frac{a^2c}{b} + a^2 + ab + ac + \frac{b^2(a+b)}{c} + b^2 + ab + c^2 + bc + \frac{cb(b+c)}{a}$

Vì: $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c) = a^2 + ac + c^2 + 3b^2 + 3ab + 3bc$

Do đó ta cần chứng minh: $\dfrac{a^2c}{b} + \dfrac{b^2(a+b)}{c} + \dfrac{cb(b+c)}{a} \geq 2b^2 + 2bc + ab$

Thật vậy: $\dfrac{a^2c}{b} + \dfrac{b^2(a+b)}{c} + \dfrac{cb(b+c)}{a}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b} + \frac{b^3}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b} + \frac{c^2b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{c} + \frac{c^2b}{a}\right) + b^2\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq ab + \left(\sqrt{ac^3} + \sqrt{\frac{b^4c}{a}}\right) + 2b^2 \geq ab + 2bc + 2b^2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Chứng minh (C) có tâm đối xứng.

Câu 2. (1 điểm) Gọi A là điểm cố định của đồ thị (C_m) hàm số: $y = \dfrac{mx + 2 - m}{x - 2}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiếp tuyến của (C_m) tại điểm A đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{2y-x} + 2^y = 2^{x+1} \\ \log_3(x^2 + y + 1) - \log_3 y = 2y - x^2 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_9^{64} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn đường thẳng lần lượt có phương trình:

(d_1): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t; \\ z = -2t \end{cases}$ (d_2): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -4t \end{cases}$

(d_3): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$; (d_4): $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$

Chứng minh d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó và chứng minh có một đường thẳng cắt 4 đường thẳng đã cho. Viết phương trình đường thẳng đó.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$.

b) Từ các chữ số 0 đến 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau. Tính tổng của các số có ba chữ số đó.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = AC = a$, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA_1 và C_1B. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA_1 và C_1B. Tính thể tích khối chóp $M.A_1BC_1$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm A, B với OA: $3x - 2y = 0$, OB: $y = 0$, AB: $3x + y - 18 = 0$. Gọi MNPQ là hình vuông có M thuộc OA, N thuộc AB và P, Q ở trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh M, N, P, Q.

Câu 9. (1 điểm) Tìm m để phương trình:

$(m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều thuộc đoạn $[-2; 3]$

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực thay đổi và khác nhau đôi một trên đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}.$$

LỜI GIẢI

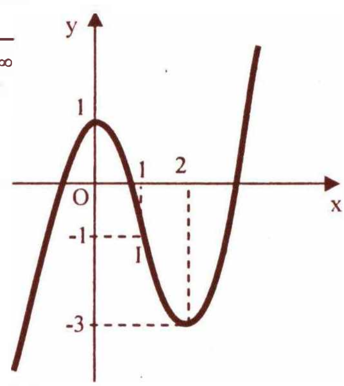
Câu 1. Hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.
- Sự biến thiên $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	−3	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Hàm số đạt CĐ(0; 1), CT(2; −3).

- Đồ thị: $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó đồ thị có điểm uốn I(1; −1).

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Chuyển hệ trục bằng phép tịnh tiến OI: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$.

Thế vào (C) thành: $Y - 1 = (X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 6X$

Ta có $Y = F(X) = X^3 - 6X$ là hàm số lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 2. (C_m) đi qua A(x; y) cố định

$\Leftrightarrow y = \dfrac{mx + 2 - m}{x - 2}$ nghiệm đúng $\forall m$, $x \neq 2$

$\Leftrightarrow (x-1)m = xy - 2y - 2$ nghiệm đúng $\forall m, x \neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ xy-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Vậy điểm cố định là A(1; –2).

Phương trình tiếp tuyến Δ tại A:$y = -(m+2)x + m \Leftrightarrow (m+2)x + y - m = 0$

Khi m = 0 thì $d(0,\Delta) = 0$.

Khi $m \neq 0$ thì $d(0,\Delta) = \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+4m+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{5}{m^2}+\dfrac{4}{m}+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5(\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}}} = \sqrt{5}$

Dấu bằng khi: $\dfrac{1}{m} = -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$.Vậy giá trị cần tìm là $m = -\dfrac{5}{2}$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbf{R})$

Ta có:$z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 + 3.2iy = x^2 + y^2 + 6yi$

Do đó: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.Vậy $z = \dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$ hoặc $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

b) Điều kiện y > 0.

PT (1) $\Leftrightarrow 2^{2(y-x)} + 2^{y-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{y-x} = 1 \\ 2^{y-x} = -2 : VN \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$

Do đó x, y >0.

Thế vào (2) cho: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$

$\Leftrightarrow \log_3(x + \dfrac{1}{x} + 1) = 2x - x^2$

Ta có VP $= 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \leq 1$

Mà $x + \dfrac{1}{x} + 1 \geq 3 \Rightarrow$ VT ≥ 1 nên x = 1 là nghiệm.Vậy hệ phương trình có nghiệm (1; 1).

Câu 5. Ta có $I = \displaystyle\int_9^{64} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}dx = \int_9^{64} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 2tdt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

Đổi cận: $x = 9 \Rightarrow t = 2$; $x = 64 \Rightarrow t = 3$

Suy ra: $I = \int_2^3 4t^2dt = \frac{4}{3}t^3\Big|_2^3$. Vậy tích phân: $I = \frac{76}{3}$.

Câu 5. VTCP của bốn đường thẳng đã cho lần lượt là:

$\overrightarrow{u_1} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{u_2} = (2; 4; -4)$, $\overrightarrow{u_3} = (2; 1; 1)$, $\overrightarrow{u_4} = (2; 2; -1)$

Vì $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương với nhau nên d_1 và d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có: d_1 qua $M_1(1; 2; 0)$ và d_2 qua $M_2(2; 2;0)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{M_1M_2};\overrightarrow{u_1}\right] = (0;2;2)$ Suy ra (P): $y + z - 2 = 0$.

Gọi $M_3 = d_3 \cap (P) \Rightarrow M_3\left(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $M_4 = d_4 \cap (P)$

$\Rightarrow M_4(4; 2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{M_3M_4} = \left(3;\frac{3}{2};\frac{-3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{u_1}$ không cùng phương nên đường thẳng (d)

qua M_3, M_4 nằm trong (P) và cắt 4 đường thẳng đã cho và (d): $\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình

$\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x) - \sin 2x - 4 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Khi đó phương trình trên thành: $t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -5$ (loại)

Nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi X là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$ với $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Gọi Y là tập hợp các số có dạng $\overline{0ab}$ ($a \neq b$; $a, b \in \{1, 2, ..., 9\}$)

Khi đó $|X| = A_{10}^3$; $|Y| = A_9^2 \Rightarrow$ số các số cần tìm $A_{10}^3 - A_9^2 = 648$ số.

Cứ một số trong X lại có một số khác cũng trong X sao cho tổng của chúng là 999, nên tổng các số trong X là $\frac{1}{2}.A_{10}^3.999$

Cứ một số trong Y lại có một số khác cũng trong Y sao cho tổng của chúng là 110, nên tổng các số trong Y là $\frac{1}{2}.A_9^2.110$

Vậy tổng cần tìm là $\frac{1}{2}.A_{10}^3.999 - \frac{1}{2}.A_9^2.110 = 355\ 680$.

Câu 7. Ta có $MB = MC_1 = a\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$ tam giác MBC_1 cân tại $M \Rightarrow MN \perp BC_1$.

Gọi K là trung điểm của B_1C_1. Suy ra $MN \parallel A_1K$ nên $MN \perp AA_1$.

Ta có BA ⊥ (A_1MC_1) và BA = a. Diệntích $S_{MA_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow V_{MBC_1A_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 8. Hình vuông MNPQ có M thuộc OA, N thuộc AB và P, Q ở trên trục hoành.

$M \in OA \Leftrightarrow M(2m; 3m)$, suy ra $MQ = |3m|$

$y_N = y_M = 3m$ nên $N \in AB \Leftrightarrow N(6 - m; 3m)$

và $\overline{MN} = (6 - 3m; 0) \Rightarrow MN = |6 - 3m|$

Do đó $MN = MQ \Leftrightarrow |6 - 3m| = |3m| \Leftrightarrow m = 1$

Vậy hình vuông MNPQ có M(2; 3), N(5; 3), P(5; 0), Q(2; 0).

Câu 9. Ta có phương trình $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)m = x^2 - 5x + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$, $x \in [-2; 3]$

$f'(x) = \dfrac{4x^2 - 4}{(x^2 - x + 1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	-2		-1		1		3
y'		+	0	−	0	+	
y	$\frac{15}{7}$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	-3	↗	$-\frac{5}{7}$

Dựa vào bảng biến thiên, thì $m \in \left[\dfrac{15}{7}; \dfrac{7}{3}\right) \cup \left(-3; -\dfrac{5}{7}\right]$ là giá trị cần tìm

Câu 10. Không mất tính tổng quát, giả sử: a > b > c

$\Rightarrow 2 \geq a - c > a - b > 0$.

Đặt $t = b - c \Rightarrow 0 < t < 2$ và $a - b = (a - c) - t \leq 2 - t$

nên $P \geq \dfrac{1}{(2 - t)^2} + \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{4}$

Xét $f(t) = \dfrac{1}{(2 - t)^2} + \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{4}$, $t \in (0; 2)$

$f'(t) = \dfrac{2}{(2 - t)^3} - \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2[t^3 - (2 - t)^3]}{(2 - t)^3 t^3}$, $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 - t \Leftrightarrow t \geq 1$

Lập BBT thì được: $\min P = \min f(t) = f(1) = \dfrac{9}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi (a, b, c) là các hoán vị của (2; 1; 0).

Cách khác: Dùng bất đẳng thức Côsi

$$\frac{1}{(2 - t)^2} + \frac{1}{t^2} \geq \frac{2}{t(2 - t)} \geq \frac{8}{(t + 2 - t)^2} = 2.$$

ĐỀ SỐ 6

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm k để đường thẳng d: $y = kx + 3$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) sao cho diện tích tam giác HMN bằng 2 với H(0; 1).

Câu 3. (1 điểm)

a) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thoả mãn: $\left|\dfrac{z}{z-i}\right| = 3$.

b) Giải phương trình:
$(3+\sqrt{8})^{4x} + (3-\sqrt{8})^{4x} + 2(3+\sqrt{8})^{2x} + 2(3-\sqrt{8})^{2x} = 6$ $(x \in \mathbf{R})$.

Câu 4. (1 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

$y = |x^2 - 4|$ và $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng (d): $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - y + z - 5 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A(3; –1; 1) nằm trong (P) và hợp với d một góc 45^o.

Câu 6. (1 điểm)

a) Không dùng máy tính, tính giá trị: $T = \cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{3\pi}{7}.\cos\dfrac{5\pi}{7}$.

b) Cho khai triển: $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$.
Tìm hệ số a_{10} và tính tổng $T = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15}$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O với SA vuông góc với mặt phẳng đáy, AB = a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (AHK) và tính thể tích của hình chóp OHAK theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong hệ toạ độ Oxy, cho hai điểm A(1; 2), B(4; 3). Gọi I là tâm của đường tròn (C) qua hai điểm A, B và cắt trục hoành tại điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^o$. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 3y} - \sqrt{y^2 + 8x} = 1 \\ x(x+8) + y(y+3) = 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số dương x, y, z thoả $x + y + z = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 8x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

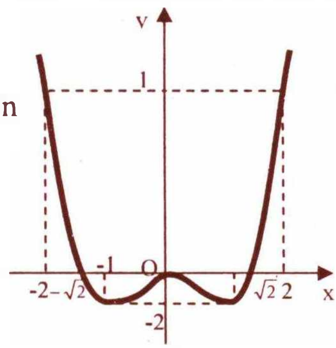
Hàm số đạt CĐ$((0;0)$ và CT$(\pm\ 1;-2)$.

- Đồ thị: $y'' = 24x^2 - 8$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên

đồ thị có hai điểm uốn $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-10}{9}\right)$.

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.



Câu 2.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\frac{2x}{x-1} = kx + 3 \Leftrightarrow kx^2 + (1-k)x - 3 = 0$ $(x \neq 1)$ (1)

d cắt (C) tại hai điểm M, N phân biệt thuộc hai nhánh của (C) khi (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow k > 0$.

Gọi $M(x_1; kx_1 + 3)$, $N(x_2; kx_2 + 3)$, áp dụng định lí Viet:

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{(k^2+1)(k^2+1+10k)}$$

$$S_{HMN} = \frac{1}{2}d(H, MN).MN = \frac{1}{k}\sqrt{k^2+1+10k}$$

Theo giả thiết: $S_{HMN} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{k}\sqrt{k^2+1+10k} = 2$

$\Leftrightarrow k^2 + 1 + 10k = 4k^2$, $k > 0 \Leftrightarrow 3k^2 - 10k - 1 = 0$, $k > 0$.

Chọn $k = \frac{5+2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$, Ta có: $\left|\dfrac{z}{z-i}\right| = 3 \Leftrightarrow |z| = 3|z-i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{9}{4}y + \dfrac{9}{8} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - \dfrac{9}{8})^2 = (\dfrac{3}{8})^2$

Vậy tập hợp là đường tròn tâm $I(0; \dfrac{9}{8})$, bán kính $R = \dfrac{3}{8}$.

b) Đặt $t = (3+\sqrt{8})^{2x} + (3-\sqrt{8})^{2x}$ $(t > 0)$.

Khi đó phương trình:

$(3+\sqrt{8})^{4x} + (3-\sqrt{8})^{4x} + 2(3+\sqrt{8})^{2x} + 2(3-\sqrt{8})^{2x} = 6$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -4$ (loại).

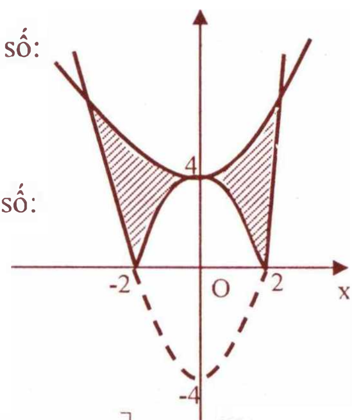
Với $t = 2 \Leftrightarrow (3+\sqrt{8})^{2x} + (3-\sqrt{8})^{2x} = 2$

$\Leftrightarrow (3+\sqrt{8})^{2x} + (3+\sqrt{8})^{-2x} = 2 \Leftrightarrow [(3+\sqrt{8})^{2x} - 1]^2 = 0 \Leftrightarrow (3+\sqrt{8})^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy nghiệm phương trình: $x = 0$.

Câu 4. Hoành độ giao điểm hai đồ thị các hàm số:

$y = |x^2 - 4|$, $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$ là $x = \pm 4$



Theo tính chất đối xứng thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

$y = |x^2 - 4|$, $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$ là

$$S = 2\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - |x^2 - 4|\right)dx$$

$$= 2\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 4 - (4 - x^2)\right]dx + 2\int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} + 4 - (x^2 - 4)\right]dx = \frac{64}{3} \text{ (đvdt).}$$

Câu 5. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là VTCP của (Δ)

Vì (Δ) nằm trong (P) nên:

$\vec{u} \perp \vec{n_p} = (1; -1; 1) \Leftrightarrow a - b + c = 0 \Rightarrow b = a + c$ (1)

Đường thẳng hợp với (d) một góc 45° nên

$$|\cos(\vec{u}, \vec{u_\Delta})| = \frac{|a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow 2(a + 2b + 2c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -\dfrac{15a}{7} \end{array}\right.$

Với c = 0, chọn a = b = 1 ⇒ (Δ_1): $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$

Với $c = -\dfrac{15a}{7}$, chọn a = 7 ⇒ c = –15, b = –8 ⇒ (Δ_2): $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$

Vậy có 2 đường thẳng: (Δ_1): $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$; (Δ_2): $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

Câu 6.

a) Ta có: $\cos\dfrac{3\pi}{7} = -\cos\dfrac{4\pi}{7}; \cos\dfrac{5\pi}{7} = -\cos\dfrac{2\pi}{7}, \ \sin\dfrac{\pi}{7} = -\sin\dfrac{8\pi}{7}$

nên: $T = \sin\dfrac{\pi}{7} = \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

$= \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{4\pi}{7}.\cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{8\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Do đó $T = \cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{3\pi}{7}.\cos\dfrac{5\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}$.

b) Ta có $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = (1 + x)^5(1 + x^2)^5$

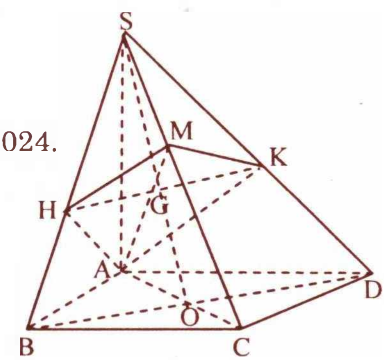
$$= \left(\sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{5} C_5^i x^{2i}\right) = \sum_{k,i=0}^{5} C_5^k C_5^i x^{k+2i}$$

Chọn k, i ∈ {0, 1,..., 5} sao cho 2i + k = 10

⇒ (k; i) ∈ {(4; 3); (2; 4); (0; 5)}

Vậy $a_{10} = C_5^4C_5^3 + C_5^2C_5^4 + C_5^0C_5^5 = 101$

$T = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15} = P(1) = 4^5 = 1024$.



Câu 7. Ta có BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ AH

Do AH ⊥ SB ⇒ AH ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SC

Tương tự AK ⊥ SC ⇒ SC ⊥ (AHK)

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$$

Và $\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{SK.SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2a^2}{3a^2} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow$ HK // BD và $HK = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$

Gọi G là giao điểm SO và HK

$\Rightarrow$ G là trung điểm HK và $AH = AK = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow AG \perp HK$

Vì G là trọng tâm ΔSAC nên $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2a}{3}$

Gọi I là trung điểm AM, ta có:

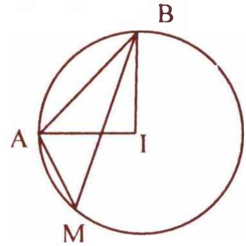
$OI \parallel CM \Rightarrow OI \perp (AKH)$ và $OI = \frac{CM}{2} = \frac{SC}{4} = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{O.AHK} = \frac{1}{3}OI.S_{AHK} = \frac{\sqrt{2}a^3}{27}$.

Câu 8. Gọi I(x; y). Theo đề bài, ta có tam giác ABI vuông cân tại I.

Do đó: $\begin{cases} |\overrightarrow{AI}| = |\overrightarrow{BI}| \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)(x-4) + (y-2)(y-3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Với $I_1(3; 1)$ ta có $I_1A = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn tâm I_1 là $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Với $I_2(2; 4)$ ta có $I_2A = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn tâm I_2 là $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Vậy có 2 đường tròn tâm I_1 là $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ và đường tròn tâm I_2 là $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Câu 9. Đặt $u = \sqrt{x^2 + 3y}$; $v = \sqrt{y^2 + 8x} \Rightarrow u, v \geq 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} 2u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u - 1 \\ u^2 + (2u-1)^2 = 13 \end{cases}$

Giải hệ trên: $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = 4 \\ y^2 + 8x = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}(4 - x^2) \\ x^4 - 8x^2 + 72x - 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}(4 - x^2) \\ (x-1)(x+5)(x^2 - 6x + 13) = 0 \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ là: $S = \{(1; 1); (-5; -7)\}$.

Câu 10. Ta có $2x^2 + xy + 2y^2 = \frac{5}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{5}{4}(x+y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(x + y)$.

Tương tự: $\sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(y + z)$; $\sqrt{2x^2 + zx + 2x^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(z + x)$

Do đó: $\sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x + y + z) = \sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x - 3}{2 - x}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1) có hai cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) đến gốc toạ độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) đến gốc toạ độ O.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) với $-2 \leq x \leq 3$; $1 \leq y \leq 3$.
Chứng minh $2 \leq |z + i| \leq 5$.

b) Cho hàm số $f(x) = x.e^{-x}$. Giải bất phương trình: $f'(x) > 0$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{3\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{1 + \sqrt{3e^x + 1}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 4; 1), B(–1; –2; 5), C(1; 7; 1) và D(1; 4; 2). Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng AD lên mặt phẳng (ABC).

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình:

$$\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 4\sqrt{3}\cos^2 x.\sin x.\cos 2x.$$

b) Một nhóm gồm 5 học sinh nam trong đó có An, có 5 học sinh nữ trong đó có Bình được xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp thoa mãn các học sinh nam nữ đứng xen kẽ sao cho An và Bình không đứng liên tiếp nhau.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp(ABC). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Chứng minh năm điểm A, B, C, H, K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu này biết AB = 2, AC = 3 và góc $\widehat{BAC} = 60^o$.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có A(1; 2), B(1; 0) và C(0; 3). Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}.$$

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số không âm sao cho:
$a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P = a^2 + b^2 + c^2 + abc$.

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

• Sự biến thiên:

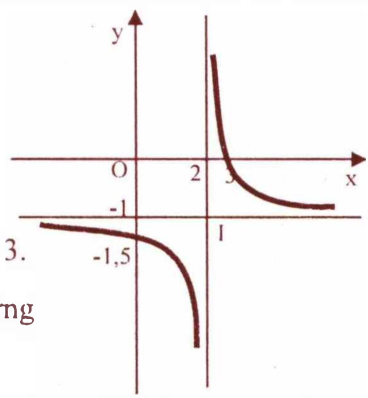
$\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

$y' = \dfrac{-1}{(2-x)^2} < 0, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$: Hàm số không có cực trị, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1



• Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$; $y = 0 \Rightarrow x = 3$.

Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng I(2; –1).

Câu 2. Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = m \pm 1$

Vậy với mọi m thì hàm số luôn có cực trị

Toạ độ điểm cực đại và cực tiểu lần lượt là

$A(m - 1; 2 - 2m)$ và $B(m + 1; -2m - 2)$

Theo đề: $OA = \sqrt{2}\,OB \Leftrightarrow 5(m-1)^2 = 2.5(m+1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $z + i = x + (y + 1)i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

Mà $-2 \le x \le 3 \Rightarrow x^2 \le 9$ (1)

Và $1 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2 \le y + 1 \le 4 \Rightarrow 4 \le (y+1)^2 \le 16$ (2)

Cộng (1) và (2), suy ra: $4 \le x^2 + (y+1)^2 \le 25$.

Vậy $2 \le |z + i| \le 5$.

b) Ta có: $f(x) = xe^{-x}$. D = **R.**

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

Do đó: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - xe^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1 - x) > 0$

Mà $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ do đó: $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Vậy nghiệm BPT là $x < 1$.

Câu 4. Đặt $u = \sqrt{3e^x + 1} \Rightarrow u^2 = 3e^x + 1 \Rightarrow e^x = \dfrac{u^2 - 1}{3} \Rightarrow e^x dx = \dfrac{2}{3}udu$

Khi $x = 0 \Rightarrow u = 2$; $x = 3\ln 2 \Rightarrow u = 5$

Do đó $I = \displaystyle\int_0^{3\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{1 + \sqrt{3e^x + 1}}$

$$= \int_2^5 \frac{\frac{u^2 - 1}{3} \cdot \frac{2u}{3}du}{1 + u} = \frac{2}{9}\int_2^5 (u^2 - u)du = \frac{2}{9}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right]\Bigg|_2^5$$

$$= \frac{2}{9}\left[\left(\frac{125}{3} - \frac{25}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)\right] = \frac{19}{3}.$$

Câu 5. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; -6; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 3; 0)$ nên mặt phẳng (ABC) có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-12; -8; -24)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $-12x - 8y - 24z + D = 0$

Mặt khác (ABC) qua A(3;4; 1) nên $-36 - 32 - 24 + D = 0 \Rightarrow D = 92$.

(ABC): $-12x - 8y - 24z + 92 = 0$. Vậy (ABC): $3x + 2y + 6z - 23 = 0$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa AD và (P) $\perp$ (ABC)

Ta có $\overrightarrow{AD} = (-2; 0; 1)$; $\vec{n}_{ABC} = (3; 2; 6)$

$\Rightarrow$ (P) có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{AD}, \vec{n}_{ABC}] = (-2; 15; -4)$

Phương trình (P) có dạng $-2x + 15y - 4z + D = 0$

Mặt khác (P) qua A(3; 4; 1) nên $-6 + 60 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -50$

Vậy phương trình (P): $-2x + 15y - 4z - 50 = 0$

hay (P): $2x - 15y + 4z + 50 = 0$.

Gọi d là hình chiếu của AD lên mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow$ (d) = (ABC) $\cap$ (P).

Các điểm thuộc (d) có toạ độ thoả hệ $\begin{cases} 3x + 2y + 6z - 23 = 0 \\ 2x - 15y + 4z + 50 = 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình tham số của hình chiếu (d): $\begin{cases} x = 98t \\ y = 4 \\ z = \dfrac{5}{2} - 49t \end{cases}$

Câu 6.

a) Biến đổi phương trình:

$$\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 4\sqrt{3}\cos^2 x.\sin x.\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\left(\sin 4x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Vì $\sin 4x \le 1 \Rightarrow \sin 4x - \sqrt{2} < 0$

Do đó $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Số cách sắp xếp 10 học sinh đứng xen kẽ nam, nữ là $2(5!)^2$.

Ta đếm bù: tính số cách sắp xếp 10 học sinh đứng xen kẽ nam nữ mà An đứng liên tiếp với Bình.

Ta sắp 8 học sinh không có An và Bình đứng xen kẽ.

– Học sinh nam đứng đầu hàng, số cách sắp xếp là $(4!)^2$. Ta xen cặp An và Bình vào 1 trong 9 vị trí gồm 7 vị trí giữa 2 học sinh liền nhau và 2 vị trí đầu cuối hàng. Suy ra có $9.(4!)^2$ cách xếp.

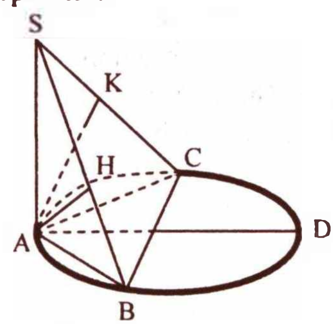
– Học sinh nữ đứng đầu hàng. Tương tự có $9.(4!)^2$ cách xếp.

Suy ra có $2.9(4!)^2$ cách xếp mà An đứng liên tiếp Bình.

Vậy số cách sắp xếp thỏa mãn là:

$$2.(5!)^2 - 2.9.(4!)^2 = 32.(4!)^2 = 18\,432.$$

Câu 7. Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AK$

Mặt khác: $SC \perp AK$. Nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp KD$ (1)

Tương tự $AH \perp HD$ (2)

Ngoài ra do AD là đường kính của đường tròn (ABC)

nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3)

$\Rightarrow$. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{AKD} = \widehat{AHD} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ A, B, C, H, K cùng thuộc mặt cầu đường kính AD.

Trong tam giác ABC, áp dụng định lí côsin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 60^\circ = 4 + 9 - 2.2.3.\frac{1}{2} = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

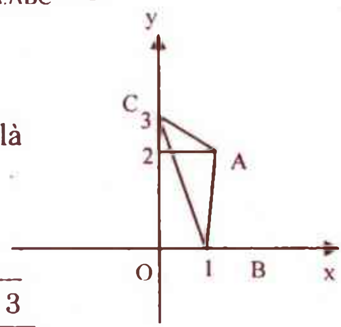
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó R cũng là bán kính mặt cầu qua năm điểm A, B, C, H, K.

Trong tam giác ABC, áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^o} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Câu 8. Phương trình đoạn chắn BC là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0.$

Ta có $d(A, BC) = \frac{2}{\sqrt{10}}$; $BC = \sqrt{10} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 1$



$AB = 2; AC = \sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

Ta có S = pr nên bán kính đường tròn nội tiếp là

$$r = \frac{S}{P} = \frac{2}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}.$$

Câu 9. Điều kiện $x \geq 2$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1}\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 1)(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - 1} = 1 \\ \sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x - 2 = x + 3 \quad \text{(PTVN)} \end{array}\right.$$

Vậy x = 2 là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 10. Không mất tính tổng quát, giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow 2 \geq c \geq 0$

Ta có a + b+ c = 6 nên a + b = 6 – c.

$$P = (a + b)^2 + c^2 + ab(c - 2) \quad \geq (a + b)^2 + c^2 + \frac{(a + b)^2}{4}(c - 2)$$

$$\geq \frac{1}{4}(c^3 - 6c^2 + 12c + 72)$$

Xét $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 - 6c^2 + 12c + 72)$ với $c \in [0; 2]$, $f'(c) = \frac{1}{4}(3c^2 - 12c + 12)$

Lập BBT ta có minP = min f(c) = f(0) = 18

Dấu bằng xảy ra khi (a; b; c) = (3; 3; 0) và các hoán vị.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

$y = -x^3 + 3x^2 - 2.$

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + m$ (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thoả $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $z^4 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$.

b) Giải bất phương trình: $\log_3^2\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) + \log_{1/3}\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) < 2$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{(x+2)(1+2xe^x)+1}{x(1+xe^x)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}$, tiếp xúc với hai mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 1 = 0$ và (Oxy).

Câu 6. (1 điểm)

a) Chứng minh: $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) + \cos\beta\sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0$.

b) Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển của $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa: $C_n^1C_n^{n-1} + 2C_n^1C_n^2 + C_n^2C_n^{n-2} = 225$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = $a\sqrt{2}$, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' và C' lần lượt là chân đường cao hạ từ A đến SB, SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (AB'C') và tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm $I\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và trung điểm cạnh AD là M(3; 0). Xác định tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD.

Câu 9. (1 điểm) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y + 2 = 0 \\ 3\sqrt{2x - x^2} - y^2 - \sqrt{1 - y^2} - a = 0 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3}} + \sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (z+x)^3}} + \sqrt{\frac{z^3}{z^3 + (x+y)^3}} \ge 1.$$

LỜI GIẢI

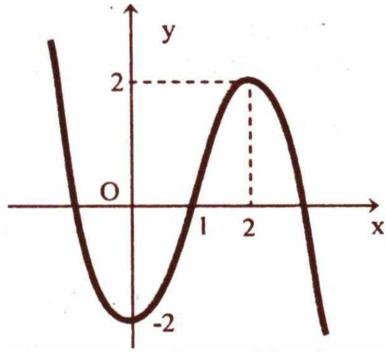
Câu 1. Hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

$y' = -3x^2 + 6x$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$



Hàm số đồng biến trên (0; 2), nghịch biến $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$ và có điểm CĐ (2;2), CT(0; –2)

• Đồ thị: $y'' = -6x + 6$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$. Điểm uốn I(1; 0)

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành: $x^4 - 4x^2 + m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + m = 0$ (2)

Điều kiện (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Với $0 < m < 4$ thì (2) có hai nghiệm dương $t_1 < t_2$. Khi đó, đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ theo thứ tự tăng dần là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Yêu cầu bài toán: $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

Kết hợp định lí Viet, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = m \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{2}{5} \\ t_2 = \dfrac{18}{5} \\ m = \dfrac{36}{25} \end{cases}$

Vậy $m = \dfrac{36}{25}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

a) Ta có: $z^4 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$

$\Leftrightarrow z^4 - (3z - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 3z + 3)(z^2 + 3z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$ ($\Delta = -3 = 3i^2$) hay $z^2 + 3z - 3 = 0$ ($\Delta = 21$)

Các nghiệm phức của phương trình là:

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2}\ z_2 = \frac{3 - \sqrt{3}i}{2}, z_3 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, z_4 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}.$$

b) Điều kiện $0 < x < \dfrac{3}{2}$.

Đặt $t = \log_2\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right)$ thì bất phương trình:

$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2$

$$\Leftrightarrow\ -1 < \log_3\left(x - \frac{2x^2}{3}\right) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x - \frac{2x^2}{3} < 9 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2} < x < 1.$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S = (\frac{1}{2};1)$.

Câu 4. Biến đổi tích phân:

$$I = \int_1^2 \frac{(x+1)(1+2xe^x)}{x(1+xe^x)}dx + \int_1^2 \frac{2}{x}dx = I_1 + 2\ln 2$$

Tính $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)e^x(1+2xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}dx$

Đặt $t = x.e^x$ thì $dt = (x+1)e^x\,dx$ Khi $x = 1 \Rightarrow t = e$, $x = 2 \Rightarrow t = 2e^2$

$$I_1 = \int_e^{2e^2} \frac{1+2t}{t(1+t)}dx = \int_e^{2e^2} \frac{d(t^2+t)}{t^2+t} = \ln|t^2+t|\ \Big|_e^{2e^2} = \ln\left(\frac{4e^3+2e}{e+1}\right).$$

Vậy tích phân $I = \ln\left(\dfrac{16e^3+8e}{e+1}\right)$.

Câu 5. Gọi $I(1 + t;\ 1+ 2t;\ -2t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Do (S) tiếp xúc với (α) và mặt phẳng (Oxy) nên:

$$d(I, (\alpha)) = d(I, Oxy)) \Leftrightarrow \frac{|2(1+t)-(1+2t)-4t+1|}{3} = |2t|$$

$$\Leftrightarrow |2t-1| = |3t| \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{5}.$$

Với $t = -1$ thì (S) có tâm $I(0; -1; 2)$ và bán kính $R = 2$ nên (S) có phương trình $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Với $t = \dfrac{1}{5}$ thì (S) có tâm $I\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{7}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{2}{5}$ nên (S) có phương trình $\left(x-\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y-\dfrac{7}{5}\right)^2 + \left(z+\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.

Câu 6.

a) Ta có $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta+\gamma)]$.

$$\cos\beta\sin(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}[\sin(\beta+\gamma-\alpha) - \sin(\beta-\gamma+\alpha)].$$

$$\cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\gamma-\alpha+\beta)].$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

b) Từ giả thiết: $C_n^1C_n^{n-1} + 2C_n^1C_n^2 + C_n^2C_n^{n-2} = 225$

$$\Leftrightarrow C_n^1C_n^1 + 2C_n^1C_n^2 + C_n^2C_n^2 = 225$$

$\Leftrightarrow (C_n^1 + C_n^2)^2 = 225 \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^2 = 15 \Leftrightarrow C_{n+1}^2 = 15 \Leftrightarrow n = 5.$

Khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(x^2\right)^{5-k} . \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (-2)^k x^{10-3k}$

Số hạng chứa x^4 ứng với $10 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 2$

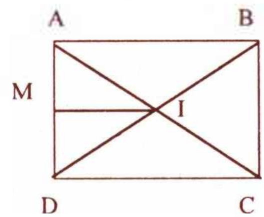
Vậy số hạng chứa x^4 là $C_5^2(-2)^2.x^4 = 40x^4$.

Câu 7. Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp (AB'C')$

Ta có tỉ thể tích: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SC'}{SC} . \frac{SB'}{SB}$

Với $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$; $\frac{SB'}{SB} = \frac{SB'.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$;

$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ nên $V_{S.AB'C'} = \frac{\sqrt{2}}{18}a^3$.



Câu 8. $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow AD: x + y - 3 = 0$

$\Rightarrow D(x; 3 - x) \Rightarrow A(6 - x; x - 3)$

Theo giả thiết $DC = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4; x = 2.$

Với $x = 4 \Rightarrow A(2; 1); D(4; -1) \Rightarrow B(5; 4), C(7; 2)$

Với $x = 2 \Rightarrow A(4; -1); D(2; 1) \Rightarrow C(5; 4), B(7; 2).$

Câu 9. Điều kiện: $\begin{cases} 2x - x^2 \ge 0 \\ 1 - y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

Hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y + 2 = 0 & (1) \\ 3\sqrt{2x - x^2} - y^2 - \sqrt{1 - y^2} - a = 0 & (2) \end{cases}$

Đặt $t = y + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]$, ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = t^3 - 3t^2$

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ nên:

$(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow y + 1 = x$ Nên $(2) \Leftrightarrow a = -(x - 1)^2 + 2\sqrt{1 - (x - 1)^2}$

Đặt $v = \sqrt{1 - (x - 1)^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = a$

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ có $\min_{[0;1]} g(v) = -1$; $\max_{[0;1]} g(v) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le a \le 2$.

Câu 10. Nhận xét với $a > 0$ thì $\frac{1}{\sqrt{1 + a^3}} \ge \frac{2}{2 + a^2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$2 + a^2 = (a + 1) + (a^2 - a + 1) \ge 2\sqrt{a^3 + 1} \Rightarrow$ đpcm.

Áp dụng: $\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y+z}{x}\right)^3}}\geq\dfrac{2}{2+\left(\dfrac{y+z}{x}\right)^2}\geq\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{\dfrac{y^3}{y^3+(z+x)^3}}\geq\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$; $\sqrt{\dfrac{z^3}{z^3+(x+y)^3}}\geq\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$

Cộng vế theo vế, suy ra điều phải chứng minh.
Dấu bằng khi x = y = z.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{2}x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(–2; 1) sao cho khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị (C) của hàm số: $y=-x^3+3x+2$ đến Δ bằng hai lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến Δ.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z, biết $\dfrac{1-i}{z}=\dfrac{(2-3i)\overline{z}}{|z|^2}+2-i$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4^{2x^2-2}-2^{2x^2+y}+4^y=1\\2^{2y+2}-3.2^{2x^2+y}=16\end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}}\dfrac{(e^x+\ln x)\sqrt{x^2+4}+xe^x+1}{x(e^x+\ln x)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho điểm A(5; 3; –1). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng 1.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: (cot3x + cotx)cot4x = (cot3x – cotx)cot2x

b) Một hộp đựng 5 viên bi đỏ, 6 viên xanh và 7 viên bi vàng. Chọn ra 5 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để chọn ra không có đủ cả 3 màu.

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$, đường thẳng (d): $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ d cắt (E) tại B, C. Tìm điểm $A \in (E)$ để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = (a+b)(b+c)(c+a) - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$.

- Tập xác định: D = **R**: Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

$y' = -x^3 + 3x = x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ hoặc $x = 0$.

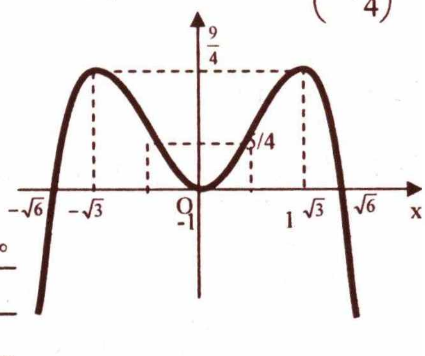
$y' > 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ hoặc $0 < x < \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$ và nghịch biến trên $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$. Hàm số đạt CĐ tại $(\pm\sqrt{3}; 9/4)$ và CT tại (0; 0).

- Đồ thị: $y'' = -3x^2 + 3$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ nên đồ thị có 2 điểm uốn $I\left(\pm 1; \frac{5}{4}\right)$



Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 0), cắt trục hoành tại ba điểm $(\pm\sqrt{6}; 0)$, (0; 0).

Câu 2. Tập xác định: D = **R**

$y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		−1		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại M(−1,0) và đạt cực đại tại N(1, 4).

Gọi k là hệ số góc của Δ đi qua A(−2;1), ta có Δ:

$$y = k(x+2) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 2k + 1 = 0$$

Theo giả thiết, ta có: $2\frac{|-k + 2k + 1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|k - 4 + 2k + 1|}{\sqrt{k^2+1}}$

$$\Leftrightarrow |2k + 2| = |3k - 3|.$$

Khi $2k + 2 = 3k - 3 \Leftrightarrow k = 5$ thì Δ: $y = 5(x + 2) + 1 = 5x + 11$.

Khi $2k + 2 = -3k + 3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$ thì Δ: $y = \frac{1}{5}(x + 2) + 1 = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$.

Vậy có 2 đường thẳng: Δ: $y = 5x + 11$ và Δ: $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$.

Câu 3.

a) Điều kiện: $z \neq 0$. Ta có $z.\overline{z} = |z|^2$, do đó:

PT $\Leftrightarrow 1 - i = 2 - 3i + (2 - i)z$

$\Leftrightarrow (2-i)z = -1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-4+3i}{5} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$

Vậy nghiệm của PT là $z = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$.

b) Đặt $a = 4^{x^2}$, $b = 2^y \Rightarrow a \geq 1, b > 0$.

Khi đó hệ: $\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3.2^{2x^2+y} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 16ab + 16b^2 = 16 \\ 4b^2 - 3ab = 16 \end{cases}$

Suy ra $a^2 - 16ab + 16b^2 = 4b^2 - 3ab$

$\Leftrightarrow a^2 - 13ab + 12b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a - 12b) = 0$

Giải với hai trường hợp $a = b$; $a = 12b$, ta được nghiệm của hệ là $(-1; 2)$, $(1; 2)$

Câu 4. $I = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{(e^x + \ln x)\sqrt{x^2+4} + xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)}dx$

$= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx + \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{xe^x + 1}{(e^x + \ln x)x}dx = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow tdt = xdx$.

Khi đó $I_1 = \int_3^4 \frac{t^2dt}{t^2-4} = \int_3^4 dt + \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = 1 + \ln\frac{5}{3}$

Tính $I_2 = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{xe^x + 1}{(e^x + \ln x)x}dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{d(e^x + \ln x)}{e^x + \ln x}$.

$= \left(\ln|e^x + \ln x|\right)\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} = \ln\left(\frac{e^{\sqrt{12}} + \ln\sqrt{12}}{e^{\sqrt{5}} + \ln\sqrt{5}}\right)$ Vậy $I = 1 + \ln\frac{5}{3} + \ln\left(\frac{e^{\sqrt{12}} + \ln\sqrt{12}}{e^{\sqrt{5}} + \ln\sqrt{5}}\right)$

Câu 5. PT mặt phẳng (P) có dạng $By + Cz = 0$ $(B^2 + C^2 > 0)$

$$d(A, (P)) = \frac{|3B - C|}{\sqrt{B^2 - C^2}} = 1 \Leftrightarrow 8B^2 - 6C.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = \frac{3C}{4} \end{array}\right.$$

Khi B = 0 chọn C = 1 $\Rightarrow$ (P): z = 0

Khi B = $\frac{3C}{4}$ chọn C = 4 $\Rightarrow$ B = 3 $\Rightarrow$ (P): 3y + 4z = 0.

Câu 6.

a) Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{4}, x \neq \frac{k\pi}{3}$ với k nguyên

PT (cot3x + cotx)cot4x = (cot3x – cotx)cot2x

$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x\sin x + \cos x\sin 3x}{\sin 3x\sin x}.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos 3x\sin x - \cos x\sin 3x}{\sin 3x\sin x}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \sin(3x + x).\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -\sin(3x - x).\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -\cos 2x \quad \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x = 0$

Giải và chọn nghiệm: $x = (2n + 1)\frac{\pi}{6}$ với n nguyên.

b) Số cách chọn 5 viên bi từ 18viên là $C_{10}^{5} = 8568$.

Ta xét các trường hợp chọn 5 viên bi có đủ 3 màu

– Có 3 bi đỏ, 1 bi xanh, 1 bi vàng, số cách chọn là $C_5^3.C_6^1.C_7^1 = 420$

– Có 1 bi đỏ, 3 bi xanh, 1 bi vàng, số cách chọn là $C_5^1.C_6^3.C_7^1 = 700$

– Có 1 bi đỏ, 1 bi xanh, 3 bi vàng, số cách chọn là $C_5^1.C_6^1.C_7^3 = 1050$

– Có 2 bi đỏ, 2 bi xanh, 1 bi vàng, số cách chọn là $C_5^2.C_6^2.C_7^1 = 1050$

– Có 2 bi đỏ, 1 bi xanh, 2 bi vàng, số cách chọn là $C_5^2.C_6^1.C_7^2 = 1260$

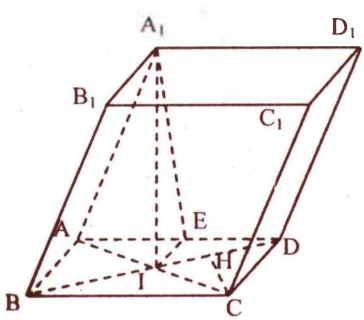
– Có 1 bi đỏ, 2 bi xanh, 2 bi vàng, số cách chọn là $C_5^1.C_6^2.C_7^2 = 1575$

Do đó số cách chọn 5 viên bi không có đủ 3 màu là:

8568 – (420 + 700 + 1050 + 1050 + 1260+ 1575) = 2513.

Vậy xác suất để chọn ra 5 viên mà không có đủ cả 3 màu $P = \frac{2513}{8568}$.

Câu 7. Gọi I là giao điểm của AC và BD



Suy ra $A_1I \perp (ABCD)$

Gọi E là trung điểm AD

thì $IE \perp AD$; $A_1E \perp AD$ nên $\widehat{A_1EI}$

là góc giữa hai mặt phẳng

(ADD_1A_1) và (ABCD)

Suy ra $A_1I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V = S_{ABCD}.A_1I = \frac{3a^3}{2}$.

Hạ $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A_1BD)$

Vậy $d(B_1, (A_1BD) = d(CB_1, (A_1BD) = d(C, A_1BD)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Giả sử $A(x_o; y_o) \in (E)$: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ A đến d là $AH = \frac{|x_o - \sqrt{2}y_o + 2|}{\sqrt{3}}$. Ta có

$$|x_o - \sqrt{2}y_o + 2| \le |x_o - \sqrt{2}y_o| + 2 = \left|\frac{x_o}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} + (-\frac{y_o}{2}).2\sqrt{2}\right| + 2$$

$$\le \sqrt{16(\frac{x_o^2}{8} + \frac{y_o^2}{4})} + 2 \Rightarrow AH \le 2\sqrt{3}$$

Và $AH = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_o}{2\sqrt{2}} = -\frac{y_o}{2} \\ x_o - \sqrt{2}y_o \ge 0 \\ \frac{x_o^2}{8} + \frac{y_o^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 2 \\ y_o = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(2; -\sqrt{2})$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $A(2; -\sqrt{2})$.

Câu 9. Điều kiện: $\begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 2x - 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

Khi đó: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 5x - 1 > (2x - 4) + (x - 1) + 2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$

$\Leftrightarrow x + 2 > \sqrt{(2x-4)(x-1)}$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4$ (vì $x \ge 2$ nên $x + 2 > 0$)

$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Kết hợp với điều kiện ta được $2 \le x < 10$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Câu 10. Ta có: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

nên $F = 9 - \frac{1}{3}(a^3 + 3\sqrt[3]{a}) - \frac{1}{3}(b^3 + 3\sqrt[3]{b}) - \frac{1}{3}(c^3 + 3\sqrt[3]{c})$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3\sqrt[3]{t} - 4t$, $t \in (0; 1]$ thì $f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - 4 < 0$

$\Rightarrow$ hàm nghịch biến trên $(0;1]$ nên $f(t) \ge f(1) = 0, \forall t \in (0; 1]$.

Do đó $F = 9 - \frac{4}{3}(a + b + c) - \frac{1}{3}(f(a) + f(b) + f(c)) \le 5$

Vậy $\max F = 5$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm m để các tiếp tuyến của đồ thị (C_m) của hàm số:

$y = x^4 + mx^2 - m - 1$ tại các điểm cố định của (C_m) vuông góc với nhau.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $z^4 + 4 = 0$.

b) Giải phương trình: $2\log_2 x + 3\log_x(2x+1) = 6 + \log_2(2x+1)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1 + xe^x}{x(e^x + \ln x)}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng (a) và (b) có phương trình lần lượt là $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

Chứng minh (a) song song với (b), tính khoảng cách giữa chúng. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua (a) và vuông góc với mp((a), (b)).

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho tam giác ABC, tính:

$$S = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

b) Tính tổng: $S = 3C_n^0 + 5C_n^1 + 7C_n^2 + \ldots + (2n+3)C_n^n$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60^0 và SC = a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa AB và SC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác cân ABC, biết AB = AC = 5, đường cao AH có phương trình: $3x - y - 6 = 0$, các đỉnh B và C lần lượt nằm trên các đường thẳng d_1: $7x + 3y - 5 = 0$, d_2: $x - y - 4 = 0$.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x - y^2)^3} \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{c+a}{c+a+2b} + \frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \le \frac{13}{6}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- Chiều biến thiên:

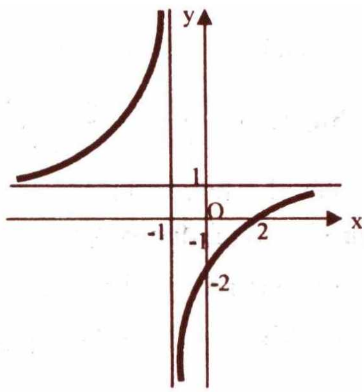
$\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y = 1$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

- Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận $I(-1;1)$.

Câu 2. Đồ thị (C_m) qua điểm $(x; y)$ cố định

$\Leftrightarrow y = x^4 + mx^2 - m - 1$ nghiệm đúng với mọi m.

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)m = y - x^4 + 1$ nghiệm đúng với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = x^4 - 1 \end{cases}$.

Vậy đồ thị (C_m) luôn luôn qua 2 điểm cố định là $A(-1; 0)$, $B(1;0)$.

Ta có $y' = 4x^3 + 2mx$.

Hai tiếp tuyến tại A, B vuông góc

$\Leftrightarrow y'(-1).y'(1) = -1 \Leftrightarrow (-4 - 2m)(4 + 2m) = -1$

$\Leftrightarrow (4 + 2m)^2 = 1 \Leftrightarrow 4 + 2m = 1$ hoặc $4 + 2m = -1$

$\Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$. Vậy $m = -\frac{3}{2}$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 \Leftrightarrow (z^2)^2 = -4 = (2i)^2$

$\Leftrightarrow z^2 = 2i$ hoặc $z^2 = -2i$

Suy ra: $z^2 = 2i = (1 + i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(1 + i)$

Và $z^2 = -2i = (1 - i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(1 - i)$. Vậy có 4 số phức: $z = \pm(1 \pm i)$.

b) Điều kiện $0 < x, x \neq 1$.

Biến đổi phương trình: $2\log_2 x + 3\log_x(2x + 1) = 6 + \log_2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 3)(2\log_2 x - \log_2(2x + 1)) = 0$

$\Leftrightarrow\ \log_2 x = 3$ hay $2\log_2 x = \log_2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow\ \log_2 x = 3$ hay $2\log_2 x = \log_2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow\ \log_2 x = 3$ hay $\log_2 x^2 = \log_2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow\ x = 8$ hay $x^2 - 2x - 1 = 0$

Ta được tập nghiệm: $S = \{8; 1 + \sqrt{2}\}$.

Câu 4. Đặt $t = e^x + \ln x \Rightarrow dt = \left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1 + xe^x}{x}dx$

Đối cận: $x = 1 \Rightarrow t = e$; $x = e \Rightarrow t = e^e + 1$

Suy ra: $I = \int_1^e \frac{1 + xe^x}{x(e^x + \ln x)}dx = \int_e^{e^e+1} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_e^{e^e+1} = \ln(e^e + 1) - 1$

Vậy: $I = \ln(e^e + 1) - 1$.

Câu 5. Ta có (a) đi qua A (–2–1;0) và có một VTCP là $\vec{a} = (4; -1; 1)$

Ta có (b) đi qua B(2; 1; –2) và cũng nhận $\vec{a} = (4; -1; 1)$ làm một VTCP.

Vì $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -2)$ khác phương với $\vec{a}$ nên (a) và (b) song song với nhau.

Khi đó $d(a, b) = d(A, b) = \frac{\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (0; 12; 12)$ suy ra $d(a, b) = \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 4$

Mp(a, b) nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (0; 12; 12)$ làm VTPT.

MP(α) qua (a), (α) vuông góc với mp(a, b) nên (α) nhận $\vec{p} = -\frac{1}{24}[\vec{a}, \vec{n}] =$ (1; 2; –2) làm một VTPT.

Mặt khác (α) qua A(–2; 1; 0) nên (α) có phương trình

$$(x + 2) + 2(y + 1) - 2(z - 0) = 0 \text{ hay } x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

Câu 6.

a) Ta có: $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \Rightarrow \tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

Do đó $S = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$

b) Ta có: $(2k + 3)C_n^k = (k + 1)C_n^k + (k + 2)C_n^k$ nên

$S = (C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n + 1)C_n^n) + (2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + (n + 2)C_n^n)$

Ta có: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Nên $x(1 + x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$

Lấy đạo hàm ta có: $(1 + x)^n + nx(1 + x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n$

Cho $x = 1$, ta có: $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2^n + n2^{n-1}$ (1)

Ta có: $x^2(1 + x)^n = C_n^0 x^2 + C_n^1 x^3 + C_n^2 x^4 + ... + C_n^n x^{n+2}$

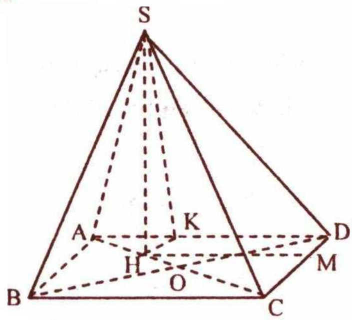
Lấy đạo hàm ta có: $2x(1 + x)^n + nx^2(1 + x)^{n-1}$

$= 2C_n^0 x + 3C_n^0 x^2 + 4C_n^2 x^3 + ... + (n+2)C_n^n x^{n+1}$

Cho $x = 1$ thì: $(2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + ... + (n+2)C_n^n) = 2.2^n + n.2^{n-1}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S = (n + 3)2^n$.

Câu 7.



Đặt $SH = x$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AD.

Suy ra $\widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD).

Ta có: $KH = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \frac{4x}{\sqrt{3}} \Rightarrow HC = x\sqrt{6}$

Theo giả thiết $6x^2 + x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{7}} \Rightarrow DC = \frac{4a}{\sqrt{21}}$

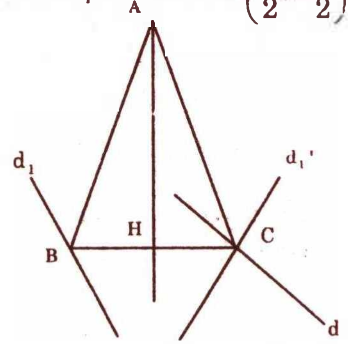
Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.\, SH = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{7}}\left(\frac{4a}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{16a^3}{63\sqrt{7}}$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên CD, N là hình chiếu vuông góc của H lên SM, thì $HN \perp (SCD)$,

do đó: $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{4}{3}d(H, (SCD)) = \frac{4}{3}HN$

Tính toán có được: $HM = \frac{3a}{\sqrt{21}} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow d(SC, AB) = \frac{2a}{\sqrt{21}}$.

Câu 8. Đường thẳng d_1' đối xứng của đường thẳng d_1 qua đường cao AH có phương trình: $19x - 33y - 83 = 0 \Rightarrow$ giao điểm của d_1' và d_2 là $C\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$



Điểm đối xứng của C qua đường thẳng AH thuộc d_1 là $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Đường tròn (T) có tâm B và bán kính 5 có phương trình

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 25.$$

Giao điểm của AH và đường tròn (T) là $A\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ và $A'\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{2}\right)$.

Vậy có 2 tam giác ABC và A'BC: $A\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$; $A'\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{2}\right)$ và $B\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 9. Điều kiện: $x \geq y^2$ nên $x \geq 0$.

Biến đổi phương trình của hệ thành: $(x-\sqrt{x-y^2})[2(x-y^2)+x^2+x\sqrt{x-y^2}]=0$

Vì $2(x-y^2)+x^2+x\sqrt{x-y^2} \geq 0$ và dấu bằng khi $x = y = 0$: không thỏa hệ nên $x=\sqrt{x-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x - x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Khi đó, từ phương trình thứ hai của hệ ta có: $96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)}$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$96x^2 - 20x + 2 = \frac{3}{2}(8x-1)^2 + \frac{8x+1+\frac{8x+1}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{4x(8x+1)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy hệ có hai nghiệm là: $\left(\frac{1}{8};\frac{\sqrt{7}}{8}\right)$; $\left(\frac{1}{8};-\frac{\sqrt{7}}{8}\right)$.

Câu 10. Biến đổi bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}+\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c+2a}+\frac{b}{c+a+2b}+\frac{c}{a+b+2c} \geq \frac{5}{12}+\frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Nhận xét: Với các số thực dương A, B, C, D, X, Y, Z thì

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$$

Ta có: $\frac{a}{b+c+2a}+\frac{b}{c+a+2b}+\frac{c}{a+b+2c}$

$$=\frac{a^2}{ab+ac+2a^2}+\frac{b^2}{bc+ba+2b^2}+\frac{c^2}{ca+cb+2c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}$$

Đặt $x = a^2+b^2+c^2$, $y = ab+bc+ca$ thì $x \geq y > 0$.

Khi đó, ta cần chứng minh $\frac{x+2y}{2(x+y)} \geq \frac{5}{12}+\frac{y}{x}$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+4y) \geq 0$ (luôn đúng vì $x \geq y > 0$).

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

ĐỀ SỐ 11

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4$$

Câu 2. (1 điểm) Chứng minh đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có một tâm đối xứng và hai trục đối xứng.

Câu 3. (1 điểm)

a) Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn: $|z - i| = |(1+i)z|$.

b) Giải phương trình: $2\log_2^2(x-2) + (4x-7)\log_2(x-2) + 2(x-2) = 0$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 3; 2) và mặt phẳng (α): $x + 2y + 2 = 0$. Tìm toạ độ điểm M biết rằng M cách đều 3 điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x(2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{2\sin^2 x - 1} = 0$

b) Xét các số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 4, 6, 8. Có bao nhiêu số mà 5 số 1 xếp liền nhau.

Câu 7. (1 điểm) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B') bằng a, khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a, b và φ. Khi a = b không đổi, hãy xác định φ để thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' nhỏ nhất.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho các điểm P(1; 1), Q(4; 2). Lập phương trình đường thẳng d sao cho khoảng cách từ P và Q đến d lần lượt bằng 2 và 3.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{\frac{x}{4} + \sqrt{x-4}} \geq 8 - x$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2}$

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R}$
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

  $y' = -x^2 - 2x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$.

  $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 1)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$-\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-3; 1)$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại: $x = 1$, $y_{CĐ} = y(1) = -\frac{7}{3}$

Hàm số đạt cực tiểu tại: $x = 3$, $y_{CT} = y(-3) = -13$.

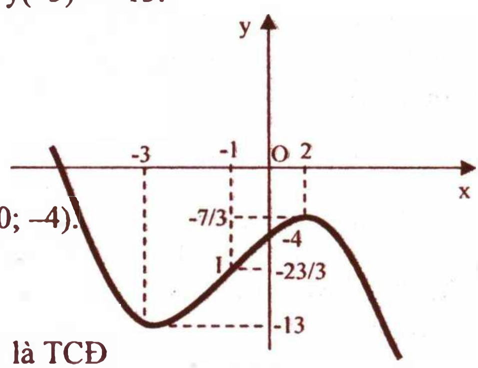
- Đồ thị:

$y'' = -2x - 2$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

nên đồ thị có điểm uốn

$I(-1; -\frac{23}{3})$ là tâm đối xứng.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; -4)$.



Câu 2.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là TCN

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là TCĐ

Đồ thị (H): $y = \frac{2x + 2}{x - 1}$ có giao điểm 2 tiệm cận là $I(1;2)$.

Tịnh tiến hệ trục theo $\overrightarrow{OI}$ thì (H): $Y = \frac{4}{X}$ là hàm số lẻ nên có tâm đối xứng là gốc I.

Vì điểm $M(X;Y) \in (H) \Leftrightarrow Y = \frac{4}{X} \Leftrightarrow X = \frac{4}{Y} \Leftrightarrow M(Y;X) \in (H)$

Và có $-X = \frac{4}{-Y} \Leftrightarrow M(-Y;-X) \in (H)$.

Do đó (H) có hai trục đối xứng là 2 phân giác $Y = \pm X$.

Câu 3.

a) Đặt: $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có $|z - i| = |(1 + i)z|$

$\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - y) + (x + y)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

Vậy tập điểm biểu diễn là đường tròn $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

b) Điều kiện: $x > 2$

Xem phương trình đã cho như phương trình bậc hai theo biến $t = \log_2(x - 2)$, giải ta được các trường hợp sau:

Khi $\log_2(x - 2) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi $\log_2(x - 2) + 2x - 4 = 0$

Vì hàm số $f(x) = \log_2(x - 2) + 2x - 4$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{5}{2}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \dfrac{5}{2}$.

Câu 4. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{1 - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

Do đó: $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\ln 3$.

Câu 5. Gọi điểm cần tìm M(a, b, c).

$\Rightarrow \overline{AM} = (a-1; b; c)$, $\overline{BM} = (a; b-1; c)$, $\overline{CM} = (a; b-3; c-2)$.

Do M cách đều A, B, C nên $\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -a + 3 \end{cases} \Rightarrow M(a; a; -a + 3)$

$d(M, (\alpha)) = MA \Leftrightarrow \dfrac{|3a + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a - 1)^2 + a^2 + (a - 3)^2}$.

Giải phương trình trên ta được $a = 1$, $a = \dfrac{23}{3}$.

Với $a = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$. Với $a = \dfrac{23}{3} \Rightarrow M\left(\dfrac{23}{3}; \dfrac{23}{3}; -\dfrac{14}{3}\right)$.

Vậy các điểm cần tìm là $M(1; 1; 2)$; $M\left(\dfrac{23}{3}; \dfrac{23}{3}; -\dfrac{14}{3}\right)$.

Câu 6.

a) ĐK: $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Biến đổi phương trình:

$$4\cos^3x + 4\cos^2x\sin x - 2\cos^2x - \sin2x - 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)(2\cos^2x - \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$ So sánh điều kiện, được $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

b) Ta xem 5 số 1 xếp liền nhau 11111 là số A
Do đó số cách xếp là số hoán vị của 5 phần tử A, 2, 4, 6, 8.
Vậy theo quy tắc nhân thì có 1.2.3.4.5 = 120 số.

Câu 7. Ta có $CC' = \frac{b}{\cos\varphi}$; $AC = \frac{b}{\sin\varphi}$

Tính được: $AB = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$. Suy ra $S_{ABC} = \frac{ab^2}{2\sin\varphi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$

Vậy $V = \frac{ab^3}{\sin2\varphi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$.

Câu 8. Giả sử phương trình d: $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Từ giả thiết: $\begin{cases} d(P;d) = 2 \\ d(Q;d) = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ \dfrac{|4A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+B+C|}{|4A+2B+C|} = \dfrac{2}{3} & (1) \\ (A+B+C)^2 = 4(A^2+B^2) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3(A+B+C) = \pm2(4A+2B+C) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 5A + B \\ C = \dfrac{-11A - 7B}{5} \end{array}\right.$$

Xét $C = 5A + B$ thì $\begin{cases} C = 5A + B \\ 4(3A+B)^2 = 4(A^2+B^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 5A + B \\ 8A^2 + 6AB = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 5A + B \\ A = 0 \vee 4A = -3B \end{cases}$$

– Nếu $A = 0 \Rightarrow B \neq 0, C = B$. Chọn $B = C = 1$, ta có d: $y + 1 = 0$
– Nếu $4A = -3B$ thì chọn $A = 3, B = -4 \Rightarrow C = 11$
Ta có d: $3x - 4y + 11 = 0$.

Xét $C = \frac{-11A - 7B}{5}$. Giải tương tự ta được A = B = C = 0 (loại).

Vậy đường thẳng d: y + 1 = 0; d: 3x – 4y + 11 = 0.

Câu 9. Đặt $t = \sqrt{x-4}$ điều kiện $t \geq 0$ và ta có $t^2 = x - 4$

BPT $\sqrt{\frac{x}{4} + \sqrt{x-4}} \geq 8 - x \Leftrightarrow |t+2| \geq 2(4 - t^2)$

$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 6 \geq 0$ hoặc $2t^2 - t - 10 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{3}{2}$

Giải ra nghiệm bất phương trình: $x \geq \frac{25}{4}$.

Câu 10. Ta có $3 - A = \frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2} \leq \frac{xy^2}{2\sqrt{xy^2}} + \frac{yz^2}{2\sqrt{yz^2}} + \frac{zx^2}{2\sqrt{zx^2}}$

$= \frac{\sqrt{xy.y}}{2} + \frac{\sqrt{yz.z}}{2} + \frac{\sqrt{zx.x}}{2}$

$\leq \frac{xy+y}{4} + \frac{yz+z}{4} + \frac{zx+z}{4} = \frac{1}{4}(x + y + z + xy + yz + zx)$

$\leq \frac{1}{4}[3 + \frac{1}{3}(x+y+z)^2] = \frac{1}{4}(3+3) = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - A \leq \frac{3}{2} \Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1. Vậy $\min A = \frac{3}{2}$.

ĐỀ SỐ 12

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$. Suy ra số nghiệm của phương trình: $1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4} = m$ theo tham số m.

Câu 2. (1 điểm) Tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M, sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $(z - i)(z^4 + (1+i)z^2 + i) = 0$.

b) Giải phương trình: $\log_8(2x^2) = \log_2^2 x$.

Câu 4. (1 điểm) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số:

$y = (x - 2)\ln x$ và trục Ox. Tính diện tích của (H).

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC'. Tính thể tích khối tứ diện BDA'M và xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) ⊥ (MBD)

Câu 6. (1 điểm) a) Cho 2sina + 3cosa = 2. Tính tan a.

b) Cho n là số nguyên dương, tính tổng

$$S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n.$$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ cùng đi qua điểm M(1; 0). Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại A, B sao cho MA = 2MB.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5x = 2y - 4 \\ y^2 - 3y = 2x - 2 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Với mọi số thực x, y, z dương thay đổi, thỏa mãn xyz = 1.

Chứng minh rằng: $x + y + z \geq \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{z}}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

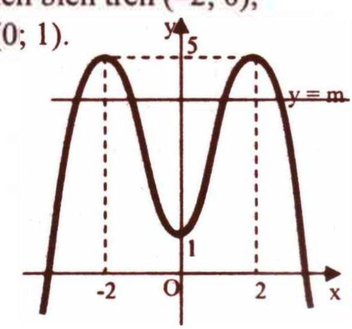
- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $\lim_{x \to \pm\infty} y = -\infty$

$y = 4x - x^3 = x(4 - x^2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên (–∞; –2), (0;2) và nghịch biến trên (–2; 0), (2; +∞). Hàm số đạt CĐ tại (±2; 5) và CT tại (0; 1).



- Đồ thị $y'' = 4 - 3x^2$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ nên

đồ thị có 2 điểm uốn $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{29}{9}\right)$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.

Số nghiệm của phương trình: $1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4} = m$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đường cong (C). Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Nếu $m = 5$ hoặc $m < 1$ thì phương trình có 2 nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì phương trình có 3 nghiệm.
- Nếu $1 < m < 5$ thì phương trình có 4 nghiệm.
- Nếu $m > 5$ thì phương trình vô nghiệm.

Câu 2. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng: $x = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2$ nên tiệm cận ngang: $y = 2$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ là:

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$$

Tọa độ các giao điểm của tiếp tuyến với các đường tiệm cận:

$$A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right); B(2x_0 - 2; 2)$$

Tam giác IAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là: $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + \frac{1}{(x_0 - 2)^2}} \geq \sqrt{2}$

Vậy $S = \pi R^2 \geq 2\pi$. Suy ra $\min S = 2\pi$, đạt được khi

$$(x_0 - 2)^2 = \frac{1}{(x_0 - 2)^2}$$

$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^4 = 1 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 3$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn M(1; 1) hoặc M(3; 3).

Câu 3.

a) Phương trình $(z - i)(z^4 + (1 + i)z^2 + i) = 0$.

$\Leftrightarrow (z - i)(z^2 + 1)(z^2 + i) = 0 \Leftrightarrow z - i = 0$ hoặc $z^2 + 1 = 0$ hoặc $z^2 + i = 0$.

Giải ra được các nghiệm phức là: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$.

b) Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2^x$, ta có $\log_8(2x^2) = \frac{1 + 2t}{3}$, $\log_2^2 x = t^2$

Phương trình $\log_8(2x^2) = \log_2^2 x \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$

Khi $t = 1$, ta có $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Khi $t = -\frac{1}{3}$, ta có $\log_2^x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Vậy nghiệm của PT là x = 2 và $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 4. PTHĐGĐ của đồ thị hàm số và Ox:

$$(x-2)\ln x = 0\ (x > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vì $x \in [1; 2] \Rightarrow 2 - x \geq 0, \ln x \geq 0$.

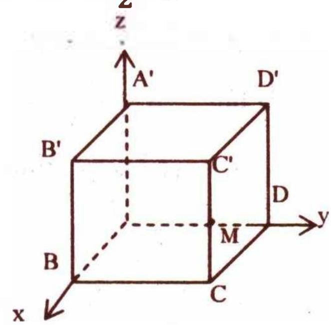
Diện tích: $S = \int_1^2 |(x-2)\ln x|dx = \int_1^2 (2-x)\ln x dx$

Đặt u = lnx; dv = (2 – x)dx. Khi đó $du = \frac{dx}{x}$; chọn $v = 2x - \frac{x^2}{2}$

Suy ra $S = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\left(2 - \frac{x}{2}\right)dx = 2\ln 2 - \left(2x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{5}{4}$

Vậy $S = 2\ln 2 - \frac{5}{4}$ (đvdt).

Câu 5. Từ giả thiết ta có: C(a; a; 0), C'(a; a; b)⇒ M(a; a; $\frac{b}{2}$)



Nên $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (0; a; \frac{b}{2})$,

$\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Do đó: $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$

Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến là:

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$$

mặt phẳng (A'BD) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab; ab; a^2)$

Do đó (BDM) ⊥ (A'BD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$

$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$. Vậy tỉ số: $\frac{a}{b} = 1$.

Câu 6. a) Ta có: 2sina + 3cosa = 2 ⇒ 3cosa = 2 – 2sina

$\Rightarrow 9\cos^2 a = (2 - 2\sin a)^2 \Rightarrow 13\sin^2 a - 8\sin a - 5 = 0$

⇒ sina = 1 hoặc $\sin a = -\frac{5}{13}$.

Xét sina = 1 ⇒ cosa = 0 ⇒ tana không xác định (loại)

Xét $\sin a = -\frac{5}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{12}{13}$ hay $\cos a = -\frac{12}{13}$ (trái giả thiết).

Do đó $\cos a = \frac{12}{13} \Rightarrow \tan a = -\frac{5}{12}$.

b) Ta có $S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-1}^{0} x^k dx\right)C_n^k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)^n\,dx = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$.

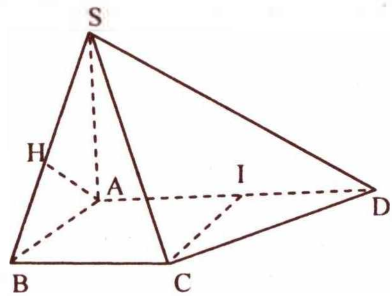
Câu 7. Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $IA = ID = IC = a \Rightarrow CD \perp AC$.

Mặt khác $CD \perp SA$. Suy ra $CD \perp SC$ nên tam giác SCD vuông tại C.

Trong tam giác vuông SAB, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$



Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD) thì:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

Ta có: $d_1 = \frac{3V_{BSCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}}$;

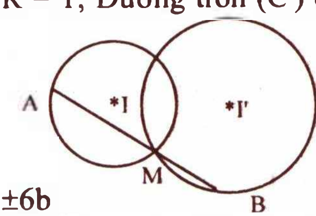
$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}$$

Suy ra $d_1 = \frac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là: $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$.

Câu 8. Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), bán kính R = 1; Đường tròn (C') có tâm I'(–2; 0), bán kính R' = 3.



Gọi Δ là đường thẳng cần tìm có VTPT là $\vec{n} = (a; b)$

$\Rightarrow (\Delta): ax + by - a = 0,\ a^2 + b^2 > 0$.

Ta có: $R^2 - d^2(I; \Delta) = 4(R'^2 - d^2(I'; \Delta)) \Leftrightarrow a = \pm 6b$

Từ đó, tìm được hai đường thẳng Δ_1: $6x + y - 6 = 0$, Δ_2: $-6x + y + 6 = 0$.

Câu 9. Ta có hệ $\begin{cases} x^2 - 5x = 2y - 4 \\ y^2 - 3y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 1) - 3(x - 1) = 2y \\ y^2 - 3y = 2(x - 1) \end{cases}$

Đặt t = x – 1. Hệ trở thành $\begin{cases} t^2 - 3t = 2y \\ y^2 - 3y = 2t \end{cases}$

Suy ra: $(t - y)(t + y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = t$ hoặc $y = 1 - t$.

Khi $y = t \Rightarrow t = y = 0; t = y = 5$ nên nghiệm là (1; 0), (6; 5)

Khi $y = 1 - t \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} t = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ nên nghiệm là (0;2), (3;–1).

Vậy nghiệm là (1; 0), (6; 5), (0;2), (3;–1).

Câu 10. x, y, z dương thay đổi, thỏa mãn xyz = 1.

Ta có $z + z + y \geq 3\sqrt[3]{z^2y}$.

Tương tự $x + x + z \geq 3\sqrt[3]{x^2z}$; $y + y + x \geq 3\sqrt[3]{y^2x}$

Cộng ba bất đẳng thức thì được:

$$3(x + y + z) \geq 3(\sqrt[3]{z^2y} + \sqrt[3]{x^2z} + \sqrt[3]{y^2x})$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq \sqrt[3]{z^2y} + \sqrt[3]{x^2z} + \sqrt[3]{y^2x}$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq \sqrt[3]{\frac{z^2y}{xyz}} + \sqrt[3]{\frac{x^2z}{xyz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2x}{xyz}}$$

Vậy: $x + y + z \geq \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{z}}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1.

ĐỀ SỐ 13

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{4}{2 - x}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm x để hàm số $f(x) = \frac{3}{x} + 2x^2$, với x > 0 đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |z + i|$ và môđun của số phức z – 2i đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải bất phương trình: $\log_2 x - \log_4(x - 3) > 2$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $A_1(0;\ 0;\ 0)$, $B_1(1;\ 0;\ 0)$, $D_1(0;\ 2;\ 0)$, $A(0;\ 0;\ 3)$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, B_1C_1, C_1D_1, D_1D. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng (α). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (α), tính thể tích của khối chóp có đỉnh C và đáy là thiết diện đó.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Gieo đồng thời 2 đồng xu cân đối 3 lần độc lập liên tiếp. Tính xác suất để có ít nhất 2 lần cả 2 đồng xu đều sấp.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' và có chiều cao h = a. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy tâm O sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$. Vẽ đường sinh AA'. Biết góc giữa đường thẳng A'O và mặt phẳng (AA'B) bằng 30^0. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng OO' và A'B.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết A(1; 4), phương trình đường cao BH là $x - 2y + 9 = 0$, phương trình đường phân giác trong CD là $x + y - 3 = 0$. Tìm hai đỉnh B và C.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình: $2\sqrt{x^2 - 9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa điều kiện: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3}{ab + bc + ca}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y = \frac{4}{2-x}$.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Sự biến thiên: $y' = \frac{4}{(2-x)^2} > 0, \forall x \neq 2$.

Đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng, vì $\lim_{x \to 2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \to 2^+} y = -\infty$

Đường thẳng y = 0(trục hoành) là tiệm cận ngang vì

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{2-x} = 0.$

Bảng biến thiên

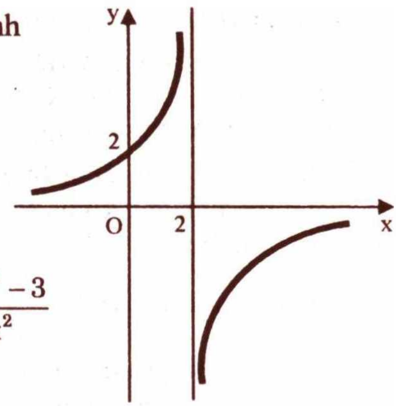
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	||	+
y	0 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 0

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

• Đồ thị: Đồ thị cắt trục tung tại điểm A(0; 2).

Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận I(2;0).



Câu 2. Với x >0, ta có: $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} + 4x = \dfrac{4x^3 - 3}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ (chọn).

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

Câu 3.

a) Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$,

Ta có $|(x+1) + yi| = |x + (y+1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow y = x$.

Do đó: $|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (x-2)^2} = \sqrt{2(x-1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$

Suy ra: $|z - 2i|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (x; y) = (1; 1)$.Vậy số phức: $z = 1 + i$.

b) Điều kiện $x > 3$.

BPT: $\log_2 x - \log_4(x-3) > 2 \Leftrightarrow \log_4 x^2 > \log_4(x-3) + \log_4 16$

$\Leftrightarrow \log_4 x^2 > \log_4 16(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 16x + 48 > 0 \quad \Leftrightarrow x < 4$ hoặc $x > 12$.

Vậy nghiệm BPT là $3 < x < 4$ hoặc $x > 12$.

Câu 4. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x(\cos x - 1)}$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x(\cos x - 1)} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}$$

Đặt $u = \cos x$ thì $du = d(\cos x)$.

Khi $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow u = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$.

$$I=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{\left[(1+u)+(1-u)\right]}{(1+u)(1-u)^2}du=\frac{1}{4}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{du}{(1-u)^2}+\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{du}{1-u^2}\right)$$

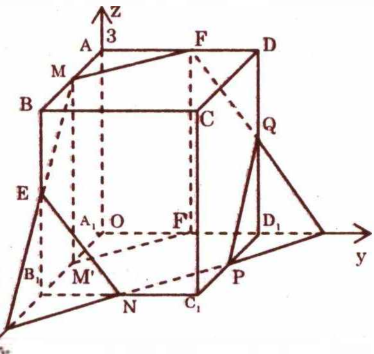
$$=\left[\frac{1}{4(1-u)}+\frac{1}{8}\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_{\frac{1}{2}}^{0}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\ln 3.$$

Câu 5. Ta có $M(\frac{1}{2}; 0; 3)$, $N(1; 1; 0)$, $P(\frac{1}{2}; 2; 0)$, $Q(0; 2; \frac{3}{2})$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $6x + 3y + 2z - 9 = 0$.

Thay toạ độ của điểm Q vào phương trình trên, ta thấy nó thoả mãn.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng, và phương trình của mặt phẳng (α), là: $6x + 3y + 2z - 9 = 0$.



Thiết diện là lục giác MENPQF có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình hộp chữ nhật ta có $C(1; 2; 3)$

Gọi h là chiều cao của hình chóp C.MENPQF thì:

$$h = d(C, (\alpha)) = \frac{|6.1+3.2+2.3-9|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{9}{7}.$$

Gọi M', F' là hình chiếu của M và F lên $mp(A_1B_1C_1D_1)$ thì lục giác $M'B_1NPD_1F'$ là hình chiếu của lục giác MENPQF lên $mp(A_1B_1C_1D_1)$.

Gọi φ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đáy của hình hộp thì: $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{k}\right)\right| = \frac{2}{7}$

$S_{M'B_1NPD_1F'} = \frac{3}{2}$ và $S_{M'B_1NPD_1F'} = S_{MENPQF}.\cos\varphi$

$\Rightarrow S_{MENPQF} = \frac{S_{M'B_1NPD_1F'}}{\cos\varphi} = \frac{21}{4}$. Vậy thể tích $V_{C.MENPQF} = \frac{1}{3}.\frac{21}{4}.\frac{9}{7} = \frac{9}{4}$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $x \neq k\pi$ và $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Biến đổi phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x) = 0$

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ Với $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$ (1)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

ĐK: $|t| \le \sqrt{2}$. Khi đó (1) thành $-\sqrt{2}t^2 + t + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

So sánh điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

b) Gọi M là biến cố: "có ít nhất 2 lần cả 2 đồng xu đều sấp"
A là biến cố: "có đúng 2 lần cả 2 đồng xu đều sấp"
B là biến cố: "cả 3 lần cả 2 đồng xu đều sấp"
thì $M = A \cup B$ và A, B xung khắc.

Ta có xác suất để trong một lần gieo cả 2 đồng xu đều sấp là $\frac{1}{4}$

Suy ra $P(A) = C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2.\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$, $P(B) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64}$.

Do đó $P(M) = P(A) + P(B) = \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{5}{32}$.

Câu 7. Ta có OO' // (AA'B)

$\Rightarrow d(OO', A'B) = d(O, (A'AB))$

Gọi H là hình chiếu của O lên AB thì $AH \perp (ABA')$

$\Rightarrow d(O, (A'AB)) = OH$ và $\widehat{OA'H} = 30^o$.

Đặt $OH = x \Rightarrow OA' = 2x$ và $O'A' = OA = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Tam giác OO'A' vuông tại O' nên $a^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Vậy $d(OO', A'B) = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Câu 8. Cạnh AC là đường thẳng qua A và vuông góc với BH nên có phương trình $2(x - 1) + (y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$

Đỉnh C là giao điểm của AC và CD nên toạ độ của C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$, suy ra C(3; 0).

Gọi (d) là đường thẳng qua A và vuông góc với CD, phương trình của (d): $(x - 1) - (y - 4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

Toạ độ giao điểm I của (d) và CD là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$, suy ra I(0; 3).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua CD, suy ra I là trung điểm của AA' nên A'(−1; 2). Do CD là đường phân giác trong góc C nên đường thẳng CB đối xứng với đường thẳng CA qua CD, suy ra CB là đường thẳng qua C, A' hay nhận $\overline{CA'} = (-4; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $(x-3) + 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$.

Đỉnh B là giao điểm của BC và BH nên toạ độ của B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ x-2y+9=0 \end{cases}$, suy ra B(3; −3).

Câu 9. Điều kiện: $x \le -3$ hay $x > 3$.

Phương trình: $2\sqrt{x^2-9} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)(x-3)^2} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\left[2|x-3|-(x+5)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{x-3} = 0 \\ \begin{cases} 2|x-3|-(x+5) = 0 \\ \dfrac{x+3}{x-3} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-11=0; x\ge 3 \\ 1-3x=0; x\le 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=11 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là S = {−3; 11}.

Câu 10. Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.

Ta có: $1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\le 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le t < 1$.

Do đó: $P = \dfrac{2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{3}{ab+bc+ca} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1-t}$.

Xét $f(t) = \dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1-t}$, với $\dfrac{1}{3} \le t < 1 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{4t^2+4t-2}{t^2(1-t)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $t = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (loại).

Lập BBT thì có min P= $4(2+\sqrt{3})$.

ĐỀ SỐ 14

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}.$$

Suy ra đồ thị (C') của hàm số: $y = \left|\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}\right|$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (m+1)x^2 + 2m + 1$ (1) cắt trục hoành chỉ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 2.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $\overline{z^2} + 2021 = 0$.

b) Giải bất phương trình: $\frac{1}{3.2^x - 1} > \frac{1}{4^x + 1}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{dx}{x + 1 - \sqrt{2x+1}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt cầu(S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$. Chứng minh (d) và (S) có hai điểm chung A, B phân biệt. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết rằng (α) qua A, B và cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn lớn của (S).

Câu 6. (1 điểm)

a) Chứng minh hệ thức: $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x \cos^2 x$.

b) Tìm hệ số lớn nhất của khai triển:

$P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ với số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{30}$.

Câu 7 (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S, góc SBC bằng 60^0, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình hai cạnh AB, AD lần lượt là: $x+2y-2=0$; $2x + y + 1 = 0$. Đoạn thẳng BD chứa điểm M(1; 2). Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c tương ứng với 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c.

Chứng minh: $m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca)$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$.

- Tập xác định: D = **R**
- Sự biến thiên $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = x^2 - 2x - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên

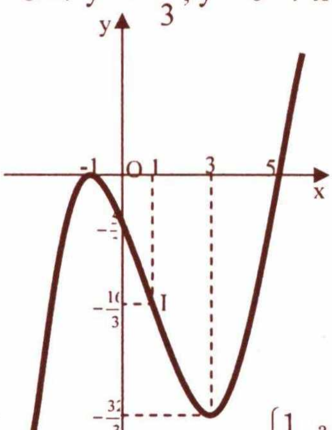
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{32}{3}$	↗	$+\infty$

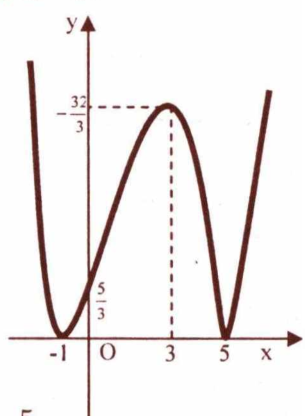
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1; y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$; $y_{CT} = \frac{-32}{3}$.

- Đồ thị: $y'' = 2x - 2$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên đồ thị có điểm uốn $I\left(1; -\frac{16}{3}\right)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$, $y = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.





Ta có $y = \left|x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}\right| = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3} & \text{khi } x \geq 5 \\ -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}\right) & \text{khi } x < 5 \end{cases}$

nên đồ thị (C') giữ nguyên phần đồ thị (C) khi $x \geq 5$ và lấy đối xứng phần $x < 5$ của (C) qua Ox.

Câu 2. PTHĐGĐ của đồ thị hàm số (1) và Ox:

$$x^4 - (m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta có $t^2 - (m + 1)t + 2m + 1 = 0$ (2)

Đồ thị hàm số (1) cắt Ox chỉ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ PT (2) có hai nghiệm trái dấu: $t_1 < 0 < t_2$ hay $t_1 = t_2 > 0$

$\Leftrightarrow P < 0$ hay ($\Delta = 0$ và $S > 0$)

$\Leftrightarrow 2m + 1 < 0$ hay ($m = 3 \pm 2\sqrt{3}$ và $\dfrac{m+1}{2} > 0$)

$\Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$ hay $m = 3 \pm 2\sqrt{3}$.

Ta có $t_{1,2} = \dfrac{m + 1 \pm\sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2}$ nên AB = 2

$\Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 1 \Leftrightarrow t_2 = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 6m - 3} = 1 - m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -1$ (chọn)

Vậy giá trị cần tìm là $m = -1$.

Câu 3.

a) Đặt $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$) khi đó: $\begin{cases} z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \\ \overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 - b^2 - 2abi + 2021 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2021 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Từ hệ trên, ta suy ra $b \neq 0$.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp: $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{2021} \end{cases}$

Vậy số phức cần tìm là $z = \pm\sqrt{2021}\,i$.

b) Ta có: $4^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$

Do đó: BPT $\dfrac{1}{3.2^x - 1} > \dfrac{1}{4^x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.2^x - 1 > 0 \\ 4^x - 3.2^x + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\log_2 3 \\ 2^x < 1 \text{ hay } 2 < 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\log_2 3 \\ x < 0 \text{ hay } 1 < x \end{cases}$

Vậy nghiệm BPT là $-\log_2 3 < x < 0$ hoặc $1 < x$.

Câu 4. Đặt $t = \sqrt{2x + 1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1 \Rightarrow tdt = dx$

Khi $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow t = 2$; $x = 4 \Rightarrow t = 3$.

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{4}\frac{dx}{x+1-\sqrt{2x+1}} = \int_{2}^{3}\frac{tdt}{\frac{t^2-1}{2}+1-t} = 2\int_{2}^{3}\frac{tdt}{(t-1)^2} = 2\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt$$

$= 2\ln 2 + 1$.

Câu 5. Đường thẳng (d) đi qua M(1; 1; –2) và có một VTCP là $\vec{a} = (1; 2; -2)$.

Mặt cầu (S) có tâm I(1; –1; –3) và có bán kính R = 3.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (0; 2; 1)$. Đặt $\vec{n} = [\vec{a}; \overrightarrow{IM}]$

Ta có $\vec{n} = (6; -1; 2)$ suy ra $|\vec{n}| = \sqrt{41}$

Ta có $d(I, (d)) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{41}}{3} < R$ nên đường thẳng (d) cắt (S) tại hai điểm A, B phân biệt.

Toạ độ của A, B có dạng (1+t; 1 + 2t; –2 – 2t),

Vì A, B ∈ (S) $\Rightarrow (1+t-1)^2 + (1+2t+1)^2 + (-2-2t+3)^2 = 9 \Rightarrow t = \pm\frac{2}{3}$

Do (α) qua A, B và cắt (S) theo một giao tuyến là một đường tròn lớn nên (α) chính là mặt phẳng qua (d) và tâm I của (S).

Do đó (α) là mặt phẳng qua I, nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{IA}] = (6;-1;2)$ làm một VTPT nên có phương trình là

$6(x-1) - (y+1) + 2(z+3) = 0$ hay $6x - y + 2z - 1 = 0$.

Câu 6.

a) Ta có

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sin^2 x\cos^2 x.\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

$$= \sin^2 x.\cos^2 x\,\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin^2 x.\cos^2 x.$$

b) Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

Do đó

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$= 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n) = 2^{31}$$

Suy ra $2n + 1 = 31 \Leftrightarrow n = 15$.

$P(x) = (1+x)(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n+1}$

Giả sử $(1+2x)^{15} = b_0 + b_1x + \ldots + b_{15}x^{15}$.

Thì $P(x) = (1+x)(1+2x)^n = (1+x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_{15}x^{15})$

$= b_0 + (b_0 + b_1)x + (b_1 + b_2)x^2 + ... + (b_{14} + b_{15})x^{15} + b_{15}x^{16}$

Ta có $b_i = C_{15}^{i}.2^i,\ 0 \le i \le 15$

$b_i > b_{i-1} \Leftrightarrow C_{15}^{i}.2^i > C_{15}^{i-1}.2^{i-1} \Leftrightarrow i \le 10$

$b_i > b_{i+1} \Leftrightarrow C_{15}^{i}.2^i > C_{15}^{i+1}.2^{i+1} \Leftrightarrow i \ge 10.$

Do đó $b_0 < b_1 < ... < b_{10} > b_{11} > ... > b_{15}$.

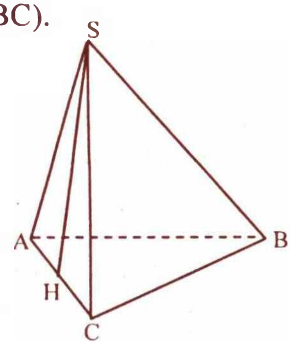
nên $a_0 < a_1 < ... < a_{10} = b_9 + b_{10}$

và $b_{10} + b_{11} = a_{11} > a_{12} > ... > a_{16}$.

Do $b_9 = C_{15}^{9}.2^9 < C_{15}^{11}.2^{11} = b_{11}$ nên $a_{10} < a_{11}$.

Vậy hệ số a_i lớn nhất là $a_{11} = b_{10} + b_{11} = C_{15}^{10}.2^{10} + C_{15}^{11}.2^{11}$.

Câu 7. Gọi H là trung điểm của AC, suy ra $SH \perp (ABC)$.



Dùng định lý côsin trong tam giác SBC:

$SC^2 = SB^2 + a^2 - a.SB \qquad SH^2 = SC^2 - \dfrac{a^2}{4}$.

Tam giác vuông SHB: $SB^2 = SH^2 + \dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow a.SB = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 8. Phương trình hai cạnh AB, AD lần lượt là: $x + 2y - 2 = 0$; $2x + y + 1 = 0$ nên tìm được $A\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Phương trình các đường phân giác góc A là $\dfrac{|2x + y + 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x + 2y - 2|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow |2x + y + 1| = |x + 2y - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x + 3y - 1 = 0 & (d_1) \\ x - y + 3 = 0 & (d_2) \end{array}\right.$

Xét d_1, thì BD: $-x + y - 1 = 0 \Rightarrow B(0; 1), D\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Thử lại, M nằm ngoài đoạn BD nên bị loại.

Xét d_2, thì BD: $x + y - 3 = 0 \Rightarrow B(4; -1), D(-4; 7)$ (thỏa)

Suy ra $C\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có:

$2x^3 - y^3 = (2y - x)(2y^2 - x^2) \Leftrightarrow 5y^3 - 2y^2x - 2x^2y - x^3 = 0$

$\Leftrightarrow (y-x)(x^2+3xy+5y^2)=0$

Vì $x^2+3xy+5y^2=\left(x+\frac{3y}{2}\right)^2+\frac{11y^2}{4}\geq 0$ nên suy ra: $x = y$.

Thay $x = y$ vào hệ ban đầu, suy ra tập nghiệm của hệ: $S = \{(-1; -1); (1; 1)\}$

Câu 10. Ta chứng minh 3 bất đẳng thức của tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c tương ứng với 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c:

(1): $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

(2): $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$

(3): $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

Bình phương bất đẳng thức (3) và kết hợp bất đẳng thức (1) và (2) thì có được bất đẳng thức:

$$m_am_b+m_bm_c+m_cm_a<\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\leq\frac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

ĐỀ SỐ 15

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

Đường thẳng d: $y = -6x - 6$ nằm phía trên hay phía dưới đồ thị (C).

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3m(m-1)x$ có hai điểm cực trị A, B và góc giữa đường thẳng AB với trục hoành bằng 45^o.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức $z=\left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-2}=6A_n^0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2^x-2=3y-3^x\\3^y-2=3x-2^y\end{cases}$.

Câu 4 (1 điểm) Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $M_1(1;0;1)$, $M_2(2;-1;0)$ và $M_3(0;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M_3 mà khoảng cách từ M_1 và M_2 đến (P) đều bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $5 + \cos 2x = 6\cos x + 4\sin x$.

b) Tính tổng: $T=1C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$.

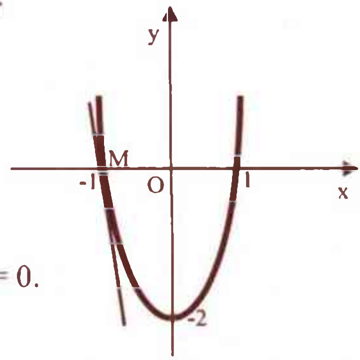
Câu7.(1điểm) Cho lăng trụ đứng ABC. A'B'C', có các cạnh AA' = AB = 3a, BC = 4a, CA = 5a và M là trung điểm cạnh bên BB'. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và diện tích thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua A' và vuông góc với AM.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác OAB cân tại A và (C): $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ là đường tròn nội tiếp tam giác này. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác OAB, biết $y_A \neq 0$.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $2(\sqrt{1+6x}+\sqrt{3-6x}) \geq 1-6x$.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin x+\sqrt{1+2\cos^2 x}}, \text{ với } x \in [\frac{\pi}{2};\pi].$$



LỜI GIẢI

Câu 1. Hàm số: $y=x^4+x^2-2$

- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$

$y'=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$, đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Hàm số đạt CT(0;–2).

- Đồ thị: $y''=12x^2+2>0, \forall x$ nên không có điểm uốn.

$y=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.

Đặt $y=f(x)=x^4+x^2-2$, $y=g(x)=-6x-6$

Xét hiệu $f(x)-g(x)=x^4+x^2-2+6x+6$

$=(x^2-1)(x^2+2)+6(x+1)=(x+1)^2(x^2-2x+4)$

$=(x+1)^2[(x-1)^2+3] \geq 0, \forall x$.

Vậy hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm M(–1; 0) và đồ thị (C) ở phía trên đường thẳng d với mọi $x \neq -1$.

Câu 2. Tập xác định D = **R**.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3m(m-1)$. Do đó đồ thị có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 9m>0 \Leftrightarrow m>0$. (Vì y' đổi dấu qua 2 nghiệm PT y' = 0)

Mà $y=(x-m)y'-2mx+m^2(m-1)$

nên PT đường thẳng AB: $y=-2mx+m^2(m-1)$.

Góc giữa đường thẳng AB với trục hoành bằng 45^o

$\Leftrightarrow -2m = -1$ hoặc $-2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ Chọn giá trị $m = \frac{1}{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $C_n^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0$

Chọn số nguyên dương n = 4.

Ta có $z = \left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right)^4 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^4}(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})^3$

$= \frac{1}{4^4}(1-i\sqrt{3})(-8) = -\frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i.$

Cách khác: $\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

Do đó $z = \left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{16} + \left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

Vậy: $z = -\frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i.$

b) Hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y \end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình trong hệ suy ra

$2^x - 3^y = 3(y-x) - 3^x + 2^y \quad \Leftrightarrow (2^x - 2^y) + (3^x - 3^y) + 3(x-y) = 0$

Xét x > y thì VT > 0, x <y thì VT < 0, x = y thì phương trình trên thỏa mãn.

Thay y = x vào phương trình thứ hai: $3^x + 2^x - 3x - 2 = 0$ (1)

Đặt $f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3^x\ln 3 + 2^x\ln 2 - 3$

$\Rightarrow f''(x) = 3^x(\ln 3)^2 + 2^x(\ln 2)^2 > 0$

nên f '(x) đồng biến trên **R**, do đó f '(x) = 0 có một nghiệm duy nhất nên lập BBT thì f có một cực trị duy nhất. Suy ra f(x) = 0 có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác f(0) = f(1) = 0 nên x= 0 hay x = 1. Vậy hệ có hai nghiệm (1;1), (0; 0)

Câu 4. Đặt $\begin{cases} u = x^2e^x \\ dv = \frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x + x^2)e^x dx \\ v = -\frac{1}{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = x(x+2)e^x dx \\ v = -\frac{1}{x+2} \end{cases}$

Do đó $I = \int_0^2 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = -\frac{x^2e^x}{x+2}\Big|_0^2 + \int_0^2 xe^x dx = -e^2 + J$, với $J = \int_0^2 xe^x dx$

Tính J: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Do đó $J = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$ Vậy $I = -e^2 + e^2 + 1 = 1$

Câu 5. Mặt phẳng (P) đi qua M(0; 0; 1) nên có phương trình

$A(x-0) + B(y-0) + C(z-1) = 0$ hay $Ax + By + Cz - C = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$

Khoảng cách từ M_1, M_2 đến (P) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|A + C - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2A - B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó $|A| = |2A - B - C|$ hay $\pm A = 2A - B - C$

Suy ra $C = A - B$ hoặc $C = 3A - B$.

– Với $C = A - B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (A - B)^2 \Leftrightarrow 2B(B - A) = 0.$$

Nếu $B = 0$ thì $C = A$, ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình: $x + z - 1 = 0$

Nếu $A = B$ thì $C = 0$. Ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình:$x + y = 0$.

– Với $C = 3^a$-B thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (3A - B)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 6AB + 2B^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 4A^2 - 3AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow (2A - \frac{3}{4}B)^2 + \frac{7B^2}{16} = 0$$

Do đ2 $A - \frac{3}{4}B = 0$ và $B = 0$, tức là $A = 0, B = 0$ và do đó $C = 0$: loại

Vậy có 2 mặt phẳng (P) có phương trình: $x + z - 1 = 0$; $x + y = 0$.

Câu 6.

a) PT: $5 + \cos 2x = 6\cos x + 4\sin x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 2\sin x$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x - 2) = 2\sin x$

$\Leftrightarrow 2(2 - \cos x)\sin^2\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow [(2 - \cos x)\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}]\sin\frac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\frac{x}{2} = 0 & (1) \\ (2 - \cos x)\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2} & (2) \end{array}\right.$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x = 2k\pi$

Với phương trình (2), ta thấy $\cos\frac{x}{2} \neq 0$,

nên phương trình (2) $\Leftrightarrow (2 - \cos x)\tan\frac{x}{2} = 2$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có phương trình: $3t^3 - 2t^2 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(3t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Vậy nghiệm $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

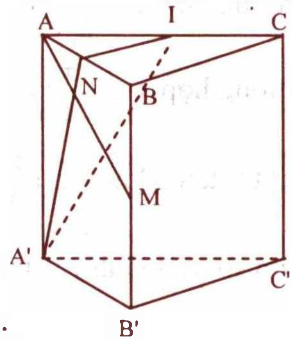
b) Vì: $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên: $T = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$

hay $T = 1C_n^n + 2C_n^{n-1} + 3C_n^{n-2} + ... + (n+1)C_n^0$

Cộng vế theo vế: $2T = (n + 2)\ (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n) = (n + 2).2^n$

Vậy $T = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = (n + 2)2^{n-1}$.

Câu 7. Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25a^2$



nên tam giác ABC vuông tại B

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 6a^2$

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = 18a^3$

Gọi N là trung điểm AB

$\Rightarrow AM \perp A'N \Rightarrow A'N \subset (P)$.

Mà $BC \perp AM$, nên BC // (P)

$\Rightarrow$ (P) cắt mp(ABC) theo giao

tuyến NI song song BC $\Rightarrow A'N \perp NI$ ($I \in AC$).

Vậy: $S_{\Delta A'NI} = \frac{1}{2}A'N.NI = \frac{3a^2\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8. Ta có (C) có tâm I(2; –1), R = 1 và d(I; Ox) = 1 = R.

Vậy OB: y = 0. (C) không tiếp xúc Ox, nên OA có dạng

$y = kx \Leftrightarrow kx - y = 0\ (k \neq 0)$

$d(I, OA) = R \Leftrightarrow \frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 3k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$

Vậy OA: $4x + 3y = 0$.

Ta có $x_A = x_I = 2 \Rightarrow A\left(2; -\frac{8}{3}\right)$

(C) tiếp xúc với Ox tại T(2; 0) $\Rightarrow$ B(4; 0).

Suy ra AB qua B(4; 0) và có VTCP $\overrightarrow{AB} = \left(2; \frac{8}{3}\right)$ nên VTPT (4;–3).

Vậy AB; $4x - 3y - 16 = 0$.

Câu 9. Điều kiện: $x \in \left[-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right]$.

Đặt $a = \sqrt{1+6x}$, $b = \sqrt{3-6x}$ thì $a, b \geq 0$, $a^2 + b^2 = 4$

Bất phương trình:

$$2(\sqrt{1+6x} + \sqrt{3-6x}) \geq 1 - 6x$$

$\Leftrightarrow 2(a+b) \geq \dfrac{b^2 - a^2}{2} \Leftrightarrow (a+b)(4+a-b) \geq 0$: đúng vì

$a + b > 0$ và $b - a \leq b + a \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} = 2\sqrt{2} < 4$.

Vậy tập nghiệm của bpt: $S = \left[-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 10. Ta có $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 x}}$

Trường hợp $x = \dfrac{\pi}{2}$; ta có $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Trường hợp $x \in (\dfrac{\pi}{2}; \pi]$ ta có $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\tan x - 1}{\tan x - \sqrt{\tan^2 x + 3}}$ (do $\cos x < 0$)

Đặt $t = \tan x$, khi $x \in (\dfrac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$

Hàm số trở thành $y = f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{t-1}{t - \sqrt{t^2+3}}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{(t - \sqrt{t^2+3}) - (1 - \dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}})(t-1)}{(t-\sqrt{t^2+3})^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{t^2+3} + t - 1}{\sqrt{t^2+3}(t - \sqrt{t^2+3})}$

Ta có $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3} \leq 1 - t$ (do $t - \sqrt{t^2+3} < 0$)

$\Leftrightarrow t^2 + 3 \leq (1-t)^2 \Leftrightarrow t \leq -1$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Kết hợp hai trường hợp của x, ta có $\max y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\min y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

ĐỀ SỐ 16

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm)

Tìm của m để đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ (1) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $z^4 - z^2 - 6 = 0$.

b) Giải phương trình: $\log_4(x^2+x+1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)$

$$= \frac{1}{3}\log_2(x^4+x^2+1)^3 + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x^4-x^2+1}.$$

Câu 4. (1 điểm) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ và hai trục tọa độ. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(4; 0; 0) và B là điểm trong mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB} = 45^0$. Tìm tọa độ điểm C trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 8.

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính: $A = \sin\alpha + \cos\alpha$.

b) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:
$P(x) = (x^2 + x - 1)^5$.

Câu 7. (1 điểm) Cho khối chóp S.ABC. Trên các cạnh SA, SC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{MA} = 2$, $\dfrac{SN}{NC} = \dfrac{1}{2}$. Mặt phẳng ($\alpha$) qua MN và song song với SB chia khối chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích của 2 phần đó.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm A(0; 1), B(2; –1) và các đường thẳng (d_1): $(m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$ và (d_2): $(2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$. Tìm các giá trị của m để hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại điểm P sao cho PA + PB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

Câu 10. (1 điểm) Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh:

$$AC^2 + BD^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB.CD.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

LỜI GIẢI

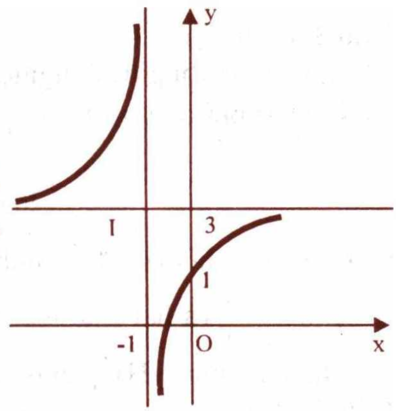
Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y = -1$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D.$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

- Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Cho $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận $I(-1; 3)$.

Câu 2.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m$

Điều kiện hàm số có ba cực trị là $m > 0$. Khi đó, ba điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2)$ nên tam giác ABC cân tại A

Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên trục tung

$\Rightarrow I(0; x)$. Ta có: $IA = IB \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2m} \Rightarrow I\left(0; 2 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2m}\right)$

D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi:

$$ID = IA \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2m}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2m}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2m} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2 + m - 1) = 0$$

Vì $m > 0$ nên chọn $m = 1$ hoặc $m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Câu 3.

a) Đặt $w = z^2$, ta có phương trình

$z^4 - z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow w^2 - w - 6 = 0$

$\Leftrightarrow w = -2$ và $w = 3$.

Do đó $z^2 = -2 = 2i^2 = (\sqrt{2}i)^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}\,i$

Và $z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}$.

Vậy các nghiệm phức phương trình là $z = \pm\sqrt{2}\,i$, $z = \pm\sqrt{3}$.

b) Tập xác định D = **R**.

Ta có: $\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1)$

$= \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow \log_2[(x^2 + 1)^2 - x^2] = \log_2[(x^4 + 1)^2 - x^4] \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^4 + 1)^2 - x^4$

$\Leftrightarrow (x^4 - x^2)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$. Vậy tập nghiệm $S = \{0; \pm1\}$.

Câu 4. Đồ thị cắt trục hoành tại x = 2 và trục tung tại y = 2.

Do đó: $V = \pi\int_0^2\left(\frac{2-x}{x+1}\right)^2 dx = \pi\int_0^2\left(\frac{3}{x+1} - 1\right)^2 dx$

$= \pi\int_0^2\left(1 - \frac{6}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right)dx = \pi\left(x - 6\ln|x+1| - \frac{9}{x+1}\right)\Bigg|_0^2$

$= \pi(2 - 6\ln3 + 6) = 2\pi(4 - 3\ln3)$

Vậy thể tích: $V = 2\pi(4 - 3\ln3)$ (đvtt).

Câu 5. Sử dụng định lí hàm số côsin trong tam giác AOB ta có:

$$\cos45^0 = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA.OB} \Rightarrow OB = 6\sqrt{2}$$

Vậy $V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC\sin45^0 = 8 \Rightarrow OC = 2 \Rightarrow C(0;0;2)$.

Câu 6.

a) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $\tan\alpha > 0$. Ta có:

$\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6 \Leftrightarrow \tan\alpha - \frac{3}{\tan\alpha} - 6 = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - 6\tan\alpha - 3 = 0$

Vì $\tan\alpha > 0$ nên chọn $\tan\alpha = 3 + 2\sqrt{3}$.

Ta có $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{22 + 12\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}$, $\sin\alpha = -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}$

Vậy: $A = \sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$.

b) $P(x) = (x^2 + x - 1)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^{5-k}(x-1)^k$

$$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^{5-k}\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m}(-1)^m\right) = \sum_{k=0}^{5}\sum_{m=0}^{k} C_5^k C_k^m (-1)^m x^{10-k-m}$$

Chọn k, m sao cho $\begin{cases} 10-k-m=3 \\ 0 \le m \le k \le 5 \\ k, m \in N \end{cases}$, ta được các cặp số (k, m) là 2 cặp số (4; 3) và (5; 2).

Vậy hệ số của x^3 là: $-C_5^4C_4^3 + C_5^5C_5^2 = -10$.

Câu 7. Thiết diện MNPQ của mặt phẳng (α) với hình chóp: NP // SB, MQ // SB (P ∈ BC, Q ∈ AB)

$V_{S.MNBPQ} = V_{S.BPQ} + V_{S.MPQ} + V_{S.MNP}$

Trong mp(ABC), vẽ PK // AB (K ∈ AC)

Đặt $V = V_{S.ABC}$

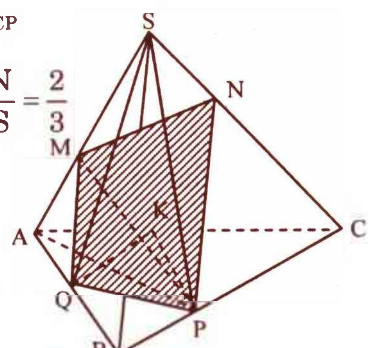
$$\frac{V_{S.BPQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{B.SQP}}{V_{B..SAC}} = \frac{BQ}{BA}.\frac{BP}{BC} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.BPQ} = \frac{2}{9}V$$

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ACP}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{2}{9}V_{S,ACP}$$

$$\frac{V_{S.ACP}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{P.SAC}}{V_{B.SAC}} = \frac{d(P,(SAC))}{d(B,(SAC))} = \frac{CP}{CB} = \frac{CN}{CS} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ACP} = \frac{2}{3}V \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{4}{27}V$$

$$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.APQ}} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{2}{3}V_{S.APQ}$$



$$\frac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AQK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AQ.AK.\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A} = \frac{AQ}{AB}.\frac{AK}{AC} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow V_{S.APQ} = \frac{1}{9}V \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{2}{3}V_{S.APQ} = \frac{2}{27}V$$

$$\Rightarrow V_{SMNBPQ} = \frac{2}{9}V + \frac{4}{27}V + \frac{2}{27}V = \frac{4}{9}V \Rightarrow V_{AMQCNP} = V - \frac{4}{9}V = \frac{5}{9}V.$$

Vậy tỉ thể tích: $\dfrac{V_{SMNBPQ}}{V_{AMQCNP}} = \dfrac{4}{5}$.

Câu 8. Xét hệ $\begin{cases}(m-1)x+(m-2)y+2-m=0\\(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0\end{cases}$

Ta có $D = (m-1)^2 + (m-2)^2 > 0, \forall m$ nên d_1 và d_2 luôn cắt nhau với mọi m.

Nhận thấy: A, B lần lượt nằm trên d_1 và d_2.

Các VTPT của hai đường thẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (m-1; m-2)$,

$\overrightarrow{n_2} = (2-m; m-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Rightarrow PA^2 + PB^2 = AB^2 = 8$

Ta có: $(PA + PB)^2 \le 2(PA^2 + PB^2) = 16 \Rightarrow PA + PB \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi PA = PB do đó

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{AB}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = 2.$$

Vậy giá trị cần tìm là m = 1, m = 2.

Câu 9. Đặt $u = \sqrt{x+y}$; $v = \sqrt{2x+y+2}$ $(u, v \ge 0)$.

Khi đó hệ $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\3x+2y=23\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=7\\u^2+v^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=3\\v=4\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}u=4\\v=3\end{cases}$$

Từ đó nghiệm của hệ: (5; 4), (−9;25)

Câu 10. Ta có: $AC^2 + BD^2 \le AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow DC(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB} \le 2AB.CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \le AB.CD$: đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi AB//CD.

ĐỀ SỐ 17

Câu 1. (1 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số. Tính khoảng cách giữa cực đại và cực tiểu.

Câu 2. (1 điểm) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số:

$y = \dfrac{x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng d: $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB bằng $2\sqrt{2}$ với O là gốc tọa độ.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thoả mãn: $|z| = 2$ và z là số ảo.

b) Giải bất phương trình $\log_2^2(x^2) \le 4$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm của hàm số f(x) = coslnx.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho M(5; 2; –3) và mặt phẳng (P): 2x + 2y – z + 1 = 0. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên (P). Xác định toạ độ của M_1 và tính độ dài đoạn MM_1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M, chứa đường thẳng (d): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{-6}$.

Câu 6 (1điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{3(\cos x + \cot x)}{\cot x - \cos x} - 2\sin x = 2$.

b) An và Bình đấu chung kết với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4. Tính xác suất An thắng trận biết mỗi séc không có hòa.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng A'B với mặt bên (BCC'B') bằng 30^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho và côsin góc giữa hai đường thẳng A'B, AC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Biết đỉnh C(4; 2), đường phân giác trong của góc B có phương trình 2x – y + 3 = 0 và đường phân giác ngoài của góc A có phương trình x – y + 6 = 0. Tìm tọa độ đỉnh B.

Câu 9. (1 điểm) Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[4]{x(x-1)}\right) = 1.$$

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y thay đổi thoã mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) • Tập xác định: D = **R**

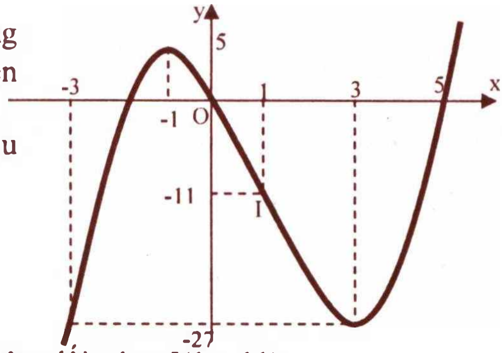
• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
Đồ thị có cực đại $A(-1; 5)$, cực tiểu $B(3; -27)$.
• Đồ thị: $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0$



$\Leftrightarrow x = 1$ nên đồ thị có điểm uốn là tâm đối xứng $I(1; -11)$.
Cho $x = 0$ thì $y = 0$.
Đồ thị có cực đại $A(-1; 5)$, cực tiểu $B(3; -27)$ nên khoảng cách:

$$AB = \sqrt{16 + 1024} = 4\sqrt{65}.$$

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+m}{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - m - 1 = 0,\ x \neq -1.$$

d cắt (C_m) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$, $m \neq 1$.

Ta có $R = 2\sqrt{2}$ nên $S_{OAB} = \frac{1}{2}d(O;d).AB = \frac{OA.OB.AB}{4R}$

$\Rightarrow OA.OB = 2R.d(O; d) = 2.2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$.

Gọi: $A(x_1; x_1 - 1)$, $B(x_2; x_2 - 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - x - m - 1 = 0$.

$\Rightarrow OA.OB = \sqrt{2x_1^2 - 2x_1 + 1}\sqrt{2x_2^2 - 2x_2 + 1} = 2(m+1) + 1 = 2m + 3$

Do đó: Điều kiện đề bài được thỏa mãn khi: $2m + 3 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{1}{2}$.

Câu 3.

a) Giả sử $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$
Vì số phức z có $|z| = 2$ và z là số ảo nên

$$\begin{cases}|z| = 2\\ a = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2 + b^2} = 2\\ a = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 0\\ b = \pm 2\end{cases}.$$ Vậy số phức: $z = \pm 2i$.

b) Điều kiện: $x \neq 0$.
Ta có BPT: $\log_2^2(x^2) \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \log_2(x^2) \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq \log_2|x| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$

Vậy nghiệm của BPT là: $\frac{1}{2} \le x \le 2$ hoặc $-2 \le x \le -\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đặt $u = \cos\ln x \Rightarrow du = -\frac{\sin\ln x}{x}dx$ và $dv = dx$, chọn $v = x$.

Ta có: $F(x) = \int \cos\ln x dx = x\cos\ln x + \int \sin\ln x dx$ (với $x > 0$)

Đặt $u = \sin\ln x \Rightarrow du = \frac{\cos\ln x}{x}dx$ và $dv = dx$, chọn $v = x$.

Do đó: $\int \sin\ln x dx = x\sin\ln x - \int \cos\ln x dx = x\sin\ln x - F(x)$

Suy ra: $2F(x) = x\cos\ln x + x\sin\ln x + C$

Vậy: $F(x) = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$.

Câu 5. Phương trình tham số của $MM_1 \perp (d)$: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$

Nên toạ độ của $M_1 = MM_1 \cap (P)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(1; -2; -1)$$

Vậy khoảng cách $MM_1 = 6$

Đường thẳng (d) qua A(1; 1; 5) có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -6)$. Mp(Q) qua M và chứa (d) nên có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (2; 8; 2)$ hay (1;4;1).

Vậy phương trình (Q): $x + 4y + z - 10 = 0$

Câu 6.

a) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cot x \ne \cos x \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $\frac{3(\cos x + \cot x)}{\cot x - \cos x} - 2\sin x = 2$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + 2\sin x) = 0$ $\qquad \Leftrightarrow 1 + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Vậy nghiệm PT là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi T là biến cố: "An thắng trận",

A là biến cố: "An thắng trận sau 3 séc",

B là biến cố: "An thắng trận sau 4 séc",

C là biến cố: "An thắng trận sau 5 séc".

thì $H = A \cup B \cup C$ và 3 biến cố A, B, C đôi một xung khắc

Do đó $P(T) = P(A) + P(B) + P(C)$

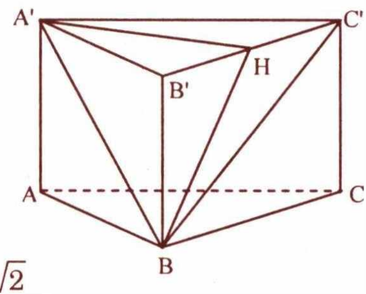
Ta có: $P(A) = (0,4)^3 = 0,064.$

$P(B) = C_3^2 (0,4)^2.0,6.\ 0,4 = 0,1152.$

$P(C) = C_4^2 (0,4)^2.(0,6)^2.0,4 = 0,13824.$

Vậy xác suất $P(T) = 0,31744.$

Câu 7. Gọi H là trung điểm B'C', ta có:



$$\left.\begin{array}{l} A'H \perp B'C' \\ A'H \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow A'H \perp (BB'C'C)$$

$\Rightarrow \widehat{A'BH} = 30^0.$

Suy ra $\sin 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2A'B}$

$\Rightarrow A'B = a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Mà $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$

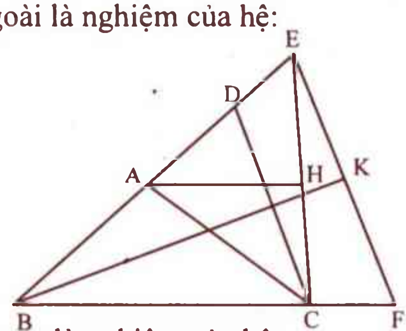
Ta có AC // A'C' $\Rightarrow \cos(A'B, AC) = \left|\cos \widehat{BA'C'}\right| = \dfrac{A'C'}{2A'B} = \dfrac{a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Câu 8. Tìm tọa độ điểm E đối xứng với C qua phân giác ngoài của góc A.

Phương trình đường thẳng d qua C, vuông góc với phân giác ngoài của góc A: $x + y - 6 = 0$

Tọa độ H giao điểm của d và phân giác ngoài là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0;6) \Rightarrow E(-4;\ 10)$$



Tìm tọa độ điểm F đối xứng với E qua phân giác trong của góc B

Phương trình đường thẳng d' qua E, vuông góc với phân giác trong của góc B: $x + 2y - 16 = 0$.

Tọa độ K giao điểm của d' và phân giác trong là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 16 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(2;7) \Rightarrow F(8;4).$$

Phương trình đường thẳng BC qua C và F: $x - 2y = 0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-1)$.

Câu 9. Điều kiện $x > 1$. Phương trình

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[4]{x(x-1)}\right) = 1 \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}=(1-m)\sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}=1-m$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$, $0<t<1$.

Phương trình trở thành: $\dfrac{1}{t^2}+t=1-m \Leftrightarrow -\dfrac{1}{t^2}-t+1=m$ (2)

Phương trình (1) có nghiệm x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in(0;1)$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{t^2}-t+1$, $t\in(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t^3}-1>0, \forall t\in(0;1)$

Bảng biến thiên :

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m<-1$.

Câu 10. Vì $x^2+y^2=1$ nên đặt $x=\cos t$, $y=\sin t$,

Ta có $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\dfrac{2(\cos^2 t+6\cos t.\sin t)}{1+2\cos t.\sin t+2\sin^2 t}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 t+3.\sin 2t=P(1+\sin 2t+2\sin^2 t)$

$\Leftrightarrow (P-6).\sin 2t-(P-1)\cos 2t=1-2P$

Điều kiện có nghiệm của phương trình

$(P-6)^2+(P-1)^2\geq(1-2P)^2 \Leftrightarrow P^2+3P-18\leq 0 \Leftrightarrow -6\leq P\leq 3$

Ta có $P=3 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}; y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ và $P=-6 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{13}}; y=\mp\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy min P = –6, max P = 3.

ĐỀ SỐ 18

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=x^4-2x^2$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m$ cắt trục hoành Ox tại ba điểm phân biệt A(1; 0), B, C. Khi đó, gọi k_1, k_2 là hai hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C_m) tại B và C. Tìm m để $k_1^2+k_2^2=160$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm phức: $(z^3+z)(z-2i)-1=z^2$.

b) Giải bất phương trình: $2\log_9(9^x+9) \geq x - \log_{\frac{1}{3}}(28-2.3^x)$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\cos 2x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian Oxyz, tìm khoảng cách giữa 2 cặp đường thẳng: d: $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2}$ và d': $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính gọn $S = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$.

b) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$, (x > 0),

trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $2n + A_n^2 + 3C_n^{n-2} = A_{n+1}^2 + C_{n+1}^3$

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABC, có chân đường cao trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đáy ABC vuông tại A với AB = 3a; AC = 4a. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung tuyến BP: $2x + y - 3 = 0$ và phân giác trong BD: $x + y - 2 = 0$. Điểm M(2; 1) thuộc đường thẳng AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + (8y^2 + x^2)y = 0 \\ \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số thực x, y, z thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}.$$

Chứng minh các bất đẳng thức: $1 \leq x \leq \frac{7}{3}; 1 \leq y \leq \frac{7}{3}; 1 \leq z \leq \frac{7}{3}$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^4 - 2x^2$.

- Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

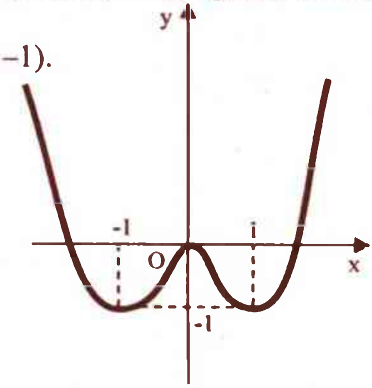
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đạt CĐ$(0; 0)$, đạt CT$(-1; -1)$, $(1; -1)$.

• Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 4$, $y'' = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị có 2 điểm uốn $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9}\right)$. Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.



Câu 2.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 5x^2 + (m + 4)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + m) = 0$$

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 4.1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} k_1 = f'(x_1) = 3(x_1^2 - 4x_1 + m) + 2x_1 + 4 - 2m = 2x_1 + 4 - 2m \\ k_2 = f'(x_2) = 3(x_2^2 - 4x_2 + m) + 2x_2 + 4 - 2m = 2x_2 + 4 - 2m \end{cases}$$

Sử dụng định lí Viet và giả thiết $k_1^2 + k_2^2 = 160$, ta tính được $m = 0$.

Câu 3.

a) Phương trình $(z^3 + z)(z - 2i) - 1 = z^2$.

$\Leftrightarrow z(z^2 + 1)(z - 2i) - (z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 - 2iz - 1) = 0$

Xét $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$

Xét $z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i$.

Vậy nghiệm phức của phương trình là: $z = \pm i$.

b) Điều kiện $x < \log_3 14$. Đặt $t = 3^x > 0$.

Bất phương trình: $2\log_9(9^x + 9) \geq x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2.3^x)$.

$\Leftrightarrow t^2 + 9 \geq t(28 - 2t) \Leftrightarrow 3t^2 - 28t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [9; +\infty)$.

Thay trở lại biến x, ta được tập nghiệm là: $S = (-\infty; -1] \cup [2; \log_3 14)$.

Câu 4. $\int \dfrac{dx}{\cos 2x \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} \int \dfrac{\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2x\right]dx}{\cos 2x \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$

$= 2\int \dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} + 2\int \dfrac{\sin 2x dx}{\cos 2x} = \int \dfrac{d\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} - \int \dfrac{d(\cos 2x)}{\cos 2x}$

$= \ln\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right| - \ln|\cos 2x| + C.$

Câu 5. d qua M(0; 4; –1) có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -2)$

d' qua M'(0; 2; 0) có VTCP $\vec{u}' = (-1; 3; 3)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}'] = (9; 5; -2)$, $\overline{MM}' = (0; -2; 1)$

Nên $\left[\vec{u}, \vec{u}'\right].\overline{MM}' = 0 - 10 - 2 = -12 \neq 0$ nên chéo nhau.

Do đó $d(d, d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right].\overline{MM}'\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right]\right|} = \dfrac{|-10-2|}{\sqrt{81+25+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

Câu 6.

a) Ta có $\sqrt{\sin^4\alpha + 4(1-\sin^2\alpha)} = \sqrt{(2-\sin^2\alpha)^2} = |2-\sin^2\alpha| = 2-\sin^2\alpha$

$\sqrt{\cos^4\alpha + 4(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{(2-\cos^2\alpha)^2} = |2-\cos^2\alpha| = 2-\cos^2\alpha$

Do đó: $S = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$

$= 4 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 4 - 1 = 3.$

b) Điều kiện $n \in \mathbf{N}$ và $n \geq 2$.

Ta có: $2n + A_n^2 + 3C_n^{n-2} = A_{n+1}^2 + C_{n+1}^3$

$\Leftrightarrow 2n + n(n-1) + 3.\dfrac{n(n-1)}{2} = (n+1)n + \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$

$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$. Chọn $n = 8$.

Khi đó: $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(x\sqrt{x}\right)^{8-k}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k.2^k(x)^{12-2k}$

Số hạng của khai triển không phụ thuộc x ứng với giá trị k nguyên thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \leq k \leq 8 \\ 12-2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng không chứa x là $C_8^6.2^6 = 1792$

Câu 7. Hạ $SO \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ O là tâm đường tròn nội tiếp

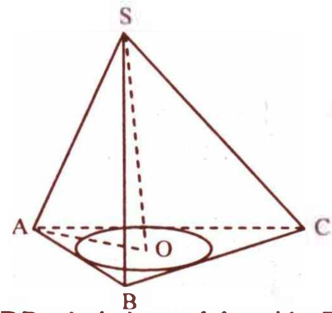
ΔABC nên $\widehat{SAO} = 60^0$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = 6a^2$; $BC = 5a$

$\Rightarrow r = \dfrac{S_{\Delta abc}}{p} = a$

$\Rightarrow OA = r\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = a\sqrt{6}$

Vậy thể tích $V_{SABC} = 2a^3\sqrt{6}$.



Câu 8. Từ phương trình của đường trung tuyến BP và đường phân giác BD suy ra B(1;1)

Gọi N là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong góc B thì đó N nằm trên đường thẳng BC.

Ta có: MN: $x - y - 1 = 0$

Giao điểm của MN và đường phân giác trong góc B là $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Do đó N(1;0).

Đường thẳng BC: $x = 1$. Ta có C(1;c)

Đường thẳng AB: $y = 1$. Ta có A(a;1).

Trung điểm $P\left(\dfrac{a+1}{2};\dfrac{c+1}{2}\right)$ của AC thuộc d_1 nên $2a + c - 3 = 0 \Rightarrow c = 3 - 2a$

Đường thẳng BC: $x = 1$ và AB: $y = 1$ nên tam giác ABC vuông tại B

do đó: $R = PB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 = 20$

Do đó $(a-1)^2 + (2-2a)^2 = 20$

Hay $5a^2 - 10a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ hay $a = -1$

Vậy A(3;1), C(1;–3) hay A(–1;1), C(1;5).

Câu 9. Điều kiện: $x + y \geq 0$.

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$: không thỏa hệ

Xét $y \neq 0$. Đặt $x = ty$, thế vào phương trình thứ nhất:

$$t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ nên } y = -\frac{x}{2}.$$

Thay vào phương trình thứ hai:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{3x} \Leftrightarrow (1-x)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}} + 1 + x\right) = 0 \ (1)$$

Vì $\dfrac{x}{2} = x + y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}} + x + 1 > 0$

Do đó (1): $x = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;-\dfrac{1}{2})$.

Câu 10. Ta có x, y, z thoả mãn: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \end{cases}$

nên $\begin{cases} y+z=5-x \\ yz=8-x(y+z)=8-x(5-x)=x^2-5x+8 \end{cases}$

Do đó y và z là 2 nghiệm của phương trình:$X^2-(5-x)X+(x^2-5x+8)=0$

Do đó biệt thức $\Delta \geq 0$

$\Rightarrow \Delta=(5-x)^2-4(x^2-5x+8)=-3x^2+10x-7\geq 0$

$\Rightarrow 3x^2-10x+7\leq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq \dfrac{7}{3}$.

Chứng minh tương tự ta có: $1\leq y\leq \dfrac{7}{3}; 1\leq z\leq \dfrac{7}{3}$.

ĐỀ SỐ 19

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{x-4}{2x-2}$.

Câu 2. (1 điểm) Xác định tọa độ các điểm A, B, C, D nằm trên đồ thị (C) của hàm số: $y=x^3-3x+2$ sao cho ABCD là một hình thoi nhận tâm đối xứng của đồ thị (C) làm tâm hình thoi và đường chéo AC bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tính gọn số phức $z=\dfrac{1}{2i}\left(i^7-\dfrac{1}{i^7}\right)$.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\sqrt{y+1}=2+\sqrt{3x+7} \\ \sqrt{9x^2+1}+\log_3(2x+y)+y^2+4xy=5x^2+\sqrt{4x^2+4xy+y^2+1}+\log_3 3x \end{cases}$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; −1), đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với (P).

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$.

b) Giải phương trình: $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}.P_3}=210$.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a và AA' = a. Gọi M là điểm chia trong đoạn AD theo tỉ số $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (AB'C) và thể tích tứ diện AB'CD'.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(0; 2) và đường thẳng (d): x – 2y + 2 = 0. Tìm trên đường thẳng (d) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và AB = 2BC.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $x^2 + 6x + 11 \geq 3(x + 1)\sqrt{2x+5}$.

Câu 10. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 99.3^{\cos 2x} + 3.3^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}$$

LỜI GIẢI

Câu 1. • Tập xác định: D = **R** \ {1}.

• Sự biến thiên:

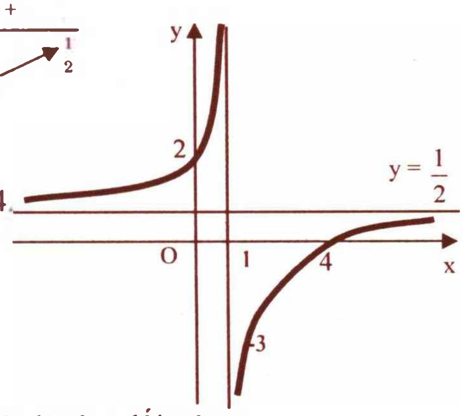
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ là TCN

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là TCĐ

$$y' = \frac{6}{(2x-2)^2} > 0,\ \forall x \neq 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

• Đồ thị: x = 0 thì y = 2; y = 0 thì x = 4.

Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận $I(1; \frac{1}{2})$.

Câu 2. Tập xác định D = **R**.

$y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên điểm uốn I(0; 2) là tâm đối xứng.

Gọi $A(x, x^3 - 3x + 2)$, $C(-x; -x^3 + 3x + 2)$ thuộc (C)

Từ giả thiết suy ra $AC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$\Rightarrow$ A(2; 4), C(–2; 0) hoặc ngược lại.

Khi đó BD: x + y – 2 = 0 nên tọa độ B, D thỏa

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = x^3 - 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Suy ra: B($\sqrt{2}$; 2 – $\sqrt{2}$), D(–$\sqrt{2}$; 2 + $\sqrt{2}$) hoặc ngược lại.

Câu 3.

a) Ta có: $i^7 = i^6.\ i = (i^2)^3.i = (-1)^3.i = -i$

Nên $z = \frac{1}{2i}\left(i^7 - \frac{1}{i^7}\right) = \frac{1}{2i}\left(-i + \frac{1}{i}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

b) Hệ $\begin{cases} 3\sqrt{y+1} = 2 + \sqrt{3x+7} & (1) \\ \sqrt{9x^2+1} + \log_3(2x+y) + y^2 + 4xy = 5x^2 + \sqrt{4x^2+4xy+y^2+1} + \log_3 3x & (2) \end{cases}$

Ta có (2) tương đương

$$\sqrt{(3x)^2+1} - \log_3(3x) - (3x)^2 = \sqrt{(2x+y)^2+1} - \log_3(2x+y) - (2x+y)^2$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1} - \log_3 t - t^2,\ t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{t\ln 3} - 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \left(\frac{1}{t\ln 3} + 2t\right)$

Vì $t > 0$ nên $\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} < 1,\ \frac{1}{t\ln 3} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{2}{\ln 3}} > 1$

$\Rightarrow f'(t) < 0,\ \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Do đó PT $\Leftrightarrow f(3x) = f(2x+y) \Leftrightarrow 3x = 2x + y \Leftrightarrow y = x$

PT (1): $3\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{3x+7} \Leftrightarrow 9(x+1) = 11 + 3x + 4\sqrt{3x+7}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+7} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 4(3x+7) = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ (3;3).

Câu 4. Đặt $x = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow dx = \frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt$.

$x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t.dt}{\sin^2 t.\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{12}.$$

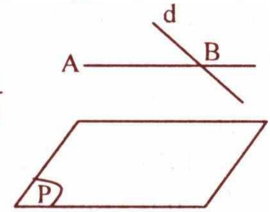
Câu 5. Ta có A $\notin$(P). Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Gọi B là giao điểm của Δ và d.Suy ra B(2 + t; 3t; –2 + 2t)

Δ có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{AB} = (1 + t; 3t - 2; 2t - 1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (2; 1; -1)$.

Δ // (P) nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p} = 0$



$\Leftrightarrow (1 + t).2 + (3t - 2).1 + (2t - 1).(-1) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$

Suy ra $B(\frac{5}{3}; -1; \frac{8}{3})$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (\frac{2}{3}; -3; -\frac{5}{3})$.

Vậy phương trình đường thẳng (Δ) là: $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - \frac{5}{3}t \end{cases}$.

Câu 6.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) - \sin[\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})] = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{3x}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}[\sqrt{2} + 2\cos(x + \frac{\pi}{4})] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Điều kiện: $x \in \mathbf{N}$, $x \geq 4$,

Ta có $\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}.P_3} = 210 \Leftrightarrow \frac{(x+2)!}{\frac{(x-1)!}{3!}.3!} = 210$

$\Leftrightarrow x.(x + 1)(x + 2) = 210$ vì 210 = 5.6.7 nên suy ra x = 5 (chọn).

Vậy giá trị cần tìm: x = 5.

Câu 7. Gọi H là trung điểm AB'

Ta có $V_{B'ACD} = \frac{1}{3}BB'.S_{ACD} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a.2a = \frac{a^3}{3}$

$AC = B'C = a\sqrt{5}$, $AB' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ tam giác ACB' cân tại C

$\Rightarrow CH \perp AB'$ và $CH = \sqrt{5a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow S_{ACB'} = \frac{1}{2}CH.AB' = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{2}$

Vậy $d(M, (AB'C) = \frac{3}{4}d(D, (ACB')) = \frac{3}{4}.\frac{3V_{AB'CD}}{S_{AB'C}} = \frac{a}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của D' lên HC và N là trung điểm CD'.

Ta có: $AD' = B'D' = a\sqrt{5} \Rightarrow$ tam giác AD'B' cân ở D'

$\Rightarrow D'H \perp AB'$, $AB' \perp (CHD') \Rightarrow (HCD') \perp (ACB') \Rightarrow D'K \perp (ACB')$.

Ta có HN // BC $\Rightarrow HM \perp CD' \Rightarrow D'K = \frac{HN.CD'}{HC} = \frac{4a}{3}$

Vậy $V_{AD'CB'} = \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.\frac{3a^2}{2} = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 8. Phương trình tham số của đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = t \end{cases}$

Xét hai điểm B, C trên (d), khi đó $B(2t_1 - 2; t_1)$, $C(2t_2 - 2; t_2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2t_1 - 2; t_1 - 2)$, (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1)$.

Theo giả thiết, tam giác ABC vuông ở B, nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 2(2t_1 - 2) + (t_1 - 2) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{6}{5}$. Do đó: $B(\frac{2}{5}; \frac{6}{5})$

Ngoài ra cũng theo giả thiết

$AB = 2BC \Leftrightarrow AB^2 = 4BC^2$

$\Leftrightarrow (\frac{2}{5} - 0)^2 + (\frac{6}{5} - 2)^2 = 4[(2t_2 - \frac{12}{5})^2 + (t_2 - \frac{6}{5})^2]$

$\Leftrightarrow 5t_2^2 - 12t_2 + 7 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 1$ hoặc $t_2 = \frac{7}{5}$.

Với $t_2 = 1 \Rightarrow C(0; 1)$, với $t_2 = \frac{7}{5} \Rightarrow C(\frac{4}{5}; \frac{7}{5})$

Vậy các điểm cần tìm là $B(\frac{2}{5}; \frac{6}{5})$, $C(0;1)$ hay $C(\frac{4}{5}; \frac{7}{5})$.

Câu 9. Bất phương trình: $x^2 + 6x + 11 \geq 3(x + 1)\sqrt{2x + 5}$.

Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{2}$, BPT đã cho trở thành:

$$(x + 1)^2 - 3(x + 1)\sqrt{2x + 5} + 2(\sqrt{2x + 5})^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Khi $x = -\frac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2}+1\right)^2 \geq 0$: đúng.

Do đó $x = -\frac{5}{2}$ là nghiệm bất phương trình.

Khi $x \neq -\frac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow (\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}})^2 - 3(\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}}) + 2 \geq 0$

Do đó: $\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq 2\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{2} < x < -1 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x \leq 2$.

Hoặc $\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 3-2\sqrt{7} \\ x \geq 3+2\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3+2\sqrt{7}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $S = [-\frac{5}{2};2] \cup [3+2\sqrt{7};+\infty)$.

Câu 10. Ta có $y = 99.3^{\cos 2x} + 3.3^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}$

$$= 99.3^{2\cos^2 x - 1} + 3.3^{\cos^2 x} - 3^{1-\cos^2 x}$$

Đặt $t = 3^{\cos^2 x}, 1 \leq t \leq 3$ thì $y = f(t) = 33.t^2 + 3t - \frac{3}{t} \Rightarrow f'(t) = 66t + 3 + \frac{3}{t^2}$

Vì $f'(t) > 0, t \in [1,3]$ nên hàm số số đồng biến trên đoạn [1;3]

Vậy min y = f(1) = 33.

ĐỀ SỐ 20

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{x+2}{x-3}$.

Chứng minh giao điểm I của hai tiệm cận của (C) là tâm đối xứng.

Câu 2. (1 điểm) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng(Δ_m): $y = mx - m^2$ luôn cắt đồ thị (C_m) của hàm số: $y = x^3 - (3m-1)x^2 + 2m(m-1)x + m^2$ tại một điểm A có hoành độ không đổi. Tìm m để (Δ_m) còn cắt (C_m) tại hai điểm nữa khác A, mà các tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm đó song song với nhau.

Câu 3. (1 điểm)

a) Cho z là số phức tuỳ ý cho trước sao cho biểu thức sau xác định. Hỏi số phức $\varpi = \frac{z-\bar{z}}{z^3+(\bar{z})^3}$ là số thực hay số ảo ?

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình:

$\log_5(-x^2 + 4x + m) - \log_5(x^2 + 1) < 1$ nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng (1; 3).

Câu 4. (1 điểm) Tìm nguyên hàm: $\int \frac{dx}{e^{2x} - 1}$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(−1; −3; 3), B(2; 1; −2) và mặt phẳng (P): x + 2y − 2z + 1 = 0. Lập phương trình đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (P).

Câu 6. (1 điểm)

a) Xét dạng tam giác ABC có các cạnh a, b, c tương ứng góc A, B, C

thỏa mãn: $\begin{cases} \cos B \cos C = \frac{1}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$.

b) Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ 3 tỉnh miền biển sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông với đường chéo bằng 2a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là trọng tâm G của tam giác ABD, góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 32 và hai đường thẳng AB, BD lần lượt có phương trình là: x + 3y − 6 = 0 và x − y + 2 = 0. Tìm tọa độ tâm của hình thoi đã cho.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 1 + \sqrt{x(y+1)} \\ x^3 - y^2 = 7 \end{cases}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Chứng minh bất đẳng thức: $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R** \ {3}.
- Sự biến thiên:

$\lim_{x \to 3^-} y = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} y = +\infty$ nên TCĐ: x = 3.

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$ nên TCN: y = 1.

$y' = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3.$

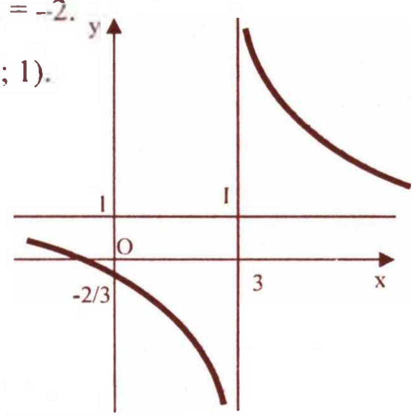
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$, $(3, +\infty)$.

• Đồ thị: Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$, $y = 0 \Rightarrow x = -2$.

Giao điểm 2 tiệm cận là tâm đối xứng I(3; 1).



Chuyển trục bằng phép tịnh tiến

vectơ $\overrightarrow{OI}$: $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

Đồ thị (C): $Y+1 = \frac{(X+3)+2}{(X+3)-3}$

$\Leftrightarrow Y = \frac{5}{X}$ là hàm số lẻ: đpcm.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ_m) và (C_m):

$$(x+1)(x^2 - 3mx + 2m^2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-m)(x-2m) = 0$$

Do đó giao điểm của (Δ_m) và (C_m) gồm $A(-1; -m - m^2)$, $B(m; 0)$ và $C(2m; m^2)$; trong số đó, A là điểm duy nhất có hoành độ không đổi khi m thay đổi.

Đặt $f_m(x) = x^3 - (3m-1)x^2 + 2m(m-1)x + m^2$. Các tiếp tuyến của (C_m) tại B và C lần lượt là các đường thẳng

(Δ_B): $y = f'_m(x_B)x + y_B - f'_m(x_B)x_B$;

(Δ_C): $y = f'_m(x_C)x + y_C - f'_m(x_C)x_C$;

Ta cần tìm m để B và C cùng khác A và $\Delta_B // \Delta_C$, tức là

$$\begin{cases} x_B \neq x_A \\ x_C \neq x_A \\ f'_m(x_B) = f'_m(x_C) \\ y_B - f'_m(x_B)x_B \neq y_C - f'_m(x_C)x_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ -m^2 = 2m^2 + 2m \\ m^3 \neq -4m^3 - 3m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = -\frac{2}{3}$.

Câu 3.

a) Ta tính số phức liên hiệp: $\overline{\varpi} = \overline{\left(\frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3}\right)} = \frac{\overline{z} - z}{(\overline{z})^3 + z^3} = -\frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3} = -\varpi$

Vậy $\varpi = \frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3}$ là số ảo.

b) Ta có $\log_5(-x^2 + 4x + m) - \log_5(x^2 + 1) < 1,\ \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \log_5(-x^2 + 4x + m) < \log_5(5x^2 + 5),\ \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > x^2 - 4x, \forall x \in (1;3) \\ m < 6x^2 - 4x + 5, \forall x \in (1;3) \end{cases}$

Xét $f(x) = x^2 - 4x$ và $g(x) = 6x^2 - 4x + 5$ trên $(1;3)$ thì yêu cầu bài toán:

$$\max_{1<x<3} f(x) < m < \min_{1<x<3} g(x) \Leftrightarrow f(1) < m < g(1) \Leftrightarrow -3 < m < 7.$$

Vậy giá trị cần tìm: $-3 < m < 7$.

Câu 4. Ta có $I = \int \frac{dx}{e^{2x} - 1}$.

Đặt $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2t}$

Do đó $I = \int \frac{dx}{e^{2x} - 1}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{t(t-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{t-(t-1)}{t(t-1)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x} - 1\right| - x + C$.

Câu 5. Ta có $\vec{n} = (1; 2; -2)$ là một VTPT của (P). Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P) thì

$A'(-1 + t; -3 + 2t; 3 - 2t),\ B'(2 + t'; 1 + 2t'; -2 - 2t') \in (P)$

nên $t = \frac{4}{3}$, $t' = -1 \Rightarrow A'\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $B'(1; -1; 0)$.

Vậy phương trình Δ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$.

Câu 6.

a) Từ điều kiện thứ hai $a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

nên $(b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$

$b^2 - bc + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

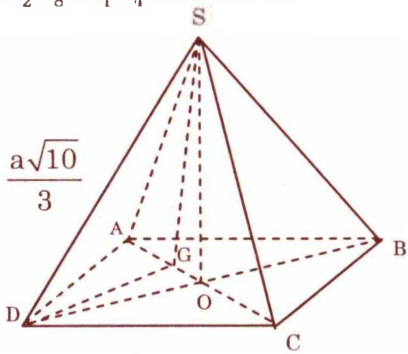
$\Leftrightarrow 2bc.\cos A = bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$.

Thế $A = \frac{\pi}{3}$ vào điều kiện thứ nhất $\frac{1}{2}[\cos(B - C) + \cos(B + C)] = \frac{1}{4}$

nên $\cos(B - C) - \cos A = \frac{1}{2}$ hay $\cos(B - C) = 1 \Rightarrow B = C$.

Vậy tam giác ABC cân có góc $\dfrac{\pi}{3}$ nên là tam giác đều.

b) Có $C_3^1C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.
Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.
Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.
Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thoả mãn yêu cầu bài toán, theo quy tắc nhân là: $C_3^1C_{12}^4 . C_2^1C_8^4 . C_1^1C_4^4 = 207\,900$
Vậy có 207 900 cách.



Câu 7. Ta có $SG \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SDG} = 45^0$;
$S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2$

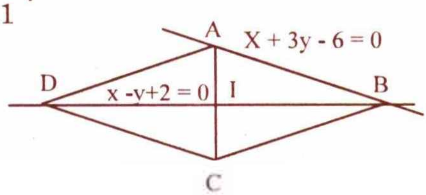
$$OG = \frac{1}{3}OA = \frac{a}{3} \Rightarrow SG = DG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

Do đó $V_{SABCD} = \dfrac{2a^3\sqrt{10}}{9}$.

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{9}$$

và $SO = \sqrt{\dfrac{10a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{3} \Rightarrow S_{\Delta SBD} = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$

Vậy: $d(C, SBD)) = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SBD}} = a\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.



Câu 8. Ta có $I \in BD$ nên $I(t; t + 2)$

Tọa độ B $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

$A \in AB$ nên $A(6 - 3a; a)$,
$\overrightarrow{AI} = (t + 3a - 6; t - a + 2)$ vuông góc với VTCP của BD là vectơ $\vec{u} = (1;1)$ nên $2t + 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a - 2 = -t$.
Mặt khác $\overrightarrow{AB} = (3a - 6; 2 - a)$

$$\Rightarrow AB = |a - 2|\sqrt{10} \text{ và } d(I, AB) = \frac{|4t|}{\sqrt{10}}.$$

Do đó $2AB.d(I, AB) = 32 \Leftrightarrow |(a - 2)t| = 4 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$
Vậy: $I(2; 4)$ và $I(-2; 0)$.

Câu 9. Hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 1 + \sqrt{x(y + 1)} \\ x^3 - y^2 = 7 \end{cases}$.

Điều kiện: $x(y+1) \geq 0$. Mà $x^3 = 7 + y^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

Do đó: PT đầu $\Leftrightarrow 2x - (y+1) - \sqrt{x}\sqrt{y+1} = 0$

Chia hai vế cho x, ta được

$$\frac{y+1}{x} + \sqrt{\frac{y+1}{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+1}{x}} = 1 \text{ (thỏa) hoặc } \sqrt{\frac{y+1}{x}} = -2 \text{ (loại)}$$

Suy ra: $y = x - 1$ thế vào PT sau ta có $x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy: nghiệm hệ PT là (2;1).

Câu 10. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là một điểm tuỳ ý

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$

Ta có: $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx \leq 2(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$: Đúng.

Nên ta có: $(m_a + m_b + m_c)^2 = \frac{9}{4}(GA + GB + GC)^2 \leq \frac{9}{4}.3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\leq \frac{27}{4}(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ đúng với mọi điểm M.

Thay M bởi tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta được:

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{27}{4}.3R^2 = \frac{81}{4}R^2$$

Nên có bất đẳng thức $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

ĐỀ SỐ 21

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Xác định tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả điều kiện: z^2 là số ảo.

b) Giải phương trình: $1 + 2\log_5(3x-1) = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)^2 e^{2x}dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, chứng tỏ rằng hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và Δ: $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ chéo nhau. Lập phương trình 2 mặt phẳng lần lượt chứa một đường thẳng d hoặc Δ và chứa đường vuông góc chung của chúng.

Câu 6. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + \cos 2x} = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}\sin x)$.

b) Tính tổng $C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2}C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}C_n^n$.

Câu 7. (1 điểm) Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AB = a, AC = a $\sqrt{3}$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 60^o và A'cách đều các điểm A, B, C. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB với B'C' và thể tích khối chóp A'.BCC'B' theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Một điểm A di động trên trục hoành, qua điểm A kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (C), (M, N là hai tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định I, xác định toạ độ điểm I.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\frac{3}{\sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x}} \le \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + |y - 2|.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: D = **R.** Hàm số chẵn
- Sự biến thiên: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

$y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

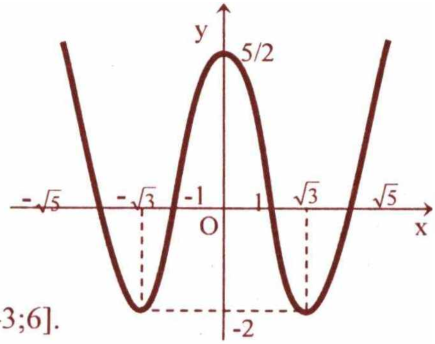
Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$.

Hàm số có CĐ $(0; \frac{5}{2})$; CT$(\pm\sqrt{3}; -2)$

• Đồ thị: đối xứng nhau qua trục tung:

$y'' = 6x^2 - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Điểm uốn $I(\pm 1; 0)$.



Câu 2.

Hàm f xác định và liên tục trên đoạn $[-3;6]$.

Với $-3 < x < 6$ thì

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}.\sqrt{6-x}}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

So sánh thì $\max y = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$, $\min y = f(-3) = f(6) = 3$.

Câu 3.

a) Giả sử: $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbf{R})$ thì: $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Ta có: z^2 là số ảo $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$ hay $x + y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng phân giác:

$x \pm y = 0$.

b) Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình

$$1 + 2\log_5(3x - 1) = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x + 1)$$

$\Leftrightarrow \log_5[5.(3x - 1)^2] = \log_5(2x + 1)^3$

$\Leftrightarrow 5.(3x - 1)^2 = (2x + 1)^3 \Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(8x^2 - 17x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{8}$.

So sánh điều kiện, chọn nghiệm của phương trình $x = 2$.

Câu 4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan x)^2 e^{2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x + 2\tan x) e^{2x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) e^{2x} dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \tan x dx$$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$, $dv = (1 + \tan^2 x)dx$ chọn $v = \tan x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)e^{2x}dx = e^{2x}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\tan x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\tan x dx$$

Suy ra tích phân: $I = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Câu 5. d đi qua A(1; 0; –2) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Δ đi qua B(–1; 0; 1) và có VTCP $\vec{v} = (4; 1; -2)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$ nên d và Δ chéo nhau.

Đường vuông góc chung IJ có VTCP: $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-5; -8; -14)$

Mặt phẳng (P) chứa d và IJ có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{a}] = (-50; -23; 31)$ và đi qua A(1; 0; –2) nên có phương trình:

$-50(x-1) - 23(y-0) + 31(z+2) = 0$ hay $50x + 23y - 31z - 112 = 0$.

Mặt phẳng (Q) chứa Δ nên IJ có VTPT

$\overrightarrow{n_Q} = [\vec{v}, \vec{a}] = (-30; 66; -27)$ và đi qua B(–1; 0; 1) nên có phương trình:

$-10(x+1) + 22(y-0) - 9(z-1) = 0$ hay $10x - 22y + 9z + 1 = 0$.

Câu 6.

a) Điều kiện: $\cos x \neq -1; 1/2$

PT: $\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{\cos x+\cos 2x} = \dfrac{2}{3}(3-\sqrt{3}\sin x)$

$\Leftrightarrow 2\cos x = \dfrac{2}{3}(3-\sqrt{3}\sin x) \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin(x+\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chọn nghiệm $x = k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$

$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)dx$

$\Rightarrow \dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + C_n^1\dfrac{x^2}{2} + C_n^2\dfrac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2$

$\Rightarrow C_n^0 + \dfrac{2^2-1}{2}C_n^1 + \dfrac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

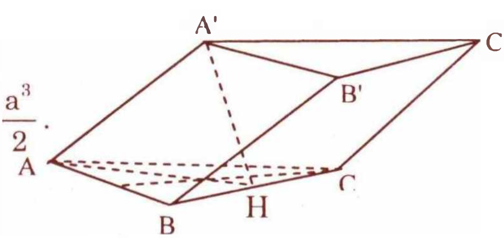
Câu 7. Hạ AH ⊥ (ABC) ⇒ H là trung điểm BC và $\widehat{A'AH} = 60^o$.

Vì: (ABC) // (A'B'C') ⇒ d(AB, B'C') ⇒ $A'H = AH\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

Mà $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3a^3}{2}$

Suy ra: $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3}{2}$.

Vậy thể tích $V_{A'.BCC'B'} = a^3$.



Câu 8. (C) có tâm I(2; 2); bán kính R = 1

Gọi A(a; 0) là điểm trên trục hoành.

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến Δ tại M có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IM}$ là: $(x_0 - 2)(x - 2) + (y_0 - 2)(y - 2) = 1$

Δ qua A nên $(a - 2)x_0 - 2y_0 - 2a + 7 = 0$

Tương tự gọi $N(x_1; y_1)$ thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến Δ tại N có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IN}$ là: $(x_1 - 2)(x - 2) + (y_1 - 2)(y - 2) = 1$

Δ qua A nên $(a - 2)x_1 - 2y_1 - 2a + 7 = 0$

Suy ra PT đường thẳng MN là: $(a - 2)x - 2y - 2a + 7 = 0$

$\Leftrightarrow a(x - 2) - 2y - 2x + 7 = 0$

Điểm cố định I(x;y) thỏa mãn: $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = \dfrac{7}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy MN qua điểm cố định $I(2; \frac{3}{2})$.

Câu 9. Bất phương trình: $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x}} \le \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}$.

Điều kiện $x \ge 0$, $x \ne 2 \pm \sqrt{3}$.

Vì x = 0 không là nghiệm BPT nên

BPT $\Leftrightarrow \dfrac{3}{\left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - 2\right)\sqrt{x}} \le \dfrac{5}{\left(2\sqrt{x + \frac{1}{x}} - 1\right)\sqrt{x}}$

Đặt $t = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$, ĐK $t \ge \sqrt{2}$.

Ta có BPT đã cho trở thành $\dfrac{3}{t-2} \le \dfrac{5}{2t-1} \Leftrightarrow \dfrac{t+7}{(t-2)(2t-1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < t < 2$

Chọn $\sqrt{2} \le t < 2$, do đó $\sqrt{x + \frac{1}{x}} < 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

Vậy nghiệm BPT là $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng (Oxy) chọn M(x–1; –y), N(x+1; y) thì

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = OM + ON \ge MN = 2\sqrt{1 + y^2}$

Do đó: $A \ge 2\sqrt{1 + y^2} + |y - 2| = f(y)$

Khi $y \le 2$ thì $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} - y + 2$

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}, \quad f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		2
f'		–	0	–	
f		↘	$2+\sqrt{3}$	↗	

Min $f = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}$.

Khi y > 2 thì $A \geq 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{1+y^2} > 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$

Vậy min$A = 2 + \sqrt{3}$ khi $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ĐỀ SỐ 22

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$y = \frac{3-2x}{x-1}$. Suy ra đồ thị (C'): $y = \left|\frac{3-2x}{x-1}\right|$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm A(1; 2).

Câu 3. (1 điểm).

a) Tìm các căn bậc hai của số phức $z = 17 + 20\sqrt{2}\,i$.

b) Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_2\sqrt{x+3}} < \frac{1}{\log_2(x+1)}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(1+\cos^2 x)dx$.

Câu 5. (1 điểm) Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các điểm A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; –1; 1) và C'(4; 5; –5). Tìm các điểm còn lại.

Câu 6. (1 điểm)

a) Tính sinα biết góc α thỏa mãn hệ thức:

$\cot(\alpha + 540^o) - \tan(\alpha - 90^o) = \sin^2(725^o) + \cos^2(365^o)$.

b) Cho tam giác ABC. Xét tập hợp đường thẳng gồm 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu hình thang không là hình bình hành?

Câu 7. (1 điểm) Cho khối chóp S.ABC có SA = 2a, SB = 3a, SC = 4a, $\widehat{ASB} = \widehat{SAC} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 120^0$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Câu 8. (1 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AC = 4AM và N là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Câu9. (1 điểm) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=4 \\ xy(x+1)(y+1)=3m \end{cases}$

Câu 10. (1 điểm) Cho 4 số a, b, c, d thoả mãn: $a^2+b^2=1$, $c+d=6$.

Chứng minh: $c^2+d^2-2ac-2bd+1 \geq (3\sqrt{2}-1)^2$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ nên TCĐ: x = 1

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = -2$ nên TCN: y = –2.

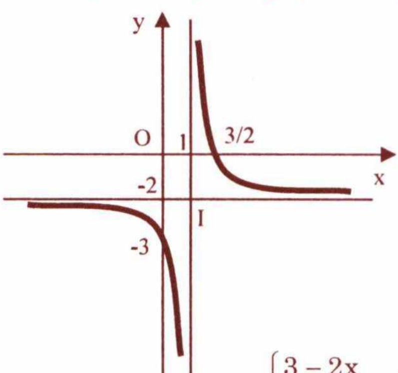
$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D.$$

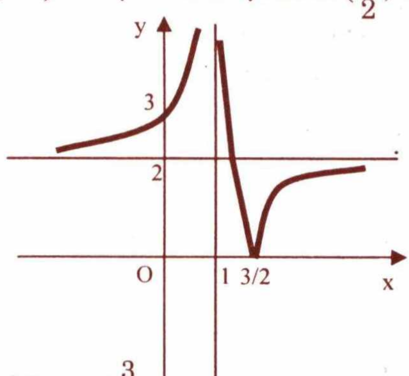
Bảng biến thiên

y	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

- Đồ thị: Cắt trục tung tại điểm (0; –3) và trục hoành tại điểm $(\frac{3}{2}; 0)$.





Ta có $y = \left|\frac{3-2x}{x-1}\right| = \begin{cases} \frac{3-2x}{x-1} & \text{khi } 1 < x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3-2x}{x-1} & \text{khi } x < 1, x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ nên đồ thị (C') giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên Ox, còn phần dưới Ox lấy đối xứng qua Ox.

Câu 2. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có hoành độ x = –1, suy ra M(–1; 2m–1).

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + (m+1)$; $y'(-1) = 4 - 5m$.

Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số đã cho tại M(–1; 2m – 1) có phương trình là: $y = (4-5m)(x+1) + 2m - 1$.

Tiếp tuyến d đi qua A(1; 2) khi và chỉ khi

$2 = (4 - 5m)2 + 2m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$. Vậy giá trị cần tìm: $m = \frac{5}{8}$.

Câu 3.

a) Giả sử: $x + yi$, $(x, y \in \mathbf{R})$ là căn bậc hai của $z = 17 + 20\sqrt{2}\,i$:

Ta có $(x + yi)^2 = 17 + 20\sqrt{2}\,i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 17 + 2(xy - 10\sqrt{2})i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 17 = 0 \\ xy - 10\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, y = 2\sqrt{2} \\ x = -5, y = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy z có hai căn bậc hai là $5 + 2\sqrt{2}\,i$, $-5 - 2\sqrt{2}\,i$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Vì ta có: $\log_2\sqrt{x+3} > \log_2\sqrt{2} > 0$ nên BPT $\frac{1}{\log_2\sqrt{x+3}} < \frac{1}{\log_2(x+1)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1) > 0 \\ \log_2(x+1) < \log_2\sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ x+1 < \sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Vậy nghiệm của BPT là $0 < x < 1$.

Câu 4. Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow dt = 2\cos x(-\sin x)dx = -\sin 2x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(1 + \cos^2 x)dx = -\int_2^1 \ln t dt = \int_1^2 \ln t dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$. Ta có: $\int_1^2 \ln t dt = t\ln t\Big|_1^2 - \int_1^2 1dt = 2\ln 2 - 1$.

Câu 5. Ta có ABCD là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \\ z_C - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}$$. Do đó: C(2; 0; 2)

Và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = (2; 5; -7)$

Suy ra A'(3; 5; –6), B'(4; 6; 5), D'(3; 4; –6).

Câu 6.

a) Ta có: $\cot(\alpha + 540^o) - \tan(\alpha - 90^o) = \sin^2(725^o) + \cos^2(365^o)$.

nên: $\cot\alpha + \cot\alpha = \sin^2 50^o + \cos^2 50^o = 1$

$\Rightarrow 2\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ta có: $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Mỗi hình thang được tạo từ 2 đường thẳng song song với 1 cạnh của ΔABC và 2 đường thẳng lần lượt song song với 2 cạnh còn lại của tam giác

Có 3 trường hợp: Hình thang được tạo từ 2 đường thẳng song song với AB, 1 đường thẳng song song với BC và 1 đường thẳng song song với CA. Có $C_4^2.C_5^1.C_6^1$ hình thang.

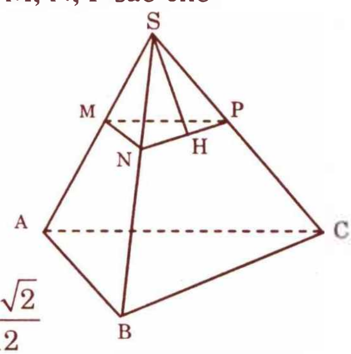
Tương tự với 2 trường hợp còn lại.Do đó có:

$$C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2$$

$= 6.5.6 + 10.4.6 + 15.4.5 = 720$ hình thang.

Câu 7. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho

$SM = SN = SP = a$.



Vì SAC là tam giác nửa đều nên

$MP = a$, $MN = a\sqrt{2}$, $NP = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại M.

Hạ SH vuông góc với mp(MNP) thì H là trung điểm của PN.

$S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$, $\quad SH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow V_{S.MNP} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Mặt khác: $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{24} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2a^3\sqrt{2}$

Vậy $d(C; (SAB)) = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{SAB}} = \dfrac{6a^3\sqrt{2}}{3a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Câu 8. Chọn hệ tọa độ Dxy như hình vẽ.

Giả sử cạnh hình vuông là 4

Ta có: D(0; 0), A(0; 4), C(4; 0), B(4; 4)

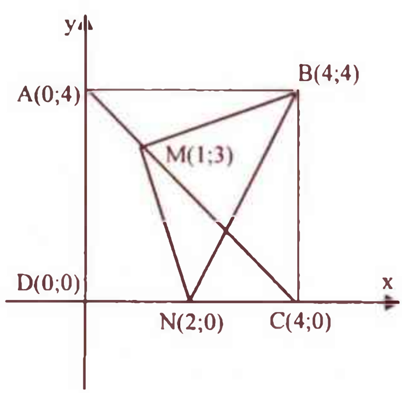
$\Rightarrow N(2; 0)$

Ta có: $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AM} \Rightarrow M(1; 3)$

Suy ra: $\overrightarrow{MB} = (3; 1)$, $\overrightarrow{MN} = (1; -3)$

$\Rightarrow MB = MN = \sqrt{10}$ và $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = 0$.

Vậy tam giác BMN vuông cân tại M.



Câu 9. Đặt $\begin{cases} u = x + x^2 = (x + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4},\ u \geq \dfrac{-1}{4} \\ v = y + y^2 = (y + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4}, v \geq -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 - u \\ uv = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 - u \\ -u^2 + 4u = 3m \quad (*) \end{cases}$

Vì $v \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 4 - u \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow u \leq \frac{17}{4}$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $u \in [-\frac{1}{4}; \frac{17}{4}]$

Xét hàm số $f(u) = -u^2 + 4u$, $u \in [-\frac{1}{4}; \frac{17}{4}]$.

Ta có $f'(u) = -2u + 4$, $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2$

Lập bảng biến thiên thì yêu cầu bài toán thoả mãn khi và chỉ khi:

$$-\frac{17}{16} \leq 3m \leq 4 \Leftrightarrow \frac{-17}{48} \leq m \leq \frac{4}{3}.$$

Câu 10. Ta có: $a^2 + b^2 = 1$ nên $M(a; b)$ thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$, $R = 1$

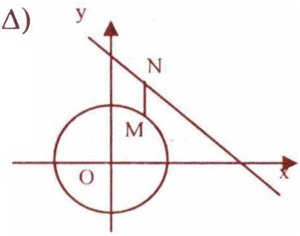
Vì $c + d = 6$ nên $N(c; d)$ thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 6 = 0$

$$MN^2 = (c - a)^2 + (b - d)^2$$
$$= c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2ac - 2bd = c^2 + d^2 - 2ac - 2bd + 1$$

Vì $M \in (C)$, $N \in \Delta \Rightarrow MN + OM \geq ON \geq d(O, \Delta)$

$$\Rightarrow MN + 1 \geq \frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MN^2 \geq (3\sqrt{2} - 1)^2: \text{(đpcm)}$$



ĐỀ SỐ 23

Câu 1. (1 điểm)

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = mx - 9$ tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số: $y = x^4 - 8x^2 + 7$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $z^3 = i$.

b) Giải phương trình: $\frac{3}{2}\log_2(x + 3)^2 - \log_2(4 - x)^3 = 3[1 + \log_2(x + 6)]$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{(2e^{3x} - e^{2x})dx}{e^x\sqrt{4e^x - 3} + 1}$

Câu 5 (1 điểm) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 điểm A(5; 4; 3); B(6; 7; 2) và đường thẳng (d): $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{1}$. Tìm toạ độ điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 6 (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm số nguyên dương n biết rằng: $\dfrac{C_n^1}{2} - \dfrac{2C_n^2}{2^2} + \dfrac{3C_n^3}{2^3} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{nC_n^n}{2^n} = \dfrac{n}{32}$

Câu 7 (1 điểm) Cho tứ diện ABCD có $\widehat{BAD} = 90^0$, $\widehat{CAD} = \widehat{ACB} = 60^0$ và AB = AC = AD = a. Xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

Câu 8 (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hai điểm A(–11; 3) và B(9; –7). Một đường thẳng Δ song song với AB, cắt đường tròn đường kính AB tại C, D. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D lên đường thẳng AB. Lập phương trình Δ biết CDIJ là hình vuông.

Câu 9. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{x+5} \geq 3 - \sqrt{x-2}$.

Câu 10. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa: xyz = 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4\sqrt{x})(1+y^4\sqrt{y})}} + \frac{y^3}{\sqrt{(1+y^4\sqrt{y})(1+z^4\sqrt{z})}} + \frac{z^3}{\sqrt{(1+z^4\sqrt{z})(1+x^4\sqrt{x})}}$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

• Tập xác định: D = **R**. Hàm số lẻ.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-4	↗	$+\infty$

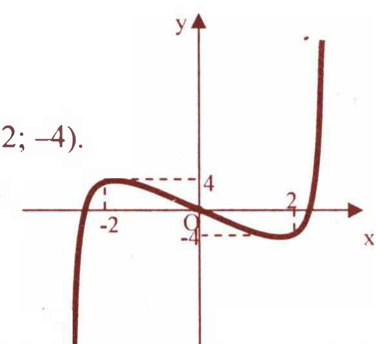
• Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = \dfrac{3}{4}x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(-2; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại (–2; 4), cực tiểu tại (2; –4).



• Đồ thị: $y'' = \dfrac{3}{2}x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên đồ thị nhận gốc O làm điểm uốn.

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2\sqrt{3}$.

Câu 2. Đường thẳng y = mx – 9 tiếp xúc với (C): $y = x^4 - 8x^2 + 7$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 8x^2 + 7 = mx - 9 & (1) \\ 4x^3 - 16x = m & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$x^4 - 8x^2 + 7 = (4x^3 - 16x)x - 9 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Thay $x = \pm 2$ vào (2) thì tính được $m = 0$. Vậy giá trị cần tìm: $m = 0$.

Câu 3.

a) Đặt $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbf{R})$

Ta có $(x + iy)^3 = i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$

Do đó: $x^3 - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm y\sqrt{3}$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Nếu $x = \pm\sqrt{3}\,y \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ và $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy có 3 số phức $z = -i$, $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ và $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$.

b) Điều kiện $x \neq -2$ và $-6 < x < 4$.

Phương trình tương đương:

$$3\log_2|x + 2| - 3\log_2(4 - x) = 3[1 + \log_2(x + 6)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x + 2| = \log_2 2 + \log_2(x + 6) + \log_2(4 - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x + 2| = \log_2[2(x + 6)(4 - x)] \Leftrightarrow |x + 2| = 2(x + 6)(4 - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 2(-x^2 - 2x + 24) \\ x + 2 = -2(-x^2 - 2x + 24) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 46 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 50 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{393}}{4} \text{ hoặc } x = \frac{-3 \pm \sqrt{409}}{4}$$

Chọn nghiệm: $x = \dfrac{-5 + \sqrt{393}}{4}$; $x = \dfrac{-3 - \sqrt{409}}{4}$.

Câu 4. Đặt $t = e^x\sqrt{4e^x - 3} + 1 \Rightarrow (t - 1)^2 = 4e^{3x} - 3e^{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(t - 1)dt = (2e^{3x} - e^{2x})dx$$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \ln 3 \Rightarrow t = 10$

Nên $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{(2e^{3x} - e^{2x})dx}{e^x\sqrt{4e^x - 3} + 1} = \frac{1}{3}\int_2^{10} \frac{(t - 1)dt}{t} = \frac{1}{3}\int_2^{10}\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{8 - \ln 5}{3}$.

Câu 5. Ta có $AB = \sqrt{11}$. Gọi h là khoảng cách từ C đến AB.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}h.AB \Rightarrow S_{ABC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ h nhỏ nhất.

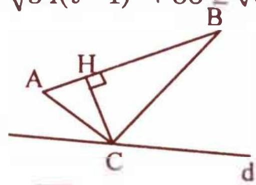
Đường thẳng AB có VTCP $\vec{u} = (1; 3; -1)$

Ta có C ∈ (d) ⇒ C(1 + 2t; 2 + 3t; 3 + t)

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2t - 4; 3t - 2; t) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{AC}] = (6t - 2; -3t + 4; -3t + 10)$

$\Rightarrow |[\vec{u}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{54t^2 - 108t + 120} = \sqrt{54(t-1)^2 + 66} \geq \sqrt{66}$

$\Rightarrow h = \dfrac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{AC}]\right|}{|\vec{u}|} \geq \dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{11}} = \sqrt{6}$



Đẳng thức xảy ra khi t = 1.

Vậy C(3; 5; 4) là điểm cần tìm và minS = $\dfrac{\sqrt{66}}{2}$

Câu 6.

a) Phương trình: $\cos3x - \cos2x + \cos x = \dfrac{1}{2}$.

Với: $\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$. Khi đó VT = –3, VP = $\dfrac{1}{2}$, PT vô nghiệm.

Với $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$, nhân hai vế với $2\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$

$\cos3x.\ 2\cos\dfrac{x}{2} - \cos2x.\ 2\cos\dfrac{x}{2} + \cos x.\ 2\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}.2\cos\dfrac{x}{2}$

Thu gọn được: $\cos\dfrac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{2\pi}{7}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

So sánh với điều kiện thì $k \neq 3 + 7h$; $h \in \mathbf{Z}$.

Vậy PT có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{2\pi}{7}$, $k \neq 3 + 7h$; $h, k \in \mathbf{Z}$.

b) Đặt $P(x) = (x + 1)^n$ (1)

Ta có $P(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$ (2)

Từ (2), ta có $P'(x) = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$

Suy ra: $P'(-\dfrac{1}{2}) = C_n^1 - \dfrac{2C_n^2}{2} + \dfrac{3C_n^3}{2^2} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{nC_n^n}{2^{n-1}}$

Do đó: $\dfrac{C_n^1}{2} - \dfrac{2C_n^2}{2^2} + \dfrac{3C_n^3}{2^3} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{nC_n^n}{2^n} = \dfrac{1}{2}P'(-\dfrac{1}{2})$

Mặt khác, từ (1) lấy đạo hàm 2 vế:

$P'(x) = n(x + 1)^{n-1}$ suy ra $P'(-\dfrac{1}{2}) = n(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

nên $\dfrac{1}{2}.n(\dfrac{1}{2})^{n-1} = \dfrac{n}{32} \Leftrightarrow 2^n = 32 \Leftrightarrow n = 5$. Vậy giá trị cần tìm là n = 5.

Câu 7. Ta có $BD = a\sqrt{2}$; BC = CD = a = 2 nên $\widehat{BCD} = 90^0$.

Gọi O là trung điểm của BD

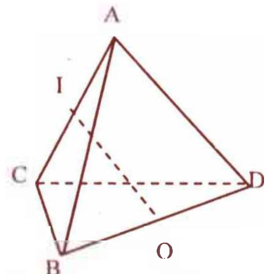
$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu qua A,B,C,D.

Gọi I là trung điểm của AC

$OA = OC \Rightarrow OI \perp AC$, $IB = ID$

$\Rightarrow OI \perp BD \Rightarrow d(AC, BD) = \frac{a}{2}$.



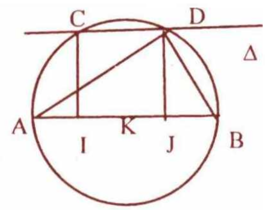
Câu 8. Ta có $\overrightarrow{AB} = (20; -10) \Rightarrow \Delta: x + 2y + c = 0$ và $AB = 10\sqrt{5}$; $R = 5\sqrt{5}$.

Gọi K là trung điểm AB $\Rightarrow K(-1; -2)$. Đặt $KJ = KI = x$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD thì: $JA.JB = JD^2$

$\Rightarrow (5\sqrt{5} - x)(5\sqrt{5} + x) = 4x^2$

$\Rightarrow x = 5 \Rightarrow d(K; \Delta) = 10 \Rightarrow c = 5 \pm 10\sqrt{5}$.



Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là:

$\Delta_1: x + 2y + 5 + 10\sqrt{5} = 0$; $\Delta_2: x + 2y + 5 - 10\sqrt{5} = 0$.

Câu 9. Bất phương trình: $\sqrt[3]{x+5} \geq 3 - \sqrt{x-2}$.

Điều kiện: $x \geq 2$, với ĐK này BPT đã cho tương đương

$(\sqrt[3]{x+5} - 2) + (\sqrt{x-2} - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} + \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right] \geq 0$$

$\Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ (vì biểu thức trong ngoặc dương) $\Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy nghiệm bất phương trình là $x \geq 3$.

Câu 10. Với $a > 0$ thì $\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} \geq \frac{2}{2+a^2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2$.

Chứng minh: Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$2 + a^2 = (a+1) + (a^2 - a + 1) \geq 2\sqrt{a^3+1} \Rightarrow$ đpcm.

Áp dụng $P \geq \frac{4x^3}{(2+x^3)(2+y^3)} + \frac{4y^3}{(2+y^3)(2+z^3)} + \frac{4z^2}{(2+z^3)(2+x^3)}$.

Ta chứng minh $\frac{4x^3}{(2+x^3)(2+y^3)} + \frac{4y^3}{(2+y^3)(2+z^3)} + \frac{4z^2}{(2+z^3)(2+x^3)} \geq \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 72$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2 = 48$ và $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz = 12 \Rightarrow$ đpcm.

Vậy $\min P = \frac{4}{3}$, đạt được khi $x = y = z = \sqrt[3]{4}$.

ĐỀ SỐ 24

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị: $y = x^4 - 8x^2 + 4$. Suy ra đồ thị hàm số: $y = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 12x - 1$.

Câu 2. (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = \frac{-x+2}{x+2}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 8$.

Câu 3. (1 điểm)

a) Tìm môđun của số phức z thoả mãn điều kiện: $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$.

b) Giải phương trình: $4^x - 2^x.\log_2(x+1) = \log_2(2x+2)$.

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos^5 x}dx$

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(–3; 1; 1) và đường thẳng Δ: $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình của mặt cầu có tâm ở trên đường thẳng Δ, đi qua A và tiếp xúc với trục Oz.

Câu 6. (1 điểm)

a) Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính các giá trị lượng giác của góc $\frac{\alpha}{2}$.

b) Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập A. Tính xác suất để tích hai số được chọn là một số chẵn.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = SC = 2a, AD = SA = a. Mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy. Chứng minh $\widehat{ASB} = 90^0$ và tính thể tích khối chóp đã cho theo a.

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). Tìm toạ độ các điểm A, B nằm trên elip (E) sao cho tam giác ABC đều.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 3x - 2y - 1 = 3\sqrt{(x^2-1)(x-y)} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-y} = \sqrt{2x-y+2} \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq \frac{x+y}{x+z} + \frac{y+z}{y+x} + \frac{z+x}{z+y}.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

Hàm số: $y = x^4 - 8x^2 + 4$

• Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn

• Sự biến thiên:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty.$

$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$.

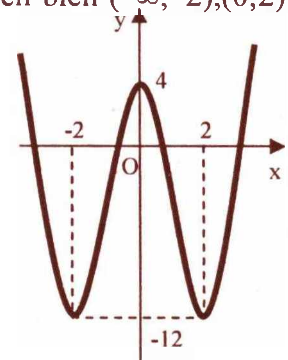
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-12	$\nearrow$	0	$\searrow$	-12	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên (–2; 0), (2;+∞) nghịch biến (–∞;–2),(0;2) và có CĐ (0; 0); CT(±2; –12)

• Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 16$, $y'' = 0 \Leftrightarrow$ $x = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}$ nên có 2 điểm uốn $\left(\frac{\pm 2}{\sqrt{3}}; -\frac{44}{9}\right)$.

Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.



Ta có $y = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 12x - 1 = (x-1)^4 - 8(x-1)^2 + 6 = f(x-1) + 2$

Do đó đồ thị mới được suy ra từ đồ thị y = f(x) đã vẽ theo phép tịnh tiến sang phải 1 đơn vị rồi lên trên 2 đơn vị.

Câu 2. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 8$ nên có hệ số góc $k = -2$. Hoành độ tiếp điểm thoả mãn phương trình:

$$\frac{-4}{(x+2)^2} = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2+\sqrt{2} \\ x_2 = -2-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Với $x_1 = -2 + \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 + 4\sqrt{2}$.

Với $x_2 = -2 - \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 - 4\sqrt{2}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến $y = -2x - 5 + 4\sqrt{2}$ và $y = -2x - 5 - 4\sqrt{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2 + i)z - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{2+i} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Vậy $|z| = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

b) Phương trình: $4^x - 2^x.\log_2(x+1) = \log_2(2x+2)$.

Điều kiện: $x > -1$.

PT $\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x - \log_2(2x+2)) = 0 \Leftrightarrow 2^x - \log_2(2x+2) = 0$

Xét $f(x) = 2^x - \log_2(2x+2)$, $x > -1$

$$f'(x) = 2^x.\ln 2 - \frac{1}{(x+1)\ln 2}, f''(x) = 2^x.\ln^2 2 + \frac{1}{(x+1)^2.\ln 2} > 0$$

do đó đồ thị có nghiệm $f'(x) = 0$ và đổi dấu nên f có một cực trị.

Từ BBT suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm

Mà $f(0) = 0$ và $f(1) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm là 0 và 1.

Câu 4. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos^5 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x \cos^6 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^6 x}dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right)^2 dx$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Khi $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}(1+t^2)^2 dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t} + 2t + t^3\right)dt = \left[\ln|t| + t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_1^{\sqrt{3}}$$

Vậy $I = 4 + \ln\sqrt{3}$.

Câu 5. Ta có $M \in \Delta$ nên $M(t-2; t-1; t)$.

Gọi M' là hình chiếu M lên Oz thì $M'(0; 0; t)$

Suy ra: $\overline{M'M} = (t-2; t-1; 0)$

$\Rightarrow d(M; Oz) = MM' = \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$

Nên $d(M; Oz) = AM \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $M(-3; -2; -1)$ và $R = \sqrt{13}$.

Vậy PT mặt cầu cầu tìm là $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 13$.

Câu 6.

a) Vì $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$.

Do đó: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$