NGƯT. ThS. LÊ HOÀNH PHÒ

2 trong 1

Các chuyên đề

BÁM SÁT ĐỀ THI

THPT QUỐC GIA

HÀM SỐ & PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NHÀ GIÁO ƯU TÚ
LÊ HOÀNH PHÒ

CÁC CHUYÊN ĐỀ
BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: *Biên tập – Chế bản:* (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN CẢNH BA
Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH
Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN
20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q1 - TP. Hồ Chí Minh

SÁCH LIÊN KẾT

**CÁC CHUYÊN ĐỀ BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA
HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT**

Mã số: 1L-269ĐH2015
In 1.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Địa chỉ: Số 6 Nguyễn Trung Trực - P5 - Q. Bình Thạnh - TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 1121- 2015/CXBIPH/48–189/ĐHQGHN, ngày 12/5/2015.
Quyết định xuất bản số: 287LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 19/5/2015
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2015.

LỜI NÓI ĐẦU

Các Em học sinh thân mến!

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 12 chuẩn bị thật tốt cho **KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA** đạt điểm khá, điểm cao để trúng tuyển vào các trường Cao đẳng, Đại học mà mình đã xác định nghề nghiệp cho tương lai, theo định hướng mới.

Bộ sách này gồm 8 cuốn cho 8 chuyên đề, để các em tiện dùng trong ôn luyện theo chương trình học và trước kỳ thi:

- KHẢO SÁT HÀM SỐ

- HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT

- NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

- SỐ PHỨC VÀ TỔ HỢP

- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

- LƯỢNG GIÁC VÀ TỌA ĐỘ PHẲNG

- PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Cuốn **HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT** gồm có 15 phần nhỏ để tiện luyện tập theo chủ đề. Từ các kiến thức và phương pháp giải Toán căn bản và nâng cao dần dần, kết hợp ôn tập Toán lớp 10 và 11, bổ sung và mở rộng kiến thức và phương pháp giải khác nhau, luyện tập thêm Toán khó, Toán tổng hợp, các bạn rèn luyện kỹ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán trong kiểm tra, thi cử.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những sai sót mà tác giả chưa thấy hết, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc, học sinh để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

MỤC LỤC

§1 BIẾN ĐỔI LUỸ THỪA VÀ MŨ

Luỹ thừa với các loại số mũ

- Luỹ thừa với số mũ nguyên dương:

$a^n = a.a...a$, *n thừa số a (với mọi a và* $n \in \mathbf{N}^*$*)*

- Luỹ thừa với số mũ 0 và nguyên âm:

$$a^0 = 1 \text{ và } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (với } a \neq 0 \text{ và } n \in \mathbf{N}^*\text{)}$$

- Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ;

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ a (với } a > 0 \text{ và } r = \frac{m}{n},\ n \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^*\text{)}$$

- Luỹ thừa với số mũ thực:

$a^\alpha = \lim a^{r_n}$ *(với* $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $r_n \in \mathbf{Q}$ *và* $\lim r_n = \alpha$*).*

- Biến đổi luỹ thừa:

Với các số $a > 0$, $b > 0$, α *và* β *tuỳ ý, ta có:*

$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$; $(a : b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$

Quan hệ so sánh

Nếu $a > 1$ *thì:* $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ *thì:* $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Nếu $0 < a < b$ *thì:* $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Căn bậc cao

- Căn bậc n:

Khi n lẻ, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$ *(với mọi a)*

Khi n chẵn, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ *(với* $a \geq 0$*).*

- Biến đổi căn bậc cao:

Với hai số không âm a, b, hai số nguyên dương m, n và hai số nguyên p, q tuỳ ý, ta có: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b > 0)\ ,\ \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p\ ;\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$. *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

Công thức lãi kép, tăng trưởng mũ

Gửi tiền vào ngân hàng theo thể thức lãi kép theo định kỳ: nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là: $C = A(1 + r)^N$.

Giả sử ta chia mỗi kì thành m đợt để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi kì là r thì lãi suất mỗi đợt là $\frac{r}{m}$ *và số tiền thu được sau N kì (hay sau Nm đợt) là*

$A\left(1+\frac{2}{m}\right)^{Nm}$. *Thể thức tính lãi khi* $m \to +\infty$ *gọi là thể thức lãi kép liên tục.*

Như vậy với số vốn ban đầu là A, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi kì là r thì sau N kì số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là:

$S = Ae^{Nr}$, *được gọi là công thức lãi kép liên tục hay tăng trưởng mũ*

Chú ý:

1) 0^0 *vô nghĩa.*

2) $\sqrt[3]{x} \neq x^{\frac{1}{3}}$ *(do điều kiện xác định khác nhau).*

3) Với A, B không âm:

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}, \sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B} \text{ và } \sqrt{M.N} = \sqrt{-M}.\sqrt{-N}, M \le 0, N \le 0.$$

Với A không âm và B dương:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ và } \sqrt{\frac{P}{Q}} = \frac{\sqrt{-P}}{\sqrt{-Q}}, P \le 0, Q < 0.$$

4) Các hằng đẳng thức

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5, \dots$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-1} + b^n), \dots$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-1} + b^n)$ *với n lẻ.*

5) Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Số hạng tổng quát thứ k + 1 là: $T_{k+1} = C_n^k . a^{n-k} . b^k$.

Đặc biệt: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 . x^0 + C_n^1 . x + \ldots + C_n^n . x^n$.

Bài toán 1.1: Thực hiện phép tính:

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}};\ B = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2.$$

Giải

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left((3)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}}$$

$$= (3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{27} + 5 - 8 = \frac{1}{27} - 3 = -\frac{80}{27}.$$

$$B = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2 = \left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}.\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}} - \left(2^3\right)^{-\frac{4}{3}} + 1$$

$$= 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = 7 - \frac{1}{16} = \frac{111}{16}.$$

Bài toán 1.2: Thực hiện phép tính:

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5};\ B = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2 + \frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}.$$

Giải

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} + \left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} - \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^2 + 2^3 - 5 = 12.$$

$$B = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2 + \frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3} = \left((-2)^{-1}\right)^{-4} - \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{19}{-27}$$

$$= 2^4 - 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10.$$

Bài toán 1.3: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$E = \left(0,5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}};\ F = 2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}}.$$

Giải

$$E = \left(0{,}5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 0{,}5^{\sqrt{16}} = 0{,}5^{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$$

$$F = 2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}}.2^{3\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}} = 2^{2} = 4\,;$$

Bài toán 1.4: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$E = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}\,;\ F = \left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)2^{-2\sqrt{3}}.$$

Giải

$$E = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 3^{2\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}} = 3^{1} = 3$$

$$F = \left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)2^{-2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{2}}.2^{-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}.2^{-2\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4}.$$

Bài toán 1.5: Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ:

$$I = \sqrt[4]{x^{2}\sqrt[3]{x}}\ (x > 0);\ J = \sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\ (a > 0,\ b > 0).$$

Giải

$$I = \sqrt[4]{x^{2}\sqrt[3]{x}} = \left(x^{2}x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$$

$$J = \sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}}.$$

Bài toán 1.6: Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ:

$$I = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}\,;\ J = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}\ (a > 0).$$

Giải

$$I = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$J = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = \left(a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}.a^{\frac{1}{16}}\right) : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{15}{16}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{4}}.$$

Bài toán 1.7: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}.$

b) $B = \dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{14-5\sqrt{3}}}$.

Giải

a) Ta có $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ và $18-8\sqrt{2} = (4-\sqrt{2})^2$

Nên $A = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}+1+4-\sqrt{2} = 5$.

b) Ta có: $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Biểu thức trên tử của B là: $3 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

Và $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{14-5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(5-\sqrt{3})^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}+5-\sqrt{3}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $B = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 1.8: Rút gọn các biểu thức:

a) $Q = \dfrac{x-14+2\sqrt{x+1}}{x+1-3\sqrt{x+1}}$

b) $P = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3} - \sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$.

Giải

a) Điều kiện $x+1 \geq 0, x+1 \neq 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \geq -1, x \neq 8$.

$$Q = \frac{x-14+2\sqrt{x+1}}{x+1-3\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2 - 4^2}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}+5)(\sqrt{x+1}-3)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)} = \frac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}} \text{ (do } x \neq 8)$$

Vậy $Q = \dfrac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq -1, x \neq 8$.

b) Điều kiện $-2 \le x \le 2$.

Đặt $a = \sqrt{2+x}$; $b = \sqrt{2-x}$ $(a, b \ge 0)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4; a^2 - b^2 = 2x$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{2+ab}(a^3-b^3)}{4+ab} = \frac{\sqrt{2+ab}(a-b)(a^2+b^2+ab)}{4+ab}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{2+ab}(a-b)(4+ab)}{4+ab} = \sqrt{2+ab}(a-b) \Rightarrow P\sqrt{2} = \sqrt{4+2ab}(a-b)$$

$$\Rightarrow P\sqrt{2} = \sqrt{(a^2+b^2+2ab)}(a-b) = (a+b)(a-b) \Rightarrow P\sqrt{2} = a^2 - b^2 = 2x.$$

Vậy $P = x\sqrt{2}$.

Bài toán 1.9: Tính giá trị của các biểu thức

a) $P = \left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$ với $x = \dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$, $y = \dfrac{7-\sqrt{45}}{2}$.

b) $Q = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ với $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, trong đó $a > 0, b > 0$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0; y > 0$.

$$P = (\sqrt{x}-\sqrt{y})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}}$$

Với $x = \dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$, $y = \dfrac{7-\sqrt{45}}{2}$ nên $x - y = \sqrt{45}$ và $\sqrt{xy} = \sqrt{\dfrac{49-45}{4}} = 1$

Do đó $P = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b) Ta có $x^2 - 1 = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2 - 1 = \dfrac{(a-b)^2}{4ab}$

$$\Rightarrow Q = \frac{\dfrac{2|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2|a-b|}{a+b-|a-b|}$$

Nếu $a \ge b \Rightarrow Q = \dfrac{2(a-b)}{a+b-(a-b)} = \dfrac{2(a-b)}{2b} = \dfrac{a-b}{b}$.

Nếu $a < b \Rightarrow Q = \dfrac{-2(a-b)}{a+b+a-b} = \dfrac{-2(a-b)}{2a} = \dfrac{b-a}{a}$.

Bài toán 1.10: Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2021}$.

Tính f(a) tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Giải

Ta có: $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}.(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$

$\Rightarrow a^3 = 32 + 3(-4)a \Rightarrow a^3 = 32 - 12a$

$\Rightarrow a^3 + 12a - 32 = 0 \Rightarrow a^3 + 12a - 31 = 1$

Vậy $f(a) = (a^3 + 12a - 31)^{2021} = 1^{2021} = 1$.

Bài toán 1.11: Cho $A = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ và $B = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $C = \dfrac{2A+B}{3}$ là một số nguyên.

Giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1$ (do x nguyên)

Ta có $A = \dfrac{1}{|2x+1|}$; $B = \dfrac{2(x-1)}{|x-1|}$. Suy ra: $C = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{|2x+1|} + \dfrac{x-1}{|x-1|}\right)$

-Nếu $x > 1$. Khi đó:

$$C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2x+1} + 1\right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} > 0 \Rightarrow C - 1 = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} - 1 = \frac{1-2x}{3(2x+1)} < 0$$

Suy ra $0 < C < 1$: C không thể là số nguyên.

- Nếu $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ thì $x = 0$ (vì x nguyên) và $C = 0$.

Vậy $x = 0$ là một giá trị cần tìm

- Nếu $x < -\dfrac{1}{2}$ thì $x \leq -1$ (do x nguyên). Ta có:

$$C = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2x+1} - 1\right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} \leq 0 \text{ và } C + 1 = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} + 1 = \frac{2x-1}{3(2x+1)} > 0$$

Suy ra $-1 < C \leq 0$ hay $C = 0$ và $x = -1$

Vậy các giá trị tìm được thoả mãn yêu cầu là: $x = 0$, $x = -1$.

Bài toán 1.12: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}.$$

Giải

Điều kiện xác định $x \geq 0, x \neq 9$

$$A = \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{9}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{9}{\sqrt{x}+1}}-2 = 6 - 2 = 4.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A = 4.

Bài toán 1.13: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$M = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}};\ N = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Giải

$$M = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$$

$$N = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = 2\sqrt[3]{ab}.$$

Bài toán 1.14: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$M = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1;\ N = \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}.$$

Giải

$$M = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)}.\sqrt[4]{a}+1 = \sqrt{a}-1+1 = \sqrt{a}.$$

$$N = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)} = (1+a) - (1-a) = 2a.$$

Bài toán 1.15: Rút gọn các biểu thức:

a) $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}.\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$ với $a>0, x>0, a \neq x$.

b) $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, với $a, b > 0, a^2 \geq b$.

Giải

a) Ta có $\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{-\sqrt[4]{ax}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}$

$$= -\sqrt[4]{ax} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{-\sqrt{ax}+1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ax}}$$

và $\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2} = 1+\sqrt{\frac{a}{x}}$

Do đó $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}.\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$

$$= \sqrt{ax}\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right) = \sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}).$$

b) Đặt $u = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $v = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $(u \geq v \geq 0)$

thì $u^2 + v^2 = a$; $u^2v^2 = \frac{b}{4}$ nên $b = 4u^2v^2$ nên

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{u^2+v^2+2uv} = u+v = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Tương tự: $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{u^2+v^2-2uv} = u-v$

$$= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Vậy $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Bài toán 1.16: Chứng minh

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Giải

a) Vì $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$ nên $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{16-12} = 4$: đúng.

Cách khác: Ta có $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 \pm 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$

b) Đặt $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Ta có:

$x^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})$

$= 18 + 3\sqrt[3]{81-80}\,x = 18 + 3x$.

Do đó có phương trình: $x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6) \Leftrightarrow x = 3$: đpcm.

Cách khác: $\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{72 \pm 32\sqrt{5}}{8} = 9 \pm 4\sqrt{5} = 9 \pm \sqrt{80}$

nên $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$.

Chú ý: Có thể dùng S = 3, P = 1 để tìm nghiệm của $X^2 - 3X + 1 = 0$.

Bài toán 1.17: Không dùng máy, tính giá trị đúng:

a) $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}}$ b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Giải

a) Ta có $(3\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3})^2 = 18 + 12 \pm 12\sqrt{6} = 30 \pm 12\sqrt{6}$

nên $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6$

Cách khác: Đặt $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = x$, $x > 0$.

Ta có $x^2 = 30 + 2\sqrt{225-216} = 36$ nên chọn x = 6.

b) Ta có: $7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$

Tương tự $7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$

Do đó $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

Cách khác: Đặt $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Ta có:

$x^3 = 7+5\sqrt{2} - (7-5\sqrt{2})-3(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}).(\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})})$

$= 10\sqrt{2}+3(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})=10\sqrt{2}+3x$.

Ta có phương trình:

$x^3 - 3x - 10\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 1.18: Cho x > 0, y > 0, hãy biểu thị x qua y biết rằng:

$$y = x^{\frac{2}{3}}, y = 2x^{-\frac{1}{4}}, y = x^{-\frac{3}{2}} - 1.$$

Giải

Ta có x > 0, y > 0 nên: $y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = y^{\frac{3}{2}}$; $y = 2x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^{-4}$

$$y = x^{-\frac{3}{2}} - 1 \Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = y + 1 \Rightarrow x = (y+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Bài toán 1.19: Trục căn thức ở mẫu:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}};\ B = \frac{1}{\sqrt[6]{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

Giải

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}-2} = \frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)}{1}.$$

Vì $5 - \sqrt{13+\sqrt{48}} = 5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$

nên $B = \frac{1}{\sqrt[6]{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{4-2\sqrt{3}}}{2}$.

Bài toán 1.20: Cho x > 0, y > 0, z > 0. Chứng minh:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = z^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2)^3 + 27x^2y^2z^2 = 0.$$

Giải

Ta có x > 0, y > 0, z > 0 nên: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = z^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = z^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + y^2 = z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2)^3 = -27x^2y^2z^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2)^3 + 27x^2y^2z^2 = 0$: đpcm.

Bài toán 1.21: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ thì $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$.

Giải

Từ giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$

$\Rightarrow (a + b).(a + b + c)c = abc - ab(a + b + c)$

$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Rightarrow$ có 2 số đối nhau

Vì n lẻ nên $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$: đpcm.

Bài toán 1.22: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

Nếu $ax^n = by^n = cz^n$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì: $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$.

Giải

Ta có $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{ax^n}{x} + \frac{by^n}{y} + \frac{cz^n}{z}} = \sqrt[n]{ax^n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$

$= \sqrt[n]{ax^n} = x\sqrt[n]{a}$ (vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, n lẻ)

Tương tự: $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = y\sqrt[n]{b} = z\sqrt[n]{c}$

$\Rightarrow VT\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1.23: Trong khai triển nhị thức: $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$, $x > 0$.

a) Tìm hệ số của x^{13}

b) Tìm số hạng không chứa x.

Giải

Số hạng tổng quát của $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$ là:

$$T_{k+1} = C_{13}^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{13-k}\left(x\sqrt{x}\right)^k = C_{13}^k.x^{\frac{13k-52}{6}}.$$

a) Hệ số của x^{13} ứng với $\frac{13k-52}{6} = 13 \Leftrightarrow k = 10$ là: $T_{11} = C_{13}^{10} = 286$.

b) Số hạng không chứa x ứng với $13k - 52 = 0 \Leftrightarrow k = 4$ là $T_5 = C_{13}^{4} = 715$.

Bài toán 1.24: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21}$, tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

Giải

Ta có $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21} = \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} + \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right) = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^{k} \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right)^{21-k} \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{k}$

$$= \sum_{k=0}^{21} C_{21}^{k} a^{\frac{21-k}{3} - \frac{k}{6}} . b^{\frac{k}{2} - \frac{21-k}{6}} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^{k} a^{\frac{42-3k}{6}} b^{\frac{4k-21}{6}}$$

Số mũ của a và b bằng nhau $\Leftrightarrow 42 - 3k = 4k - 21 \Leftrightarrow 7k = 63 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau trong khai triển là:

$$C_{21}^{9} = \frac{21!}{9!12!} = 293\ 930.$$

Bài toán 1.25: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$, $x > 0$ biết rằng tổng các hệ số của khai triển $(a + b)^n$ bằng 4096, $n \in \mathbf{N}^*$.

Giải

Ta có: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Do vậy tổng các hệ số khai triển của $(a + b)^n$ là

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Theo giả thiết, ta có: $2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Với n = 12 ta có:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{12} = \left(x^{\frac{1}{2}} + 2^{-1}.x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-k} \left(2^{-1}.x^{\frac{1}{4}}\right)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k} 2^{-k} x^{\frac{24-3k}{4}}$$

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{12}^{k} 2^{-k} x^{\frac{24-3k}{4}} \quad (k \in \mathbf{N} \text{ và } k \leq 12)$$

Suy ra số hạng không chứa x tương ứng với số hạng có k thỏa mãn:

$$\frac{24-3k}{4}=0 \Leftrightarrow k=8 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số hạng không chứa x là: $C_{12}^{8}.2^{-8}$.

Bài toán 1.26: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng?

Giải

Áp dụng công thức tính lãi kép: $C=A(1+r)^N$ nên sau 5 năm người gửi thu được một số tiền cả vốn lẫn lãi là: $C=15(1+0{,}0756)^5 \approx 21{,}59$ (triệu đồng).

BÀI TẬP

Bài tập 1.1: Tính gọn:

a) $S=\dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3.(\frac{1}{9})^{-3}}{5^{-3}.25^2+(0{,}7)^0.(\frac{1}{2})^{-2}}$ b) $T=\dfrac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

HD-ĐS

a) $S=11/3$. b) $T=4$.

Bài tập 1.2: Tính gọn:

a) $T=(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1)(x-\sqrt{x}+1), x\ge 0$.

b) $S=\dfrac{2\sqrt{4-\sqrt{5+\sqrt{21+\sqrt{80}}}}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$.

HD-ĐS

a) Dùng hằng đẳng thức $T=x^2+x+1$.

b) $\sqrt{21+\sqrt{80}}=\sqrt{1+4\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2}=1+2\sqrt{5}$, $S=1$.

Bài tập 1.3: Tính gọn:

a) $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

b) $B=(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}})\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$.

HD-ĐS

a) $A=4$ b) Dùng hằng đẳng thức, $B=0$.

Bài tập 1.4: Chứng minh:

Nếu $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ thì $\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}+\dfrac{1}{c^7}=\dfrac{1}{a^7+b^7+c^7}$.

HD-ĐS

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$.

Bài tập 1.5: Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}=\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}.$$

HD-ĐS

Bình phương tương đương.

Bài tập 1.6: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển:

$$P(x)=\left(\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n, \text{ với } x>0.$$

HD-ĐS

$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)\Leftrightarrow n=12.$

$$P(x)=\left(\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}2^kx^{-3k}x^{\frac{5(2-k)}{2}}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}2^kx^{\frac{60-11k}{2}}$$

Hệ số của x^8 là $C_{12}^{4}2^4=7920$.

Bài tập 1.7: Tính hệ số của x^9 trong khai triển $\left(2-\sqrt[3]{3}x\right)^{2n}$ biết rằng số tự nhiên n thỏa mãn hệ thức:

$$C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=4096.$$

HD-ĐS

$$2^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$0^{2n+1}=(1-1)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}-C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}-C_{2n+1}^{3}+...-C_{2n+1}^{2n+1}$$

Suy ra $2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$ nên n = 6.

Do đó $(2-\sqrt[3]{3}x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}2^{12-k}(-\sqrt[3]{3})^kx^k$.

Hệ số của x^9 ứng với k = 9 là $C_{12}^{9}2^{12-9}(-\sqrt[3]{3})^9=-47520$.

Bài tập 1.8: Cho $x=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức $B=x^5-6x^4+12x^3-4x^2-13x+2023$.

HD-ĐS

$$x=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, B=2018.$$

Bài tập 1.9: Cho $sh(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$; $ch(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Chứng minh:

a) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

b) $ch^2(x) - sh^2(x) = \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2$.

HD-ĐS

Dùng giả thiết và hằng đẳng thức.

2 BIẾN ĐỔI LÔGARIT

Định nghĩa và tính chất

- Lôgarit cơ số a: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ *(*$0 < a \neq 1$ *và* $b > 0$*)*

- Lôgarit cơ số 10: $\log_{10} b = \lg b$ *hay* $\log b$

- Lôgarit cơ số e: $\log_e b = \ln b$ *(*$e \approx 2,7183$*)*

- Tính chất: $\log_a 1 = 0$ *và* $\log_a a^b = b$ *với* $a > 0, a \neq 1$.

$a^{\log_a b} = b$ *với* $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Biến đổi lôgarit

Trong điều kiện xác định thì:

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -\log_a c$

$\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$ *(với mọi* α*)*, $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ *(*$n \in N^*$*)*

Các loại cơ số

Lôgarit cơ số 10: $\log_{10} b = \lg b$ *hay* $\log b$

Lôgarit cơ số e: $\log_e b = \ln b$ *(*$e \approx 2,7183$*)*

Đổi cơ số

Trong điều kiện xác định:

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b.\ \log_b x = \log_a x$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b.\log_b a = 1$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$

Quan hệ so sánh

Với $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$:

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c.$$

Bài toán 2.1: Tính:

$A = \log_{\frac{1}{5}} 125$; $B = \log_{0,5} \frac{1}{2}$; $C = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; $D = \log_{\frac{1}{6}} 36$.

Giải

$A = \log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3$; $B = \log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1$

$C = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 3$; $D = \log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$.

Bài toán 2.2: Tính:

$A = 3^{\log_3 18}$; $B = 3^{5\log_3 2}$; $C = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; $D = \left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}$.

Giải

$A = 3^{\log_3 18} = 18$;

$B = 3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$

$C = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = (2^{-3})^{\log_2 5} = 2^{(-3)\log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-3}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$

$D = \left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2} = 2^5 = 32$.

Bài toán 2.3: Tính:

a) $M = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$ b) $N = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$.

Giải

a) $M = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8\left(\frac{12}{15}.20\right) = \log_8 4^2 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$

b) $N = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21} = \log 7\left(\frac{6}{1421}\right) = \log_7 7^{-2} = -2$.

Bài toán 2.4: Tính:

a) $M = \dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$ b) $N = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

Giải

a) $M = \dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \dfrac{\log_5 3}{2\log_5 3} = \dfrac{1}{2}$

b) $N = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8\log_2 3 = 6^{\log_6 5^2} + 10^{\log_{10} 5} - 2^{\log_2 3^3} = 5^2 + 5 - 3^3 = 3$.

Bài toán 2.5: Tính gọn:

a) $M = \log_a \left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$ b) $N = \log_5\log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}$, n dấu căn.

Giải

a) Ta có $\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} = a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{173}{60}}$. Do đó: $M = \log_a \left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) = \dfrac{173}{60}$

b) Vì có n dấu căn nên $\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}} = 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Do đó: $N = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}} = -n$.

Bài toán 2.6: Tính gọn:

a) $M = \log 72 - 2\log\dfrac{27}{256} + \log\sqrt{108}$ b) $N = \log\dfrac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625}$.

Giải

a) $M = \log 72 - 2\log\dfrac{27}{256} + \log\sqrt{108} = \log(2^3.3^2) - \log\dfrac{3^6}{2^{16}} + \log\sqrt{2^2.3^3}$

$= \log\left(2^3.3^2.\dfrac{2^{16}}{3^6}.2.3^{\frac{3}{2}}\right) = \log\left(2^{20}.3^{\frac{5}{2}}\right) = 20\log 2 - \dfrac{5}{2}\log 3$

b) $N = \log\dfrac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625} = \log 2^{-3} - \log(0{,}5^3.3) + 2\log\sqrt{0{,}5^4.3^2}$

$= \log 2^{-3} - \log 2^{-3} - \log 3 + 2\log 2^{-2} + 2\log 3 = \log 2^{-4} + \log 3 = \log\dfrac{3}{16}$.

Bài toán 2.7: Rút gọn các biểu thức:

$A = \log_3 6.\ \log_8 9.\ \log_6 2$; $B = \log_3 2.\ \log_4 3.\ \log_6 5.\ \log_7 6.\ \log_8 7$.

Giải

$A = \log_3 6.\log_6 2.\log_8 9 = \log_3 2.\ \dfrac{1}{3}\log_2 9 = \dfrac{1}{3}\log_3 9 = \dfrac{2}{3}$

$B = \log_3 2.\log_4 3.\ \log_5 4.\ \log_6 5.\ \log_7 6.\ \log_8 7$

$$= \frac{\log 2}{\log 3}\cdot\frac{\log 3}{\log 4}\cdot\frac{\log 4}{\log 5}\cdot\frac{\log 5}{\log 6}\cdot\frac{\log 6}{\log 7}\cdot\frac{\log 7}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 8} = \log_8 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}.$$

Bài toán 2.8: Rút gọn các biểu thức:

$A = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$; $\qquad$ $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

Giải

Ta có: $A = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = \log_a b^2 + \frac{1}{2}\log_a b^4 = \log_a b^2 + \log_a b^2 = 2\log_a b^2$.

Đặt $x = \sqrt{\log_a b} \Rightarrow \log_a b = x^2 \Rightarrow b = a^{x^2}$

Mặt khác $\log_b a = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\log_b a} = \frac{1}{x}$.

Do đó: $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = a^x - a^{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 0$.

Bài toán 2.9: Tính $\log_a x$, biết $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$ với:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$ $\qquad$ b) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

Giải

a) $\log_a x = \log_a(a^3 b^2 \sqrt{c}) = 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 + \frac{1}{2}(-2) = 8$

b) $\log_a x = \log_a\left(\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right) = 4 + \frac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \frac{1}{3}.3 - 3(-2) = 11$.

Bài toán 2.10: Tìm cơ số x biết rằng:

a) $\log_x \frac{1}{7} = -1$ $\qquad$ b) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

Giải

Điều kiện cơ số $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) $\log_x \frac{1}{7} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Leftrightarrow x = 7$.

b) $\log_x \sqrt{5} = -4 \Leftrightarrow x^{-4} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{8}}$

Bài toán 2.11: Tìm x biết:

a) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$ $\qquad$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$.

$\log_5 x = \log_5 a^2 - \log_5 b^3 = \log_5 \frac{a^2}{b^3} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^3}$

b) Điều kiện $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{5}}\right) \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{5}}.$$

Bài toán 2.12:

a) Tính $\log_{25}15$ theo $a = \log_{15}3$. b) Tính $\log_4 1250$ theo $b = \log_2 5$.

Giải

a) $\log_{25}15 = \dfrac{1}{\log_{15}25} = \dfrac{1}{2\log_{15}5} = \dfrac{1}{2(\log_{15}15 - \log_{15}3)} = \dfrac{1}{2(1-a)}$

b) $\log_4 1250 = \dfrac{1}{2}\log_2(5^4.2) = 2\log_2 5 + \dfrac{1}{2} = 2b + \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 2.13:

a) Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$.

b) Tính $\ln 6{,}25$ theo $c = \ln 2$, $d = \ln 5$.

Giải

a) $\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 50 = 2\log_3 50 = 2\log_3 10 + 2\log_3 5$

$= 2\log_3 10 + 2\log_3 \dfrac{15}{3} = 2\log_3 10 + 2(\log_3 15 - 1)$

$= 2b + 2(a - 1) = 2a + 2b - 2.$

b) $\ln 6{,}25 = \ln(5^2.0{,}5^2) = 2\ln 5 + 2\ln 0{,}5 = 2\ln 5 - 2\ln 2 = 2d - 2c$.

Bài toán 2.14:

a) Cho $\log_6 15 = x$, $\log_{12}18 = y$, tính $\log_{25}24$ theo x, y.

b) Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$, tính $\log_{140}63$ theo a, b, c.

Giải

a) Ta có $x = \dfrac{\log_2 3.5}{\log_2 2.3} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$ và $y = \dfrac{\log_2 2.3^2}{\log_2 2^2.3} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$

Suy ra $\log_2 3 = \dfrac{2y-1}{2-y}$; $\log_2 5 = \dfrac{x+1-2y+xy}{2-y}$

Do đó $\log_{25}24 = \dfrac{\log_2 2^3.3}{\log_2 5^2} = \dfrac{5-y}{2(x+1-2y+xy)}$.

b) $\log_{140}63 = \log_{140}(3^2.7) = 2\log_{140}3 + \log_{140}7$

$$= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3(2^2.5.7)} + \frac{1}{\log_7(2^2.5.7)}$$

$$= \frac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1}$$

Ta có $\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3} = \dfrac{1}{a}$, $\log_7 5 = \log_7 2.\log_2 3.\log_3 5 = cab$;

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2.\log_2 3} = \frac{1}{ca}$$

Vậy $\log_{140} 63 = \dfrac{2}{\dfrac{2}{a} + b + \dfrac{1}{ca}} + \dfrac{1}{2c + cab + 1} = \dfrac{2ac+1}{abc + 2c + 1}$.

Bài toán 2.15: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ b) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

Giải

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_b a^{\log_c b}} = b^{\log_c b.\log_b a} = b^{\log_c a}$

b) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \dfrac{\log_a x}{\dfrac{\log_a x}{\log_a ab}} = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b$

Bài toán 2.16: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}.$$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$

$$= \frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_a b} + \frac{3}{\log_a b} + \ldots + \frac{n}{\log_a b}$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n).\frac{1}{\log_a b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}.$$

Bài toán 2.17: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$

b) Nếu $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$, thì $ab + 5(a - b) = 1$.

Giải

a) $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab \Rightarrow \dfrac{a+b}{3} = \sqrt{ab} \Rightarrow$ đpcm.

b) $a = \log_{12}18 = \dfrac{\log_2 2.3^2}{\log_2 2^2.3} = \dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a-1}{2-a}$

$b = \log_{24}54 = \dfrac{\log_2 54}{\log_2 24} = \dfrac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{3b-1}{3-b}$

Do đó $\dfrac{2a-1}{2-a} = \dfrac{3b-1}{3-b} \Rightarrow 6a - 2ab - 3 + b = 6b - 3ab - 2 + a \Rightarrow ab + 5(a-b) = 1$.

Bài toán 2.18: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + c^2 = b^2$ thì $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$.

b) Nếu a, b, c lập cấp số nhân thì $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Giải

a) Theo giả thiết: $a^2 + c^2 = b^2$ nên $a^2 = (b-c)(b+c)$.

Xét a = 1: đúng.

Xét $a \neq 1$ thì $\log_a(b-c) + \log_a(b+c) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{b-c} a} + \dfrac{1}{\log_{b+c} a} = 2$

nên $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$

b) Ta có $\log_a d - \log_b d = \dfrac{1}{\log_d a} - \dfrac{1}{\log_d b} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{b}\right)}{(\log_d a)(\log_d b)}$

Tương tự: $\log_b d - \log_c d = \dfrac{1}{\log_d b} - \dfrac{1}{\log_d c} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{a}\right)}{(\log_d b)(\log_d c)}$

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \log_d\left(\dfrac{c}{b}\right) = \log_d\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Do đó $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_d c}{\log_d a} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Bài toán 2.19: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, biết số hạng thứ tư bằng 200. Tìm x?

Giải

ĐK: $x > 0, x \neq \frac{1}{10}$. Ta có:

$$\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6=\left(x^{\frac{1}{2(\lg x+1)}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k x^{\frac{6-k}{2(\lg x+1)}}.x^{\frac{k}{12}}$$

Số hạng thứ 4 ứng với k = 3, theo giả thiết bằng 200 nên:

$$C_6^3 x^{\frac{3}{2(\lg x+1)}+\frac{1}{4}}=200 \Leftrightarrow x^{\frac{7+\lg x}{4\lg x+4}}=10 \Leftrightarrow \frac{7+\lg x}{4\lg x+4}\lg x=1$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x+3\lg x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=1\\ \lg x=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=10^{-4}\end{array}\right. \text{ (Chọn).}$$

Vậy giá trị cần tìm là $x = 10$, $x = 10^{-4}$.

Bài toán 2.20: Tìm các giá trị x sao cho số hạng thứ ba trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(3^{-\frac{1}{3}(\log x^3+1)}+3^{\log^2 x^2}\right)^8$ bằng 28.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Số hạng thứ ba trong khai triển nhị thức Niu-tơn trên là:

$$C_8^2\left(3^{\log^2 x^2}\right)\left(3^{-\frac{1}{3}(\log^3+1)}\right)^8=28.3^{8\log^2 x}3^{-2(\log x^3+1)}=28.3^{8\log^2 x-2(\log x^3+1)}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$28.3^{2\log^2 x^2--2(\log x^3+1)}=28 \Leftrightarrow 3^{2\log^2 x^2-2(\log x^3+1)}=1$$

$\Leftrightarrow 2\log^2 x^2 - 2(\log x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\log^2 x - 3\log x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log x=1\\ \log x=-\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\end{array}\right.$$

Vậy x cần tìm là $x = 10$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Bài toán 2.21: Cho khai triển Niu-tơn $\left(2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x, biết rằng số hạng thứ 6 từ trái sang phải trong khai triển này là 224.

Giải

Ta có: $(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{k=8} C_8^k a^{8-k} b^k$.

Với $a = 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} = \left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}$; $b = 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = \left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}$

Theo thứ tự trong khai triển trên, số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là:

$$T_6 = C_8^5\left(\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 . \left(\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^5 = 56\left(9^{x-1}+7\right)\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}$$

Theo giả thiết ta có:

$$56\left(9^{x-1}+7\right)\left(3^{x-1}+1\right)^{-1} = 224 \Leftrightarrow \frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 4 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{x-1}\right)^2 - 4\left(3^{x-1}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy x = 1 hoặc x = 2 là giá trị cần tìm.

Bài toán 2.22: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

Giải

Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sẽ có sau n quý là:

$S = 15(1 + 0{,}0165)^n = 15.1{,}0165^n$ (triệu đồng).

nên $\log S = \log 15 + n\log 1{,}0165 \Rightarrow n = \dfrac{\log S - \log 15}{\log 1{,}0165}$

Để có được số tiền 20 triệu đồng thì phải sau một thời gian là:

$$n = \frac{\log 20 - \log 15}{\log 1{,}0165} \approx 18 \text{ (quý)} = 4 \text{ năm } 6 \text{ tháng.}$$

Bài toán 2.23: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% và sự tăng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

Giải

Theo bài ra, ta có: $S = Ae^{Nr} \Rightarrow 100 = 78{,}6858.e^{0{,}017N}$, do đó:

$$\ln 100 = \ln\left(78{,}6858.e^{0{,}017N}\right) \Rightarrow N = \frac{\ln 100 - \ln 78{,}6858}{0{,}017} \approx 14.$$

Vậy đến năm 2015 dân số nước ta sẽ ở mức 100 triệu người.

Bài toán 2.24: Số 2^{2012}; $2^{1398269}$ -1 khi viết trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

Giải

Lấy giá trị gần đúng của log2 là 0,3010 thì được:

$[2012.\log 2] + 1 = [2012.0,3010] + 1 = [605,692] + 1 = 606$

Vậy số 2^{2012} có 606 chữ số.

Và $[1398269.\log 2] + 1 = [420920,911] + 1 = 420921$

Vậy số $2^{1398269}$ - 1 có 420921 chữ số.

BÀI TẬP

Bài tập 2.1: Tìm cơ số x, biết:

a) $\log_x 243 = 5$ b) $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1$

HD-ĐS

a) x = 3 b) x = 1/3.

Bài tập 2.2: Tính gọn:

a) $A = \log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$ b) $B = \sqrt{\log_{0,5}^2 4}$.

HD-ĐS

a) A = 2/3 b) B =2.

Bài tập 2.3: Tính gọn:

a) $M = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}$

b) $N = \log_3 2.\log_4 3.\log_5 4.\log_6 5.\log_7 6.\log_8 7$

HD-DS

a) M = 30 b) N = 1/3.

Bài tập 2.4: Tính:

a) $A = \log_a(a^3.\sqrt[5]{a})$ b) $B = \log_a \dfrac{a^2.\sqrt[5]{a^2}.\sqrt[3]{a^4}}{a^3.\sqrt{a}}$.

HD-ĐS

a) $A = \dfrac{16}{5}$ b) $B = \dfrac{16}{15}$.

Bài tập 2.5: Tính $\log_{25}24$ theo $a = \log_6 15$ và $b = \log_{12} 18$.

HD-ĐS

$$\log_{25}24 = \frac{5-b}{2(a+17ab-2b)}$$

Bài tập 2.6: Tính $\log_a 2$ theo $x = \log_a 5$; $y = \log_a 60$ và $z = \log_a 108$.

HD-ĐS

$\log_a 2 = \frac{1}{4}(3y - 3x - z)$.

Bài tập 2.7: Chứng minh nếu $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ tạo thành một cấp số cộng theo thứ tự đó thì: $\log_b y = \frac{2\log_a x \log_c z}{\log_a x + \log_c z} (0 < x, y, z, a, b, c \neq 1)$

HD-ĐS

$\log_x a, \log_y b, \log_z c$ tạo thành một cấp số cộng theo thứ tự đó thì:

$\log_x a + \log_z c = 2\log_y b$.

3 HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LUỸ THỪA

Hàm số luỹ thừa

*Hàm số $y = x^\alpha$ với a thuộc **R**.*

Liên tục trên tập xác định của nó.

Đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ (x > 0),\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}},\ \text{với } u = u(x) > 0.$$

Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

***Chú ý:** Tập xác định:*

$y = x^n$ $(n \in N^*)$: $D = \mathbf{R}$

$y = x^m$ $(m \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}^*)$: $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$: $D = (0; +\infty)$.

Hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ với cơ số $a > 0$, $a \neq 1$.

*Liên tục trên tập xác định **R**, nhận mọi giá trị thuộc $(0; +\infty)$.*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases};\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

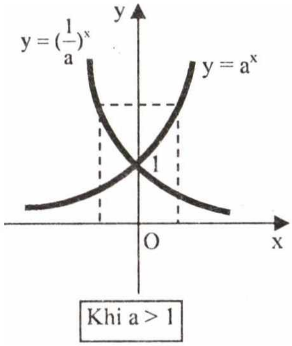
Đạo hàm: $(a^x)' = a^x\ln a$; $(e^x)' = e^x$;

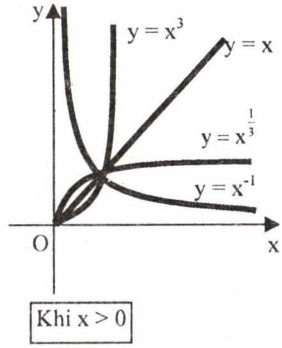
$(a^u)' = a^u u'\ln a$; $(e^u)' = e^u u'$ với $u = u(x)$.

*Đồng biến trên **R** nếu $a > 1$, nghịch biến trên **R** nếu $0 < a < 1$.*

Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, nằm ở phía trên trục hoành và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Đồ thị và quan hệ đối xứng





Các dạng vô định

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \ \lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Chú ý: quan hệ so sánh

Nếu $\alpha > 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Nếu $0 < a < b$ thì: $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$,; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Bài toán 3.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - 4x + 3)^{-5}$ b) $y = (x^2 - 4x + 3)^{\sqrt{2}}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi: $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 3$.

Vậy $D = \mathbf{R} \setminus \{1; 3\}$.

b) Hàm số xác định khi: $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3$.

Vậy $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Bài toán 3.2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{-1}{3}}$ b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi: $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ hoặc $x > 2$.

Vậy $D = (0; 1) \cup (2; +\infty)$

b) Hàm số căn bậc 3 xác định với mọi x nên $D = \mathbf{R}$.

Bài toán 3.3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\dfrac{5 - 3^x}{3^x - 1}}$ b) $y = \sqrt{4^x + 2^x - 12}$.

Giải

a) ĐK: $\frac{5-3^x}{3^x-1} > 0 \Leftrightarrow (5 - 3^x)(3^x - 1) \geq 0,\ 3^x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 < 3^x \leq 5 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_3 5.$

Vậy $D = (0; \log_3 5]$

b) ĐK: $4^x + 2^x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq -4$ hoặc $2^x \geq 3$.

$\Leftrightarrow 2^x \geq 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$

Vậy $D = [\log_2 3; +\infty)$

Bài toán 3.4: Chứng minh các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.\ln a = \ln a$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$.

Bài toán 3.5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-e^{3x+2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-e^{3x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2(1-e^{3x})}{x} = -3e^2.\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} = -3e^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^{5x}-1}{x}\right) = 2-5 = -3$

Bài toán 3.6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{e^{3x}-7^x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}+\frac{5^x-1}{x}}{\frac{3^x-1}{x}+\frac{5^x-1}{x}} = \frac{\ln 2+\ln 5}{\ln 3+\ln 5} = \frac{\ln 10}{\ln 15}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}-7^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4.\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\dfrac{e^{3x}-1}{x}-\dfrac{7^x-1}{x}}=\dfrac{4}{3-\ln 7}$.

Bài toán 3.7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\right]^{\frac{x}{x-3}}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=e^2$.

Bài toán 3.8: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\tan x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\right):\dfrac{\sin x}{x\cos x}=(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}):1=\dfrac{5}{12}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+ax+1}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+1)}=\dfrac{a}{n}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

Bài toán 3.9: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-e^x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-e^x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1+1-e^x}{3x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1-1}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{3(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\frac{1}{6} \text{ và } \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1+1-e^x}{3x}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2+2-2.e^x}{5x}$

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2}{5x}=\dfrac{3x+8-8}{5x\left[(\sqrt[3]{x+8})^2+2.\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$

$$=\frac{3}{5\left[(\sqrt[3]{x+8})^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2}{5x}=\dfrac{3}{5(4+4+4)}=\dfrac{1}{20}$.

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2.e^x}{5x}=-\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=-\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x}=\dfrac{1}{20}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{-7}{20}$.

Bài toán 3.10: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}+1-3^{x-1}}{\sqrt{x}-1}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\,.\,\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3^{x-1}}{\sqrt{x}-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{x-1}.(\sqrt{x}+1)=-2.\ln 3$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{3}-2.\ln 3$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+e^{x-1}-1}{x^2-4x+3}$

Ta có: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1+x^2-x}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{x-1}{(x-1)(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x}{x-3}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{2}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x-3)}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}=\dfrac{-2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-7}{6}$.

Bài toán 3.11: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.\dfrac{\ln(8x+1)}{x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(8x+1)}{x}=8$

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}=\frac{1}{4}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)=\dfrac{1}{4}.8=2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1+1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x-1}:\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x-1}:\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}=\ln 5.\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{1}{4}\ln 5.$

Và $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$=\left(\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=-\dfrac{1}{4}.\ln 5+0=-\dfrac{1}{4}.\ln 5.$

Bài toán 3.12: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y=(x-1).e^{2x}$ b) $y=x^2\sqrt{e^{4x}+1}$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y'=e^{2x}+(x-1).2e^{2x}=(2x-1)e^{2x}$

b) Tập xác định D = **R**.

$y'=2x\sqrt{e^{4x}+1}+\dfrac{2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}=\dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}.$

Bài toán 3.13: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ b) $y=x^5-5^x+x^x$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y'=\dfrac{(2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2)(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2)}{(2^x+2^{-x})^2}$

$$= \frac{(2^x+2^{-x})^2-(2^x-2^{-x})^2}{(2^x+2^{-x})^2}\ln^2 2 = \frac{4\ln^2 2}{(2^x+2^{-x})^2}$$

b) Tập xác định D = $(0;+\infty)$.

Ta có $y = x^5 - 5^x + x^x = x^5 - 5^x + e^{x\ln x}$ nên

$$y' = 5x^4 - 5^x\ln 5 + e^{x\ln x}(\ln x + 1) = 5x^4 - 5^x\ln 5 + x^x(\ln x + 1).$$

Bài toán 3.14: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^x$ b) $y = \cos x.e^{2\tan x}$

Giải

a) Tập xác định D = $(0;+\infty)$.

Ta có $y = x^x = e^{x\ln x}$ nên $y' = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$.

Cách khác: lấy ln 2 vế $\ln y = x.\ln x$ rồi mới tính đạo hàm.

b) $y' = -\sin x.e^{2\tan x} + \frac{2}{\cos x}.e^{2\tan x} = e^{2\tan x}\left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right)$.

Bài toán 3.15: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x+1)^\pi - \tan e^x$ b) $y = \sqrt[5]{x^3 - 5x}$.

Giải

a) $y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1} - (1 + \tan^2 e^x)e^x$

b) $y' = \frac{(x^3-5x)'}{5\sqrt[5]{(x^3-5x)^4}} = \frac{3x^2-5}{5\sqrt[5]{(x^3-5x)^4}}$.

Bài toán 3.16: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ b) $y = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0, b > 0$

Giải

a) Đặt $u = \frac{1+x^3}{1-x^3}$ thì $y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ và $u' = -\frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$

nên $y' = \frac{u'\sqrt[3]{u}}{3u} = \frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

b) $y' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]'\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]'$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\frac{a-b}{x}.$$

Bài toán 3.17: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = 3^x$ b) $y = 5^{kx}$.

Giải

a) Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = (\ln 3)^n.3^x$

Khi n = 1 thì $y' = (\ln 3).3^x$.

Giả sử công thức đúng khi n = k: $y^{(k)} = (\ln 3)^k.3^x$

Ta chứng minh công thức đúng khi n = k +1: $y^{(k+1)} = (\ln 3)^{k+1}.3^x$

Thật vậy: $y^{(k+1)} = (\ln 3)^k.3^x.\ln 3 = (\ln 3)^{k+1}.3^x$: đpcm.

Vậy $y^{(n)} = (\ln 3)^n.3^x$.

b) $y' = (k\ln 5).5^{kx}$, $y'' = (k\ln 5)^2.5^{kx}$

Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = (k\ln 5)^n.\ 5^{kx}$

Bài toán 3.18: Chứng minh:

a) Nếu $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thì: $y''' - 13y' - 12y = 0$.

b) Nếu $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$ thì $y^{(4)} + 4y = 0$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$, $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$, $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$ nên:

$y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0$.

b) Ta có $y = \dfrac{\cos x}{e^x} = e^{-x}.\cos x \Rightarrow y' = e^{-x}(-\sin x - \cos x)$

$y'' = e^{-x}.(2\sin x)$, $y''' = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $y^{(4)} = -4e^{-x}.\cos x$

Do đó $y^{(4)} = -4y \Rightarrow y^{(4)} + 4y = 0$.

Bài toán 3.19: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng:

$$S = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Giải

Để ý nếu a + b = 1 thì:

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^b + 2) + 4^b(4^a + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)}$$

$$= \frac{4^{a+b} + 2.4^a + 4^{a+b} + 2.4^b}{4^{a+b} + 2.4^a + 2.4^b + 4} = \frac{2.4^a + 2.4^b + 8}{2.4^a + 2.4^b + 8} = 1$$

Ta có: $S = f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + ... + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$

hay $S = f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right)$

Áp dụng thì $2S = n - 1 \Rightarrow S = \frac{n-1}{2}$.

Bài toán 3.20: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \frac{e^x}{x}$ b) $y = x^2.e^{-x}$.

Giải

a) Tập xác định D = **R** \ {0},

$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
y'	-	‖	-	0	+
y	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, đạt CT(1; e)

b) Tập xác định D = **R**,

$y' = (2x - x^2)e^{-x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow -\infty$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng (0; 2), nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đạt CĐ$(2; 4e^{-2})$, CT(0; 0).

Bài toán 3.21: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Giải

a) Vì cơ số $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên D = **R**.

b) Vì cơ số $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \frac{3}{1,4+1,7} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định D = **R**.

Bài toán 3.22: Cho hàm số: $y = f(x) = 2^x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho f(x) .

b) Suy ra đồ thị các hàm số: $y = 2^x - 1$, $y = 4.2^x$, $y = -2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^{|x|}$.

Giải

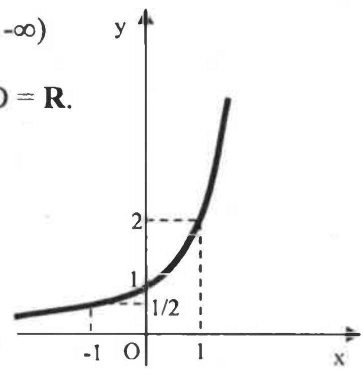
a) $y = f(x) = 2^x$, tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0 \Rightarrow$ TCN: $y = 0$ (khi $x \to -\infty$)

$y' = 2^x . \ln 2 > 0$, $\forall x$ nên hàm số đồng biến trên $D = \mathbf{R}$.

BBT

x	$-\infty$ $+\infty$
y'	+
y	0 $\nearrow$ $+\infty$



Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

b) Suy ra đồ thị các hàm số:

$y = 2^x - 1 = f(x) - 1$: Tịnh tiến xuống dưới 1 đơn vị.

$y = 4.2^x = 2^{x+2} = f(x + 2)$: Tịnh tiến sang trái 2 đơn vị.

$y = -2^x = -f(x)$: Lấy đối xứng qua Ox.

$y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = f(-x)$: Lấy đối xứng qua Oy.

$y = 2^{|x|} = f(|x|)$ hàm số chẵn, khi $x \geq 0$ thì $y = f(x)$ nên lấy phần này và lấy đối xứng của nó qua Oy.

Bài toán 3.23: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^{-3}$.

Giải

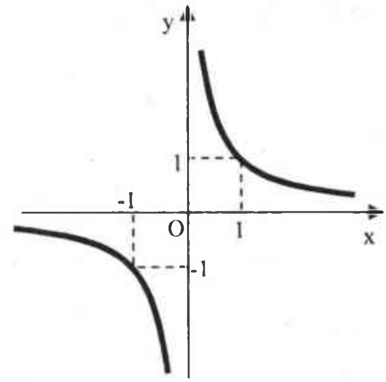
Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, hàm số lẻ.

$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} < 0$, $\forall x \neq 0$ nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$ nên tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

BBT

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

Bài toán 3.24: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ b) $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Giải

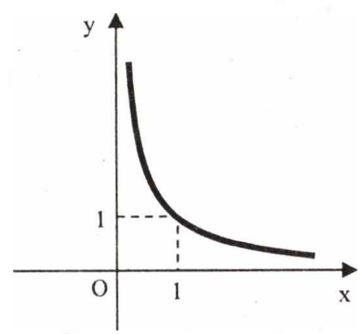
a) Tập xác định D = (0; +∞),

$y' = -\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}} < 0, \forall x > 0$ nên hàm số nghịch biến trên (0; +∞).

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ nên tiệm cận đứng là trục tung, tiệm cận ngang là trục hoành.

BBT:

x	0		$+\infty$
y'		-	
y	$+\infty$	$\searrow$	0



Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

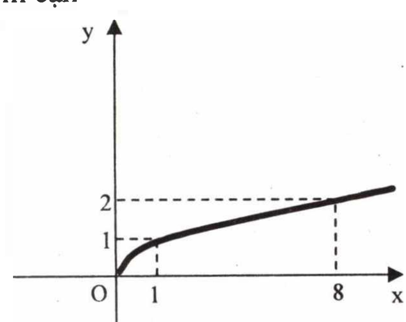
b) Tập xác định D = (0; +∞),

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0, \forall x > 0$ nên hàm số đồng biến trên (0; +∞).

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$: không có tiệm cận

BBT:

x	0		$+\infty$
y'		+	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$,

$x = 8 \Rightarrow y = 2$.

Bài toán 3.25: Chứng minh hai đồ thị (G_1), (G_2) của hai hàm số:

$y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua lần lượt:

Trục tung là $M'(-x_o; y_o)$.

Ta có: $M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = a^{x_o} \Leftrightarrow y_o = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_o} \Leftrightarrow M' \in (G_2)$

Điều đó chứng tỏ (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

Bài toán 3.26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Tìm m để phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Giải

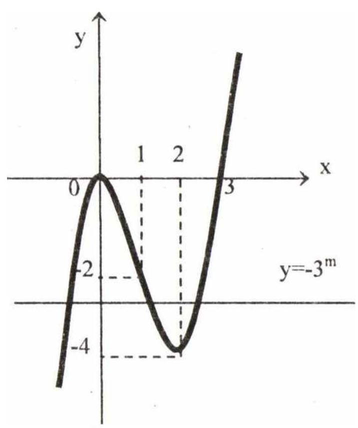
a) • Tập xác định: **R**

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$, $(2, +\infty)$,

nghịch biến trên $(0,2)$ và có điểm CĐ(0; 0), CT(2; -4)

•Đồ thị: $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Điểm uốn I(1; -2) là tâm đối xứng.

b) Phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = -3^m$.

Phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = -3^m$ cắt đồ thị $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị đã vẽ, ta có:

$-4 < -3^m < 0 \Leftrightarrow 3^m < 4 \Leftrightarrow m < \log_3 4$.

Vậy giá trị cần tìm là $m < \log_3 4$.

BÀI TẬP

Bài tập 3.1: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-\cos 2x}{x^2.2^x}$

HD-ĐS

a) a – b b) 7/2

Bài tập 3.2: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^x$

HD-ĐS

a) 2ln3 b) e^3

Bài tập 3.3: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+8x)^{\frac{1}{x}}$

HD-ĐS

a) e^2 b) lấy ln trước.

Bài tập 3.4: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4.2^{x-1}}{x^3-1}$

HD-ĐS

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-1+1-e^x}{x}$

$$\frac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+4x}\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[3]{1+x}.\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}+\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}\text{ nên có }\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}.$$

b) $\dfrac{1}{9}+4\ln 2$.

Bài tập 3.5: Tính đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = x.\ e^x$. b) $y=e^x\sin x$

HD-ĐS

a) $y^{(n)} = (\ x+\ n)\ e^x$. b) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+n\dfrac{\pi}{4})$.

Bài tập 3.6: Xét tính đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{3^x - 5^{-x}}{2}$.   b) $y = 2^{tgx}$.

HD-ĐS

a) Đồng biến trên D = **R.**

b) Đồng biến trong các khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in Z$.

Bài tập 3.7: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$. b) $y = x - e^x$

HD-ĐS

a) Đồng biến trên (0; 2) và nghịch biến trên (-∞; 0), (2; +∞).

b) Nghịch biến trên khoảng (0; +∞), đồng biến trên (-∞; 0).

Bài tập 3.8: Chứng minh hàm số: $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$.

HD-ĐS

Lấy ln trước khi tính đạo hàm.

Bài tập 3.9: Cho hàm số: $y = f(x) = 3^x$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số cho.

b) Suy ra các đồ thị của các hàm số sau: $y = (\frac{1}{3})^x$; $y = -3^x$; $y = 3^{|x|}$.

HD-ĐS

b) $y = (\frac{1}{3})^x$ = f(-x); $y = -3^x$ = - f(x); $y = 3^{|x|}$ = f(|x|).

Bài tập 3.10: Cho hàm số $y = x^4 - x^2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Tìm m để phương trình: $x^4 - x^2 + 2^m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

HD-ĐS

a) BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1/4	↗	0	↘	-1/4	↗	$+\infty$

b) phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi m > -2.

4

HÀM SỐ LÔGARIT

Hàm số lôgarit

Hàm số $y = \log_a x$ với cơ số $a > 0$ và $a \neq 1$.

*Liên tục trên tập xác định $(0; +\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc **R**.*

Giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > 1 \\ -\infty \text{ khi } 0 < a < 1 \end{cases};$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ khi } a > 1 \\ +\infty \text{ khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đạo hàm

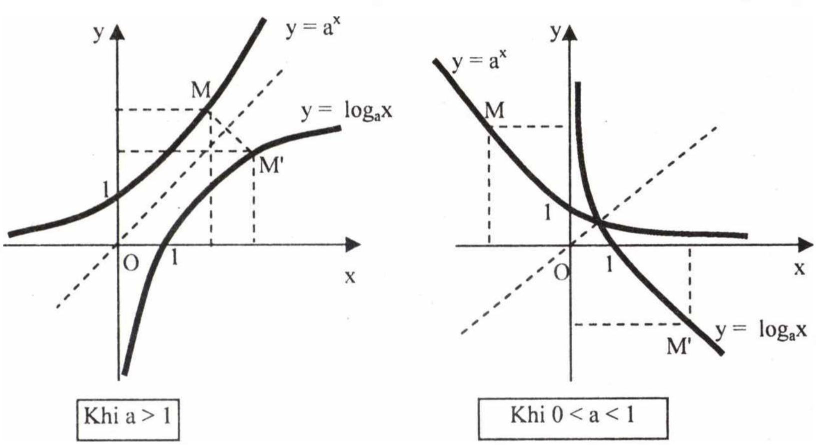
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \ (\ln x)' = \frac{1}{x}; \ (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

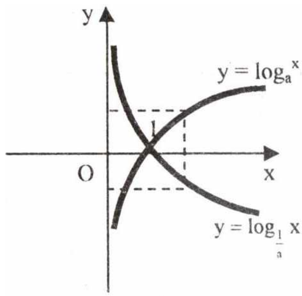
$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}; \ (\ln u)' = \frac{u'}{u}; \ (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \text{ với } u = u(x).$$

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

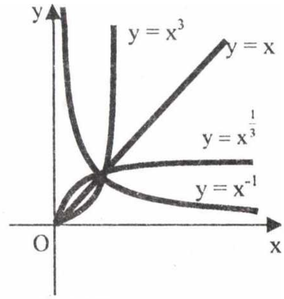
Đồ thị luôn cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, nằm ở bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Đồ thị và quan hệ đối xứng





Khi a < 1



Khi x > 0

Các dạng vô định

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Chú ý: quan hệ so sánh

Với $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$:

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

Bài toán 4.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \lg(x^2 - 4)$ b) $y = \lg(x + 2) + \lg(x - 2)$.

Giải

a) ĐK: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

Vậy tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

b) ĐK: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập xác định $D = (2; +\infty)$.

Bài toán 4.2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4x-1)-1}$ b) $y = \sqrt{\log_{\sqrt{5}}(x^2-\sqrt{5}.x+2)}$.

Giải

a) ĐK: $\begin{cases} 4x-1>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(4x-1)\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1>0 \\ 4x-1\leq \frac{1}{3} \end{cases}$ (hàm nghịch biến)

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$. Vậy tập xác định $D = (\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$.

b) ĐK: $\begin{cases} x^2 - \sqrt{5}x + 2 > 0 \\ \log_{\sqrt{5}}(x^2 - \sqrt{5}x + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 2 \geq 1$ (hàm nghịch biến)

$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Vậy tập xác định $D = \left(-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 4.3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt[4]{\log x + \log(x+2)}$

b) $y = \sqrt{4\log_2 x - \log_2^2 x - 3} + \sqrt{x^2 - 7x + 6}$.

Giải

a) ĐK: $\log x + \log(x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log[x(x+2)] \geq \log 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ hay } x \geq -1 + \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 + \sqrt{2}$

Vậy tập xác định $D = [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$

b) ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ 4\log_2 x - \log_2^2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \text{ hay } x \geq 6 \\ 1 \leq \log_2 x \leq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \text{ hay } x \geq 6 \\ 2 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 8.$

Vậy tập xác định $D = [6; 8]$.

Bài toán 4.4: Chứng minh giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \log_a e \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Bài toán 4.5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{1 - \cos 2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}=3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{2\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3\ln(1+3x^2)}{3x^2}:\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\right]=\dfrac{3}{2}$.

Bài toán 4.6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\log_3(1+5x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\log_3(1+5x)}=\dfrac{4}{5\log_3 e}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+5x)}=\dfrac{4}{5}\ln 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right):\left(\dfrac{\ln(1+6x)}{x}-\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\right)\right]$

$=(\ln 6-\ln 3):(6-3)=\dfrac{1}{3}\ln 2$.

Bài toán 4.7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\ln(1+3x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\right).\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}.\dfrac{1}{3}$

$=(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}).\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{36}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-2x^2}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(-2\dfrac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]=-\dfrac{7}{3}$.

Bài toán 4.8: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+\lg x}{x^2-4x+3}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}+\frac{\ln x}{x^2-1}\right)$$

Vì $\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1+x^2-3x+2}{x^2-1}$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}+\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{2(x-1)}{(x^2-1)(\sqrt{2x-1}+1)}+\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}+\frac{x-2}{x+1}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{2}=0$.

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+(x-1))}{x-1}.\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+\lg x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{\lg x}{x^2-4x+3}\right)$

Với $x \neq 1$, $x \neq 3$, ta có:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}=\frac{\sqrt[3]{x-2}+1+x^2-x}{x^2-4x+3}=\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{x-1}{(x-1)(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x}{x-3}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{2}{3}$.

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg e.\ln(1+(x-1))}{x-1}.\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{2}.\lg e$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1-\lg x}{x^2-4x+3}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\lg e.$

Bài toán 4.9: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

Vì 1 - cosx.cos2x.cos3x = 1 - cosx + cosx - cosxcos2xcos3x

= 1 - cosx + cosx(1 - cos2x.cos3x)

= 1 - cosx + cosx [1 - cos2x + cos2x(1 - cos3x)]

= 1 - cosx + cosx(1 - cos2x) + cosxcos2x (1 - cos3x)

Và $\dfrac{1-\cos kx}{1-\cos x}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{kx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\left(\dfrac{\sin\dfrac{kx}{2}}{\dfrac{kx}{2}}\right)^2.\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2.k^2$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\cos x.\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}+\cos x.\cos 2x.\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\right) = 1 + 1.4 + 1.9 = 14.$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e) = 14.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}:\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$\sin(a + x)\sin(a + 2x) - \sin^2 a = -\dfrac{1}{2}[\cos(2a + 3x) - \cos x] - \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

$= -\dfrac{1}{2}[\cos(2a + 3x) + \cos 2a] - \dfrac{1}{2}[1 - \cos x] = -\sin(2a + \dfrac{3}{2}x)\sin\dfrac{3x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}.$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\sin\left(2a+\frac{3}{2}x\right).\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{3}{2}\sin 2a$$

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}=\dfrac{1}{2}\sin 2a$.

Bài toán 4.10: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(e+\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}\right)$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$

Ta có $\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\dfrac{-2x^2}{2\sin^2 x(1+\sqrt{2x^2+1})}=-\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2.\dfrac{1}{1+\sqrt{2x^2+1}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=-1.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}:\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=0$.

b) $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$$=\left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\frac{\sin x}{x}\right):\frac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(e+\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}\right)=\ln(e+0)=1$.

Bài toán 4.11: Tính giới hạn:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(2e^3-e^3\cos 2x)-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right).$$

Giải

Ta có $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(2e^3 - e^3\cos 2x\right) - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln e^3\left(2-\cos 2x\right) - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(2-\cos 2x\right) + 3 - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+1-\cos 2x\right) + 3 - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+2\sin^2 x\right) + 3 - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{2\sin^2 x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{3-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{-8x^2}{8x^2\left(9+3\sqrt[3]{(27+8x^2)} + \sqrt[3]{(27+8x^2)^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\left(9+3\sqrt[3]{(27+8x^2)} + \sqrt[3]{(27+8x^2)^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{9+3.3+9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{27} = \frac{23}{108}.$$

Bài toán 4.12: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x - 2)\ln^2 x$ b) $y = \sqrt{x^2+1}\log_3 x^2$.

Giải

a) Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

Ta có $y = (3x - 2)\ln^2 x$ nên $y' = 3\ln^2 x + \dfrac{2(3x-2)\ln x}{x}$

b) Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

Ta có $y = \sqrt{x^2+1}\log_3 x^2$ nên $y' = \dfrac{x\log_3 x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x.\ln 3}$.

Bài toán 4.13: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ b) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

Ta có $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ nên $y' = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x + \sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

b) Tập xác định D = **R** \ {0}.

Ta có $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ nên $y' = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

Bài toán 4.14: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$ b) $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$.

Giải

a) Tập xác định D = (-1;6).

b) Ta có $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$

nên $y' = \dfrac{-2x+5}{(-x^2+5x+6)\ln\sqrt{3}} = \dfrac{-4x+10}{(-x^2+5x+6)\ln 3}$

Tập xác định D = (0;+∞).

Ta có $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$ nên $y' = \dfrac{(\ln^3 5x)'}{5\sqrt[5]{(\ln^3 5x)^4}} = \dfrac{3\ln^2 5x}{5\sqrt[5]{\ln^{12} 5x}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

Bài toán 4.15: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = \ln(x - 5)$ b) $y = \ln(6x^2 - x - 1)$.

Giải

a) Với x > 5:

Ta có $y = \ln(x - 5)$

nên $y' = \dfrac{1}{x-5}$; $y'' = \dfrac{-1}{(x-5)^2}$; $y''' = \dfrac{1.2}{(x-5)^3}$

Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-5)^n}$.

b) Với $x < -\dfrac{1}{3}$ hoặc $x > \dfrac{1}{2}$:

Ta có $y = \ln(6x^2 - x - 1) = \ln((2x - 1)(3x + 1)) = \ln|2x - 1| + \ln|3x+1|$

Nên $y' = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{3}{3x+1}$. Ta chứng minh quy nạp $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(m)} = \dfrac{(-1)^m m! a^m}{(ax+b)^{m+1}}$

Suy ra $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^{n-1}}{(2x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^{n-1}}{(3x+1)^n}$.

Bài toán 4.16: Chứng minh: Nếu $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ thì $xy' + 1 = e^y$.

Giải

Tập xác định D = (-1; + ∞)

Ta có $y' = -\dfrac{1}{x+1}$. Suy ra $xy' + 1 = \dfrac{-x}{x+1} + 1 = \dfrac{1}{x+1} = e^y$.

Cách khác: biến đổi: $y = \ln\dfrac{1}{1+x} = -\ln(x+1)$.

Bài toán 4.17: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ b) $y = x - \ln(1 + x)$

Giải

a) $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

Khi $x < -1$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

Khi $x > 1$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

b) $D = (-1; +\infty)$, $y' = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$y' < 0, \forall x \in (-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Ta có $y'' = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

Bài toán 4.18: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = \log_{\frac{2}{e}} x$ b) $y = \log_a x$ với $a = \dfrac{1}{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$.

Giải

a) Vì cơ số $\dfrac{2}{e} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $D = (0; +\infty)$

b) Vì cơ số $\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $D = (0; +\infty)$.

Bài toán 4.19: Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Suy ra các đồ thị hàm số: $y = \log_2 2x$, $y = \lg_2(x - 3)$, $y = \log_2(-x)$,

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_2 |x|$.

Giải

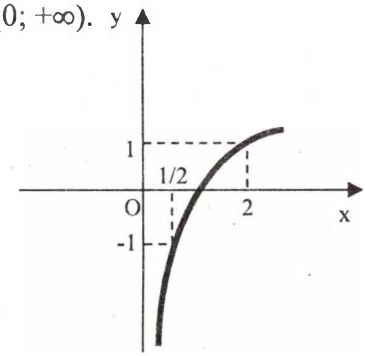
a) $y = f(x) = \log_2 x$, $D = (0; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 0$ (khi $x \to 0^+$)

$y' = \dfrac{1}{x \ln 2} > 0, \forall x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

BBT

x	0	$+\infty$
y'	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Cho $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$, $x = 2 \Rightarrow y = 1$

b) Suy ra các đồ thị hàm số:

$y = \log_2 2x = f(x) + 1$: Tịnh tiến lên trên 1 đơn vị.

$y = \log_2(x - 3) = f(x - 3)$: Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị.

$y = \log_2(-x) = f(-x)$: Lấy đối xứng qua Oy.

$y = \log_{\frac{1}{2}} x = -f(x)$: Lấy đối xứng qua Ox.

$y = \log_2 |x| = f(|x|)$ là hàm số chẵn, khi $x > 0$ thì $y = f(x)$ nên lấy phần này và lấy đối xứng của nó qua Oy.

Bài toán 4.20: Chứng minh hai đồ thị (G_1), (G_2) của hai hàm số:

a) $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

b) $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua phân giác 1.

Giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua lần lượt:

a) Trục hoành là $M''(x_o; -y_o)$. Ta có:

$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = \log_a x_o \Leftrightarrow -y_o = \log_{\frac{1}{a}} x_o \Leftrightarrow M'' \in (G_2)$

b) Phân giác 1 là $M'''(y_o; x_o)$. Ta có:

$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = a^{x_o} \Leftrightarrow x_o = \log_a y_o \Leftrightarrow M''' \in (G_2)$.

Bài toán 4.21: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \ln x$ và d là một tiếp tuyến bất kì của (C). Chứng minh rằng trên khoảng $(0; +\infty)$, đồ thị (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng d.

Giải

Gọi x_o là hoành độ của điểm M tuỳ ý thuộc (C). Tiếp tuyến d của (C) tại M có phương trình $y = \frac{1}{x_o}(x - x_o) + \ln x_o$.

Khẳng định cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau: $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$\left[\frac{1}{x_o}(x - x_o) + \ln x_o\right] - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x_o} - \ln\frac{x}{x_o} \geq 1$$

Xét $g(t) = t - \ln t$ với $t > 0$,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t},\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

BBT

t	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		-	0	+	
g		↘	1	↗	

Ta có $g(t) \geq 1,\ \forall t > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.22: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm m để phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

a) • Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn

• Sự biến thiên:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

$$y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3),\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	5/2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ nghịch biến $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$ và có CĐ $(0; \frac{5}{2})$; CT$(\pm\sqrt{3}; -2)$

• Đồ thị đối xứng nhau qua trục tung:

$y'' = 6x^2 - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Điểm uốn $I(\pm 1; 0)$

b) Phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 5 - \lg m$

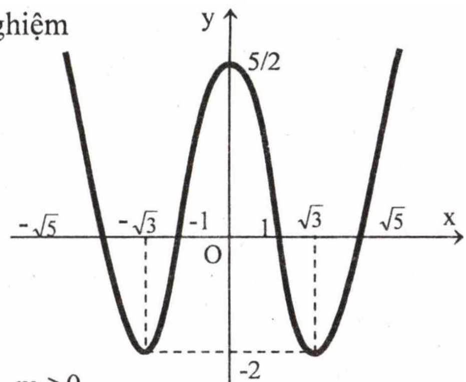
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(5 - \lg m), m > 0$$

Phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi đường thẳng

$$y = \frac{1}{2}(5 - \lg m) \text{ cắt đồ thị}$$

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$$

tại 2 điểm phân biệt.



Dựa vào đồ thị đã vẽ, ta có:

$$\frac{1}{2}(5 - \lg m) > \frac{5}{2} \text{ hay } \frac{1}{2}(5 - \lg m) = -2, m > 0$$

$\Leftrightarrow$ $5 - \lg m > 5$ hay $5 - \lg m = -4$

$\Leftrightarrow$ $\lg m < 0$ hay $\lg m = 9 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ hay $m = 10^9$.

Vậy giá trị cần tìm là $0 < m < 1$ hay $m = 10^9$.

BÀI TẬP

Bài tập 4.1: Tìm miền xác định hàm số:

a) $y = \lg(4 - 3x)$ b) $y = \log_3|x - 2|$.

HD-ĐS

a) $x < \frac{4}{3}$ b) $x \neq 2$.

Bài tập 4.2: Tìm miền xác định hàm số:

a) $y = \sqrt{\log_2 x}$ b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}}$.

HD-ĐS

a) $x \geq 1$ b) $x > 1$.

Bài tập 4.3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(6x+1) - \ln(2x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x.\ln(7x+e)}$.

HD-DS

a) 4 b) 13/12

Bài tập 4.4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4+\ln(8-7x)}{x^3-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

HD-ĐS

a) Thêm bớt 1 đại lương căn, $\dfrac{7}{3}$. b) 28.

Bài tập 4.5: Tính đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 4)$ b) $y = x^3.\ln x$

HD-ĐS

a) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ b) Tính y', y'', y''' rồi tìm quy luật.

Bài tập 4.6: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{x}{\ln x}$. b) $y = \ln(x+\sqrt{4+x^2})$.

HD-DS

a) Đồng biến trên $(e; +\infty)$ và nghịch biến trên $(0; 1)$, $(1; e)$.

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} > 0$, $\forall x$, hàm số đồng biến trên tập xác định **R**.

Bài tập 4.7: Vẽ đồ thị:

a) $y = \log_2(x+1)+\log_2(x-1)$ b) $y = \log_2(x^2-1)$

HD-ĐS

a) $D = (1;+\infty)$ b) $D = (-\infty; -1) \cup (1;+\infty)$.

Bài tập 4.8: Cho hàm số: $y = f(x) = \log_3 x$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số cho.

b) Suy ra các đồ thị của các hàm số sau: $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = |\log_3 x|$ và $y = \log_3|x|$.

HD-ĐS

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x = -f(x)$; $y = |\log_3 x| = |f(x)|$; $y = \log_3|x| = f(|x|)$.

Bài tập 4.9: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^3 + 3x - 2 = \log_3 m$.

HD-ĐS

b) Nếu $m \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $0 < m < \dfrac{1}{81}$, $m > 1$ thì phương trình có một nghiệm.

Nếu $m = \frac{1}{81}$, m = 1 thì phương trình có hai nghiệm.

Nếu $1 > m > \frac{1}{81}$ thì phương trình có ba nghiệm.

5 SO SÁNH BIỂU THỨC MŨ VÀ LOGARIT

So sánh cùng cơ số của mũ: $a > 0, a \neq 1$.

Nếu $a > 1$ thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow M > N$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow M < N$.

So sánh cùng lũy thừa của mũ: $0 < a < b$

$a^x < b^x \Leftrightarrow x > 0$; $a^x > b^x \Leftrightarrow x < 0$.

So sánh cùng cơ số của logarit: $a > 0, a \neq 1$

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a E > \log_a F \Leftrightarrow E > F > 0$

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a E > \log_a F \Leftrightarrow 0 < E < F$.

***Chú ý**: So sánh cùng chỉ số bậc căn, so sánh bình phương, so sánh tính gọn, so sánh trục căn thức, so sánh tương đương sau khi đánh giá, đặt ẩn phụ, so trung gian số khác, tách phần nguyên, dùng bất đẳng thức* Côsi, ...

Bài toán 5.1: So sánh các số:

a) $\sqrt{2}$ và $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$.

Giải

a) Ta có $(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$.

Do 9 > 8 nên ta có $(\sqrt{2})^6 < \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, suy ra $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293}$; $\sqrt[5]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841}$

Ta có 371293 > 279841 nên $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

Bài toán 5.2: So sánh các số:

a) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$ b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 1 + \sqrt[3]{27} = 4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{63}$

b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < 2 + 4 = 3 + 3 < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Bài toán 5.3: So sánh các số:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$ b) 3^{600} và 5^{400}.

Giải

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}} = 3^{-\frac{7}{12}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1}\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{-\frac{5}{12}}$

Vì cơ số 3 > 1 nên $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}} < \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

b) Ta có: $3^{600} = \left(3^3\right)^{200} = 27^{200}$; $5^{400} = \left(5^2\right)^{200} = 25^{200}$. Vậy $3^{600} > 5^{400}$.

Bài toán 5.4: So sánh các số:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}}$.

Giải

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = 2^{\frac{5}{7}}$; $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

b) Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$.

Ta có $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{2})^2 < \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 18 < 20$: đúng

Vì cơ số $0 < \frac{1}{3} < 1$ nên $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} < 3^{-3\sqrt{2}}$.

Bài toán 5.5: So sánh p và q biết:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}$

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{3}{8}\right)^{q}$.

Giải:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{2}{3}\right)^{q}$, $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow p < q$.

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{3}{8}\right)^{q} \Rightarrow \left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{8}{3}\right)^{-q}$, $\frac{8}{3} > 1 \Rightarrow -p > -q \Rightarrow p < q$.

Bài toán 5.6: So sánh p và q biết:

a) $0{,}25^{p} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q}$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^{p} > \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q}$.

Giải:

a) $0,25^p < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^p < \left(\frac{1}{4}\right)^q, \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow p > q$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^p > \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q} \Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^p < \left(\frac{7}{2}\right)^{2q-p}, \frac{7}{2} > 1 \Rightarrow p < 2q - p \Rightarrow p < q$.

Bài toán 5.7: Hãy so sánh:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$ b) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

Giải

a) Ta có $\log_3 4 > 1$ và $\log_4 \frac{1}{3} < 0$, suy ra $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$

b) Ta có $\log_6 1,1 > 0$ nên $3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$)

và $\log_6 0,99 < 0$ nên $7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$).

Suy ra $3^{\log_6 1,1} > 7^{\log_6 0,99}$.

Bài toán 5.8: Hãy so sánh:

a) $\log_8 27$ và $\log_9 25$ b) $\log_4 9$ và $\log_9 25$.

Giải

a) Ta có $\log_8 27 > \log_8 25$ vì $8 > 1$

và $\log_8 25 > \log_9 25$ vì $8 < 9$ nên $\log_8 27 > \log_9 25$.

b) Ta có $\log_4 9 = \log_2 3 = \log_8 27 > \log_9 25$.

Bài toán 5.9: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\log 2 + \log 3$ với $\log 5$ b) $\log 12 - \log 5$ với $\log 7$.

Giải

a) $\log 2 + \log 3 = \log 6 > \log 5$. b) $\log 12 - \log 5 = \log \frac{12}{5} = \log 2,4 < \log 7$

Bài toán 5.10: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $3\log 2 + \log 3$ với $2\ln 5$ b) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Giải

a) $3\log 2 + \log 3 = \log(2^3.3) = \log 24 < \log 25 = 2\log 5 < 2\ln 5$.

b) Vì $\frac{3}{5} < 1$ và $\frac{2}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{4}} 1 = 0$

Vì $\frac{3}{2} > 1$ và $\frac{3}{5} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5} < \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$. Từ đó suy ra $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Bài toán 5.11: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\log_2 3$ và $\log_6 5$ b) $\log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{\log 5+\log\sqrt{7}}{2}$.

Giải

a) Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_6 5$ thì: $3 = 2^a$ nên $a > 1$ và $5 = 6^b$ nên $b < 1$.
Vậy $\log_2 3 > \log_6 5$.

b) Ta có $\dfrac{\log 5+\log\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1}{2}\log(5\sqrt{7}) = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$.

Đặt $a = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$ thì $\sqrt{5\sqrt{7}} = 10^a$.

$b = \log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ thì $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^b$.

Ta có $(\dfrac{5+\sqrt{7}}{2})^2 - (\sqrt{5\sqrt{7}})^2 = 8 + \dfrac{5}{2}\sqrt{7} - 5\sqrt{7} > 0$

Nên $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}$ do đó $10^a < 10^b$.

Vậy $a < b$ hay $\log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \dfrac{\log 5+\log\sqrt{7}}{2}$.

Bài toán 5.12: Chứng minh:

a) $\dfrac{1}{\log_2\pi} + \dfrac{1}{\log_5\pi} > 2$ b) $\log_2 3 > \log_3 4$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{1}{\log_2\pi} + \dfrac{1}{\log_5\pi} = \log_\pi 5 + \log_\pi 2 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2$

b) $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3 2} > \log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 2.\log_3 4 < 1$: Đúng

Vì theo bất đẳng thức Côsi:

$$\sqrt{\log_3 2.\log_3 4} < \frac{1}{2}(\log_3 2 + \log_3 4) = \frac{1}{2}\log_3(2.4) < \frac{1}{2}\log_3 9 = 1$$

Bài toán 5.13: Chứng minh:

$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ với mọi số nguyên $n > 1$.

Giải

Ta tách phần nguyên:

$$A = \log_n(n+1) = \log_n n(1+\frac{1}{n}) = 1 + \log_n(1+\frac{1}{n})$$

$B = \log_{n+1}(n+2) = \log_{n+1}(n+1)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$

Ta có $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$

và $\log_n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow \log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Vậy A > B.

Bài toán 5.14: Cho $m > 1$, $a + b = c$ với $a > 0$, $b > 0$.

Chứng minh: $a^m + b^m < c^m$.

Giải

Ta có $a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1$

Mà $a + b = c$, $a > 0$, $b > 0$ nên $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$

Suy ra với $m > 1$ thì $\left(\frac{a}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^1$; $\left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{b}{c}\right)^1$

Từ đó ta có: $\left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$.

BÀI TẬP

Bài tập 5.1: So sánh các số sau đây:

a) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[4]{5}$ 　　　　 b) 2 và $\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3}$

HD-ĐS

a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$ 　　　　 b) $2 < \sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3}$

Bài tập 5.2: So sánh các số sau đây:

a) $\sqrt{11} + \sqrt{14}$; $\sqrt{12} + \sqrt{13}$ 　　　　 b) $\frac{1}{\sqrt{59} - \sqrt{58}}$; $\frac{1}{\sqrt{58} - \sqrt{57}}$

HD-ĐS

a) So sánh bình phương 　　　　 b) Trục căn thức

Bài tập 5.3: So sánh các số sau đây:

$A = \sqrt{10 + 8\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ và $B = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$.

HD-ĐS

Tính gọn trước rồi so sánh tương đương.

Bài tập 5.4: Các lôgarit sau dương hay âm?

a) $\log_2 5$ b) $\log_5 2$ c) $\log_{0,2} 0,8$ d) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}$.

HD-ĐS

a) Dương b) Dương c) Dương d) Âm

Bài tập 5.5: So sánh các số sau đây:

a) $\log_3 4$; $\log_4 \dfrac{1}{3}$ b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2}$; $\log_{0,2} 0,34$.

HD-ĐS

a) $\log_3 4 > \log_4 \dfrac{1}{3}$ b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2} < \log_{0,2} 0,34$.

Bài tập 5.6: So sánh các số sau đây:

a) $\log_4 5$; $\log_{\frac{1}{16}} \dfrac{1}{25}$ b) $\log_5 7$; $\log_8 7$.

HD-ĐS

a) $\log_4 5 = \log_{\frac{1}{16}} \dfrac{1}{25}$ b) $\log_5 7 > \log_8 7$.

Bài tập 5.7: So sánh các số sau đây:

a) $\log_8 27$; $\log_9 25$ b) $\log_{135} 675$; $\log_{45} 75$

HD-ĐS

a) Lần lượt đưa về so sánh cùng cơ số, cùng mũ, $\log_8 27 > \log_9 25$

b) Đặt $\log_{135} 675 = x$; $\log_{45} 75 = y$ thì $1 < x,y < 2$ và $675 = 135^x$,

$75 = 45^y$, $\log_{135} 675 > \log_{45} 75$.

Bài tập 5.8: So sánh các số sau đây:

a) 205^{204} và 204^{205}. b) $\dfrac{1}{2} + \lg 3$ và $\lg 19 - \lg 2$.

HD-ĐS

a) Lấy ln hai vế, $205^{204} < 204^{205}$. b) $\dfrac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$.

6

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm trong điều kiện xác định

$(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u.u'$, $(a^x)' = a^x\ln a$, $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\ (\ln|x|)' = \frac{1}{x};\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};\ (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

Các giới hạn

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *(với a > 1)*; $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *(với a > 1)*

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ *(với a > 1)*; $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$ *(với a > 1)*

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ *(với 0 < a < 1)*; $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *(với 0 < a < 1)*

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ *(với 0 < a < 1)*; $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$ *(với 0 < a < 1)*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1;\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Tính đơn điệu

Khi a > 1: hàm số $y = a^x$, $y = \log_a x$ đồng biến trên D.

Khi 0 < a < 1: Hàm số $y = a^x$, $y = \log_a x$ nghịch biến trên D.

Chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLNNN

Có thể dùng một bất đẳng thức hay phải phối hợp nhiều cách khác nhau để giải quyết bài toán.

- Phương pháp biến đổi tương đương: về một bất đẳng thức đúng, dạng tổng các bình phương, tổng các đại lượng không âm, tích các đại lượng có dấu xác định,....

- Phương pháp so sánh: Dùng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức để biến đổi so sánh hai vế của một bất đẳng thức, các bất đẳng thức trung gian, so sánh tử mẫu, so sánh theo cơ số hơn 1, thua 1, so sánh sai phân,...

- Phương pháp dùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Côsi) cho 2 số không âm; 3 số không âm:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. *Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ a = b.*

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. *Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ a = b = c.*

- Phương pháp dùng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối:

$|a+b| \le |a| + |b|$ *với mọi a, b. Dấu đẳng thức xảy ra* $\Leftrightarrow ab \ge 0$.

$|a-b| \le |a| + |b|$ *với mọi a, b. Dấu đẳng thức xảy ra* $\Leftrightarrow ab \le 0$.

- Phương pháp đạo hàm: Nếu y = f(x) có y' > 0 thì f(x) đồng biến:

$x > a \Rightarrow f(x) > f(a);\ x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$

Đối với y' < 0 thì ta có bất đẳng thức ngược lại.

Việc xét dấu y' đôi khi phải cần đến y '', y ''',... hoặc xét dấu bộ phận, chẳng hạn tử số của một phân số có mẫu dương,....

Nếu y'' > 0 thì y' đồng biến từ đó ta có đánh giá f '(x) rồi f(x),...

Lập bảng biến thiên từ đó có kết luận về GTLN, GTNN. Nếu cần thì đặt ẩn phụ t = g(x) với điều kiện đầy đủ của t.

Nếu y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta chỉ cần tìm các nghiệm x_i *của đạo hàm f '(0)= 0 rồi so sánh kết luận:*

$\min f(x) = \min \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(b) \}$

$\max f(x) = \max \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(b) \}$.

Chú ý: *Mũ hóa và logarit hóa.*

Bài toán 6.1: Chứng minh bất đẳng thức: $n^{n+1} > (n+1)^n$, với mọi $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$.

Giải

Với $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$, bất đẳng thức tương đương

$$(n+1)\ln n > n\ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ trên $(3; +\infty)$ thì $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$.

Do đó f đồng biến trên $(3; +\infty)$ nên:

$$n+1 > n > 3 \Rightarrow f(n+1) > f(n) \Rightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}: \text{đpcm.}$$

Bài toán 6.2: Cho 4 số $x, y, z, t \in (\frac{1}{4}; 1)$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\log_x\left(y-\frac{1}{4}\right)+\log_y\left(z-\frac{1}{4}\right)+\log_z\left(t-\frac{1}{4}\right)+\log_t\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge 8.$$

Giải

Ta có: $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a - \frac{1}{4} \le a^2$ với mọi a.

Và vì $\frac{1}{4} < x, y, z, t < 1$ nên hàm nghịch biến, do đó:

$VT \ge \log_x y^2 + \log_y z^2 + \log_z t^2 + \log_t x^2 = 2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x) \geq 2(2.\sqrt{\log_x y.\log_y z.} + 2\sqrt{\log_z t.\log_t x})$$

$$\geq 8.\sqrt[4]{\log_x y.\log_y z.\log_z t.\log_t x} = 8\sqrt[4]{1} = 8$$

Vậy: $\log_x\left(y-\frac{1}{4}\right)+\log_y\left(z-\frac{1}{4}\right)+\log_z\left(t-\frac{1}{4}\right)+\log_t\left(x-\frac{1}{4}\right)\geq 8$.

Bài toán 6.3: Chứng minh các bất đẳng thức sau với mọi $x > 0$:

a) $e^x > x + 1$ b) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì f liên tục trên $[0; +\infty)$

nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Xét $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1, x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - x - 1$.

Theo câu a) thì $f'(x) > 0$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

Bài toán 6.4: Chứng minh bất đẳng thức:

$4^{\sin x} + 2^{\tan x} > \sqrt{2^{3x+2}}$, với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $4^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{4^{\sin x}.2^{\tan x}} = \sqrt{2^{2\sin x+\tan x+2}}$

Ta cần chứng minh: $2^{2\sin x + \tan x + 2} > 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2\sin x + \tan x > 3x$

Xét $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 2\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3 > 0$$

nên f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm

Bài toán 6.5: Chứng minh bất đẳng thức: $e^x > \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ với mọi x.

Giải

Nếu $x \leq 0$ thì BĐT đúng.

Nếu $x > 0$, vì $x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x$ nên BĐT $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > \frac{x}{e^x}$.

Xét $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x > 0$, $f'(x) = 2x - 2$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\min f(x) = f(1) = 1$

Xét $g(x) = \frac{x}{e^x}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\max g(x) = g(x) = \frac{1}{e}$.

Vì $\min f(x) > \max g(x) \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 6.6: Chứng minh bất đẳng thức: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}$, với mọi x.

Giải

Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2}$, $D = \mathbf{R}$.

$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0, \forall x$ nên $f'(x)$ đồng biến trên **R**, ta có:

$f'(x) < f'(0) = 0, \forall x < 0$; $f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vậy $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2} \geq 0, \forall x$.

Bài toán 6.7: Chứng minh bất đẳng thức: $\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Giải

BĐT: $\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$

Xét $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$

và f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$: đpcm.

Bài toán 6.8: Chứng minh bất đẳng thức:

$e^x - e^{-x} \geq 2\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, với mọi $x \geq 0$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $D = [0; +\infty)$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} : f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

vì $e^x + e^{-x} > 2$ và $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} < 2$ nên $f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Do đó f(x) đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.9: Cho $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4$$

Giải

Do $x \neq y$, không giảm tổng quát, giả sử $y > x$.

Xét hàm số $f(t) = \ln\frac{t}{1-t} - 4t$, với $0 < t < 1$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t))} \geq 0 \text{ nên } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } (0;\ 1)$$

Vì $y > x$ nên ta có $f(y) > f(x)$ hay $\ln\frac{y}{1-y} - 4y > \ln\frac{x}{1-x} - 4x$

và do $y - x > 0$ nên suy ra $\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.10: Cho $a > b > 0$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Giải

Với $a > b > 0$, bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{4^a+1}{2^a}\right)^b \leq \left(\frac{4^b+1}{2^b}\right)^a \leq (4^a+1)^b \leq (4^b+1)^a$$

$$\Leftrightarrow b.\ln(4^a+1) \leq a.\ln(4^b+1) \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \ln\frac{(1+4^b)}{b}$$

Xét $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{4^x\ln 4}{1+4^x}.x - \ln(1+4^x)\right) = \frac{1}{x^2(1+4^x)}(4^x.\ln 4^x - (1+4^x).\ln(1+4^x)) < 0$$

nên f nghịch biến: $a > b > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$: đpcm

Bài toán 6.11: Cho các số nguyên n ($n \geq 2$) và hai số thực không âm x, y. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$.

Giải

Với x = 0 hoặc y = 0, bất đẳng thức đúng.

Với xy > 0, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

t	0		1		$+\infty$
f'(t)	0	+	0	-	
f(t)	1	↗		↘	1

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.12: Cho a, b > 0 và a + b = 1.

Chứng minh bất đẳng thức: $e^{ax+by} \leq a.e^x + b.e^y$, với mọi x, với mọi y.

Giải

Ta có a, b > 0 và a + b = 1 nên b = 1 - a do đó 0 < a < 1

BĐT: $e^{ax+(1-a)y} \leq a.e^x + (1-a)e^y$

$\Leftrightarrow e^y.e^{a(x-y)} \leq e^y + a(e^{x-y} - 1)$ $e^{a(x-y)} - a.e^{x-y} + a - 1 \leq 0$.

Xét $f(t) = e^{at} - a.e^t + a - 1$, $t \in \mathbf{R}$.

$f'(t) = a(e^{at} - e^t)$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

BBT

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗	0	↘	

Suy ra $f(t) \leq 0, \forall t \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.13: Cho $p > 1$, $q > 1$ thoả $p + q = pq$ và $a, b > 0$

Chứng minh bất đẳng thức: $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Giải

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$ với $a > 0$.

$$f'(a) = a^{p-1} - b,\ f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^{p-1} = b \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}}$$

Mà $p + q = pq \Rightarrow (p-1)(q-1) = 1$ nên $a = b^{q-1}$

Lập BBT thì $\min f = f(b^{q-1}) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.14: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $a^a.b^b.c^c \ge a^b.b^c.c^a$

b) $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a.b^b.c^c$

Giải

a) Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Xét $a \ge b \ge c$:

BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b}.\ b^{b-c} \ge c^{a-c}$

Vì $a \ge b \ge c > 0$ nên $a^{a-b}.\ b^{b-c} \ge c^{a-b}.\ b^{b-c} = c^{a-c}$

Xét $a \ge c \ge b$: BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b} \ge b^{c-b}.\ c^{a-c}$

Vì $a \ge c \ge b > 0$ nên $b^{c-b}.\ c^{a-c} \le a^{c-b}.a^{a-c} = a^{a-b}$

b) BĐT $\Leftrightarrow \log(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le \log(a^a.b^b.c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)\log(abc) \le 3(\log a^a + \log b^b + \log c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(\log a + \log b + \log c) \le 3(a\log a + b\log b + c\log c)$

$\Leftrightarrow (a-b)(\log a-\log b) + (b-c)(\log b-\log c) + (c-a)(\log c-\log a) \ge 0$.

BĐT này đúng vì cơ số $10 > 1$ nên $x \ge y > 0 \Rightarrow \log x \ge \log y$ hoặc $0 < x \le y$ $\Rightarrow \log x \le \log y$ nên $(x - y)(\log x - \log y) \ge 0,\ \forall x > 0,\ \forall y > 0$.

Bài toán 6.15: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

a) $a^b + b^a > 1$

b) $(a + b)^c + (b + c)^a + (c + a)^b > 2$.

Giải

a) Nếu $a \ge 1$ hoặc $b \ge 1$ thì $a^b + b^a > 1$

Nếu $0 < a, b < 1$. Xét $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(\frac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} - 1\right) < 0.$$

nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow (1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$ (*)

Áp dụng $a = \dfrac{1}{1+x}, x > 0 \Rightarrow a^b > \dfrac{1}{1+xb} = \dfrac{a}{a+b-ab}$.

Tương tự: $b^a > \dfrac{1}{1+ya} = \dfrac{b}{a+b-ab} \Rightarrow a^b + b^a > 1$.

b) Trong 3 số a + b, b + c, c + a nếu có một số, chẳng hạn

a + b ≥ 1 thì $(a+b)^c \geq 1$ và $(b+c)^a + (c+a)^b > b^a + a^b > 1$ suy ra đpcm.

Còn nếu cả 3 số đó bé hơn 1 thì dùng bất đẳng thức (*).

Bài toán 6.16: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x \text{ với mọi x.}$$

Dấu bằng khi nào ?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các cặp số dương:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.5^x$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x.\left(\frac{12}{5}\right)^x} = 2.4^x$$

Cộng lại 3 bất đẳng thức vế theo vế thì có

$$2\left(\frac{12}{5}\right)^x + 2\left(\frac{15}{4}\right)^x + 2\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2(3^x + 4^x + 5^x)$$

Rút gọn cho 2 thì có ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0$.

Bài toán 6.17: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x - e^{2x}$ nên đoạn [-1; 0] b) $f(x) = 3^{|x|}$ trên đoạn [-1; 1].

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 1 - 2e^{2x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\sqrt{2} \in (-1; 0)$.

$$f(-1) = -1-e^{-2},\ f(-\ln\sqrt{2}) = -\frac{1+\ln 2}{2},\ f(0) = -1.$$

So sánh thì $\max\limits_{x\in[-1;0]} f(x) = f(-\ln\sqrt{2}) = -\ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, $\min\limits_{x\in[-1;0]} f(x) = f(-1) = -1 - e^{-2}$

b) f(x) là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn [-1; 1].

Xét 0 ≤ x ≤ 1 thì $f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x.\ln 3 > 0$ nên f đồng biến trên [0; 1].

Vậy $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(0) = 1$; $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(\pm 1) = 3$.

Bài toán 6.18: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x - \ln x + 3$ trên khoảng $(0; +\infty)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3; 6]$.

Giải

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập BBT thì $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 4$, không có giá trị lớn nhất.

b) Ta có $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x - 2}$ nên

$f'(x) > 0, \forall x \in [3; 6]$ do đó trên đoạn $[3; 6]$ hàm số $f(x)$ đồng biến.

Vậy $\min\limits_{x\in[3,6]} f(x) = f(3) = \ln 10$; $\max\limits_{x\in[3,6]} f(6) = \ln 40$.

Bài toán 6.19: Tìm GTLN, GTNN của $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$.

Giải

Đặt $t = 4^{\sin^2 x}$, $1 \le t \le 4$ thì $y = f(t) = t + \frac{4}{t}$, $f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$. Chọn $t = 2$.

Ta có $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(4) = 5$

Vậy max $y = 5$ khi $\sin^2 x = 0$ hoặc $\sin^2 x = 1$, min $y = 4$ khi $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 6.20: Tìm GTLN, GTNN của $y = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$.

Giải

Đặt $t = |\sin x|$, $0 \le t \le 1$, thì $y = f(t) = 2^t + 2^{\sqrt{1-t^2}}$, $0 \le t \le 1$.

$$f'(t) = 2^t.\ln 2 + 2^{\sqrt{1-t^2}}.\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}.\ln 2 = t.\ln 2\left(\frac{2^t}{t} - \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

Xét $g(u) = \frac{2^u}{u}$, $0 < u < 1$ thì $g'(u) = 2^u.\frac{u\ln 2 - 1}{u^2}$

Vì $0 < u < 1$, $0 < \ln 2 < 1$ nên $g'(u) < 0, \forall u \in (0; 1)$

Do đó $g(u)$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Nên: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2^t}{t} = \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có $f(0) = 3$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $f(1) = 3$. Vậy max $y = 2.2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, min $y = 3$.

BÀI TẬP

Bài tập 6.1: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\log_6 7 > \log_7 6$ b) $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$

HD-ĐS

a) Dùng bất đẳng thức Côsi b) Xét hàm với biến t = $\log_2 3$.

Bài tập 6.2: Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{\lg a + \lg b}{2} \le \lg \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b > 0$

HD-ĐS

Dùng bất đẳng thức Côsi

Bài tập 6.3: Cho x, y, z là ba số thoả mãn x + y + z = 0.

Chứng minh: $\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \ge 6$.

HD-ĐS

Dùng bất đẳng thức Côsi

Bài tập 6.4: Chứng minh: $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x \ge 3x^2 - 2x^3, \forall x > 0$

HD-ĐS

Dùng đạo hàm

Bài tập 6.5: Chứng minh $\frac{3\ln x}{x^3 - 1} < \frac{x+1}{x^3 + x}, \forall x > 0, x \ne 1$

HD-ĐS

Đưa về hàm phân thức riêng biệt, hàm lôgarit một bên.

Bài tập 6.6: Chứng minh bất đẳng thức $3^x > x + 1, \ \forall x > 0$.

HD-ĐS

Dùng đạo hàm và lập BBT

Bài tập 6.7: Chứng minh bất đẳng thức với n nguyên dương

$$x^n.\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}, \ \forall x \in (0,1)$$

HD-ĐS

Lấy lôgarit Nêpe 2 vế.

Bài tập 6.8: Tìm GTNN, GTLN của hàm số:

a) $y = 3^{1+2\cos x}$ b) $y = 5^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x}$

HD-ĐS

a) 1/3 và 27 b) $2\sqrt{5}$ và 6

Bài tập 6.9: Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

a) $y = \ln x - \sqrt{x}$ b) $y = \lg^2 x + \dfrac{1}{\lg^2 x + 2}$

HD-ĐS

a) Tính đạo hàm và lập BBT b) x > 0, đặt t = lgx, t ∈ **R**.

Bài tập 6.10: Cho tam giác ABC, tìm GTNN của

$$Q = (tg\frac{A}{2})^{2\sqrt{2}} + (tg\frac{B}{2})^{2\sqrt{2}} + (tg\frac{C}{2})^{2\sqrt{2}}.$$

HD-ĐS

Xét hàm $f(x) = (\tan x)^{2\sqrt{2}}$; $\min = 3(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2\sqrt{2}}$

§7 PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương pháp chung

- Đưa về cùng một cơ số

- Đặt ẩn phụ

- Lôgarit hoá, mũ hoá

- Sử dụng tính chất của hàm số

Giải phương trình mũ

- Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ (a > 0, a ≠ 1)

Nếu b ≤ 0, phương trình vô nghiệm

Nếu b > 0, phương trình có nghiệm duy nhất x = $\log_a b$.

- Phương trình $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *(a > 0)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a \neq 1,\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

Chú ý:

1) Ngoài 4 phương pháp chính để giải phương trình mũ, ta có thể dùng định nghĩa, biến đổi thành phương trình tích số, dùng đồ thị, bất đẳng thức,...

2) Biến đổi luỹ thừa và mũ:

Với các số a > 0, b > 0, α và β tuỳ ý, ta có:

$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(a.b)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$; $(a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$

3) Đạo hàm trong điều kiện xác định:

$(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u.u'$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};(\ln|x|)' = \frac{1}{x};(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};\ (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

Bài toán 7.1: Giải các phương trình sau:

a) $2^{x^2-3x+2} = 4$ b) $(2+\sqrt{3})^{2x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Giải

a) PT: $2^{x^2-3x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 0$ hoặc $x = 3$.

b) PT: $(2+\sqrt{3})^{2x} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{1}{2}$.

Bài toán 7.2: Giải các phương trình sau:

a) $2^{x+1}.5^x = 200$ b) $0{,}125.4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$

Giải

a) PT: $2.10^x = 200 \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2$.

b) PT: $2^{-3}.2^{4x-6} = 2^{\frac{5x}{2}} \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}}$

$$\Leftrightarrow 4x - 9 = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 8x - 18 = 5x \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 6$.

Bài toán 7.3: Giải các phương trình sau:

a) $(1{,}5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ b) $7^{x-1} = 2^x$.

Giải

a) PT: $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow 5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1$.

b) PT: $7^x = 2^x.7 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{7}{2}} 7$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_{\frac{7}{2}} 7$.

Bài toán 7.4: Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$ b) $7^{\log x} - 5^{\log x+1} = 3.\ 5^{\log x-1} - 13.7^{\log x-1}$.

Giải

a) PT: $9^x + \frac{1}{3}.9^x = 2^{x+\frac{1}{2}} + 2.2^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{4}{3}.9^x = 3.2^{x+\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \log_{\frac{9}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1 - \frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$.

b) PT: $7^{\log x} + 13 7^{\log x}.\frac{1}{7} = 5^{\log x}.5 + 3.5^{\log x}.\frac{1}{5} \Leftrightarrow 7^{\log x}\left(1 + \frac{13}{7}\right) = 5^{\log x}\left(5 + \frac{3}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 7^{\log x}\left(\frac{20}{7}\right) = 5^{\log x}\left(\frac{28}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{\log x} = \frac{28}{5}.\frac{7}{20} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$ logx = 2 $\Leftrightarrow$ x = 100.

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 100.

Bài toán 7.5: Giải các phương trình sau:

a) $4^x - 2^x - 6 = 0$ b) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$

Giải

a) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ thì PT: $t^2 - t - 6 = 0$

Chọn nghiệm $t = 3 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_2 3$.

b) Đặt $t = 3^x$, $t > 0$ thì PT:

$3t + \frac{18}{t} = 29 \Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 9$ hoặc $t = \frac{2}{3}$

Giải ra nghiệm x = 2 hoặc $x = \log_3 2 - 1$.

Bài toán 7.6: Giải các phương trình sau:

a) $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$ b) $27^x + 12^x = 2.8^x$.

Giải

a) Đặt $t = e^x$, $t > 0$ thì PT:

$t^2 - 3t - 4 + \frac{12}{t} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 2)(t - 3) = 0$.

Chọn nghiệm t = 2 hoặc t = 3 nên x = ln2 hoặc x = ln3.

Vậy phương trình có nghiệm là: x = ln2 hoặc x = ln3.

b) Chia 2 vế cho $8^x > 0$ thì PT: $\left(\frac{27}{8}\right)^x + \left(\frac{12}{8}\right)^x = 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, $t > 0$.

PT: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 0$.

Bài toán 7.7: Giải các phương trình:

a) $2.25^x + 5.4^x = 7.10^x$ b) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

Giải

a) PT: $5\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7\left(\frac{2}{5}\right)^{x} + 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$, $t > 0$

PT: $5t^2 - 7t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{2}{5}$ (thoả mãn)

Suy nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.

b) Điều kiện $x \neq 0$, đặt $y = -\frac{1}{x}$ và chia hai vế cho 4^y, ta có:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2y} - \left(\frac{3}{2}\right)^{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow y = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}$.

Bài toán 7.8: Giải các phương trình:

a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} = 4$ b) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$, đặt $t = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}$, $t > 0$.

PT: $t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2 + \sqrt{3}$ hoặc $t = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2$ hoặc $x = -2$.

b) Đặt $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$, $t > 0$ thì PT: $t^2 - \frac{5}{2}t = 6 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 12 = 0$.

Chọn nghiệm $t = 4$.

nên $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} = 2 - x \Leftrightarrow 2 - x \ge 0$ và $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$

$$\Leftrightarrow x \le 2 \text{ và } x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{2}{3}$.

Bài toán 7.9: Giải các phương trình:

a) $x^{\frac{1}{3}} + (x-2)^{\frac{1}{6}} = 0$ b) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x (0,125)^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Với $x > 2$ thì VT > 0 nên PT vô nghiệm.

b) ĐK: $x \ne 0$, PT: $2^{\frac{x}{2}}\left[2^{2x}(2^{-3})^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}\left(2^{2x-\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{3}}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{7}{3}$.

$\Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ hoặc $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{1}{5}$ hoặc $x = 3$.

Bài toán 7.10: Giải các phương trình:

a) $\sqrt[4]{16 - x} + \sqrt[4]{x + 1} = 3$ b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$.

Giải

a) ĐK: $-1 \le x \le 16$. Đặt $u = \sqrt[4]{16 - x}$, $v = \sqrt[4]{x+1}$ thì $u, v \ge 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + v^4 = 17 \end{cases}$.

Đặt $S = u + v$, $P = uv$ thì $u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = ((u + v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2$

$17 = (9 - 2P)^2 - 2P^2 = 2P^2 - 36P + 81$.

Do đó $P = 2$ hoặc $P = 16$. Vì $S^2 - 4P \ge 0$ nên chọn $P = 2$

suy ra $S = 3$ nên nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 15$.

b) ĐK: $x \le -1$ hoặc $x \ge 1$.

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm nên điều kiện: $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Ta có x là nghiệm thì -x cũng là nghiệm PT, do đó xét $x > 1$.

PT: $\sqrt[6]{(x+1)^2} - \sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[6]{x^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = 1$

Đặt $t = \sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $t > 0$ thì PT: $t - \dfrac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0$

Chọn nghiệm $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ suy ra nghiệm của PT cho là:

$$x = \pm\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^6 \text{ với } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 7.11: Giải các phương trình sau:

a) $3^{4^x} = 4^{3^x}$

b) $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$.

Giải

a) Hai vế đều dương, lôgarit hoá theo cơ số 10:

$$4^x\log 3 = 3^x\log 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\log 4}{\log 3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4).$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)$.

b) PT: $3^x.\ 2^{\frac{3x}{x+1}} = 3^2.\ 2^2 \Leftrightarrow 3^{x-2}.2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$

$$\Leftrightarrow \left(3.2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 3.2^{\frac{1}{x+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } 2^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1 - \log_3 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2$ hoặc $x = -1 - \log_3 2$.

Bài toán 7.12: Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-1} = \dfrac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$.

Giải

a) Hai vế đều dương, lôgarit hoá hai vế theo cơ số 2:

$$\log_2\left(3^{x-1}.2^{x^2}\right) = \log_2(8.4^{x-2}) \Leftrightarrow (x - 1)\log_2 3 + x^2 = \log_2 8 + (x - 2)\log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2 - \log_2 3)x + 1 - \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 1 - \log_2 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1$ hoặc $x = 1 - \log_2 3$.

b) Hai vế đều dương, lôgarit hoá hai vế theo cơ số 5:

$$(x - 1)\log_5\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\log_5\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3x-4}{4} - \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x(\log_5 3 - 1) - \log_5 3 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_5 3 = \frac{3}{4}x - 1 - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{4\log_5 3 - 7}{4}\right) = \frac{-4 + \log_5 3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2(\log_5 3 - 4)}{4\log_5 3 - 7}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{2(\log_5 3 - 4)}{4\log_5 3 - 7}$.

Bài toán 7.13: Giải các phương trình:

a) $(\sin\frac{\pi}{5})^x + (\cos\frac{\pi}{5})^x = 1$ b) $4^x - 3^x = 1$.

Giải

a) Vì $0 < \sin\frac{\pi}{5} < 1$ và $0 < \cos\frac{\pi}{5} < 1$ do đó:

Nếu x > 2 thì ta có $(\sin\frac{\pi}{5})^x < (\sin\frac{\pi}{5})^2$ và $(\cos\frac{\pi}{5})^x < (\sin\frac{\pi}{5})^2 \Rightarrow$ VT < 1 (loại).

Nếu x < 2 thì ta có $(\sin\frac{\pi}{5})^x > (\sin\frac{\pi}{5})^2$ và $(\cos\frac{\pi}{5})^x > (\sin\frac{\pi}{5})^2 \Rightarrow$ VT > 1 (loại).

Nếu x = 2 thì PT nghiệm đúng, đó là nghiệm duy nhất

b) PT: $(\frac{1}{4})^x + (\frac{3}{4})^x = 1$ và ta có x = 2 thoả mãn PT. Vì vế trái là hàm số nghịch biến trên **R** nên có nghiệm duy nhất x = 2.

Bài toán 7.14: Giải các phương trình:

a) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7-\sqrt{15}}\right)^x = 13$ b) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4^x$

Giải

a) Ta có x = 3 là nghiệm của phương trình, vì hàm số

$f(x) = \left(\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7-\sqrt{15}}\right)^x$ là tổng của hai hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên f(x) đồng biến trên **R**.

Vậy x = 3 là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Ta có x = 1 là nghiệm của phương trình.

Biến đổi PT: $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x = 1$ thì vế trái là hàm f(x) nghịch biến.

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 7.15: Giải các phương trình:

a) $(4-\sqrt{15})^{\tan x}+(4+\sqrt{15})^{\tan x}=8$ b) $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

Giải

a) Vì $(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1$ nên đặt $(4-\sqrt{15})^{\tan x}=t$, $t>0$ thì phương trình:

$$t+\frac{1}{t}=8 \Leftrightarrow t^2-8t+1=0 \Leftrightarrow t=4\pm\sqrt{15}.$$

Do đó $\tan x=-1$ hoặc $\tan x=1$ nên $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) Đặt $t=81^{\sin^2 x}$, $1\le t\le 81$ thì PT:

$$81^{\sin^2 x}+81^{1-\sin^2 x}=30 \Leftrightarrow t+\frac{81}{t}=30$$

$\Leftrightarrow t^2-30t+81=0 \Leftrightarrow t=27$ hoặc $t=3$ (chọn)

Do đó $3^{4\sin^2 x}=27$ hoặc $3^{4\sin^2 x}=3 \Leftrightarrow 4\sin^2 x=3$ hoặc $4\sin^2 x=1$.

$\Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\sin x=\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Bài toán 7.16: Giải các phương trình:

a) $(\cos 72^0)^x+(\cos 36^0)^x=3.2^{-x}$ b) $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\tan x$.

Giải

a) Phương trình: $(2\cos 72^0)^x+(2\cos 36^0)^x=3$

Vì: $2\cos 72^0.\ 2\cos 36^0=1$

Đặt $t=(2\cos 72^0)^x$, $t>0$ thì PT: $t+\frac{1}{t}=3$

$$\Leftrightarrow t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\right)^2$$

Ta có: $2\cos 72^0=2\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ suy ra $x=\pm 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pm 2$.

b) Điều kiện cosx ≠ 0, vì sinx = 0 không thoả mãn phương trình nên PT:

$$e^{\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{2}}=\frac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{\sqrt{2}\sin x}{2}}}{\sin x}=\frac{e^{\frac{\sqrt{2}\cos x}{2}}}{\cos x}$$

Đặt u = sinx, v = cosx, u, v ∈ (-1; 1), u.v > 0

nên ta có phương trình $\frac{e^{\frac{\sqrt{2}u}{2}}}{u}=\frac{e^{\frac{\sqrt{2}v}{2}}}{v}$

Xét hàm số $y=f(t)=\frac{e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{t}$, với $t\in(-1;0)\cup(0;1)$

$$y'=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}-1\right)e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{t^2}=\frac{(\sqrt{2}t-2)e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{2t^2}<0$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng (-1; 0) và (0; 1).

Vì u, v cùng dấu nên u, v cùng thuộc một khoảng (-1; 0) hoặc (0; 1) do đó PT:

$$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ (chọn).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

Bài toán 7.17: Giải các phương trình:

a) $(\frac{1}{3})^x=x+4$ b) $2^x=x+1$.

Giải

a) Vì $0<\frac{1}{3}<1$ nên khi x > -1 thì VT < 3, VP > 3 (loại),

khi x < -1 thì VT > 3, VP < 3 (loại), còn khi x = -1 thì PT nghiệm đúng.

Vậy nghiệm duy nhất là x = -1.

b) PT = $2^x - x - 1 = 0$

Xét $f(x)=2^x-x-1$, D = **R**. Ta có:

$f'(x)=2^x.\ln 2-1$, $f''(x)=2^x.\ln^2x>0,\ \forall x$

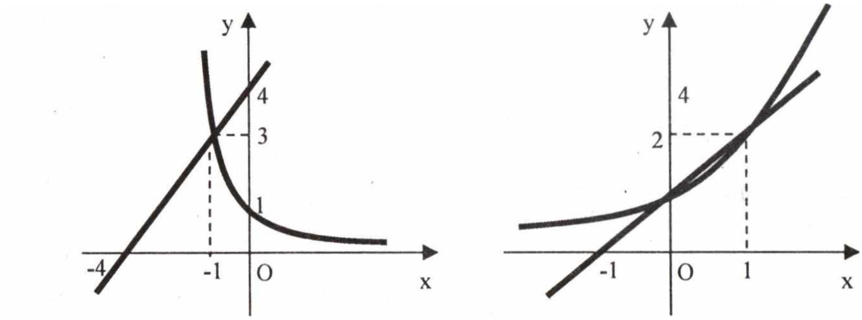
Do đó f '(x) đồng biến trên **R**, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\log_2(\ln 2)$

BBT

x	$-\infty$ $-\log_2(\ln 2)$ $+\infty$
f '	- 0 +
f	$+\infty$ ↘ ↗ $+\infty$

Vậy f(x) = 0 có tối đa 2 nghiệm mà f(0) = f(1) = 0 nên tập nghiệm là S = {0; 1}.

Minh hoạ bằng đồ thị câu a) và câu b)



Bài toán 7.18: Giải các phương trình:

a) $6^x + 15 = 3^{x+1} + 5.2^x$ b) $x.2^x = x(3 - x) + 2(2^x - 1)$.

Giải

a) PT: $6^x - 3.3^x + 15 - 5.2^x = 0 \Leftrightarrow (2^x - 3)(3^x - 5) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 3$ hoặc $3^x = 5$.

$\Leftrightarrow x = \log_2 3$ hoặc $x = \log_3 5$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_2 3$ hoặc $x = \log_3 5$.

b) PT: $x.2^x - x(3 - x) - 2.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x(x - 2) + x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x(x - 2) + (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2^x + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ hoặc $2^x + x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 0$.

(Vì $f(x) = 2^x + x$ đồng biến trên **R** và f(0) = 1).

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 0 hoặc x = 2.

Bài toán 7.19: Giải các phương trình:

a) $2^{x+1} - 4^x = x - 1$ b) $4^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x} = 2x$.

Giải

a) PT: $2^{x+1} + (x + 1) = 2^{2x} + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, $t \in$ **R** thì $f'(t) = 2^t.\ln 2 + 1$

Vì $f'(t) > 0$, $\forall t$ nên f đồng biến trên **R**.

PT $f(x + 1) = f(2x) \Leftrightarrow x + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 1.

b) ĐK: x > 0, đặt $t = \log_3 x \Rightarrow x = 3^t$. PT: $4^t + 2^t = 2.3^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t = 2$

Vì $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t$ ta có $f''(t) > 0$ và f(0) = f(1) = 2 nên chỉ có 2 nghiệm t = 0 hoặc $t = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc x = 3.

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 1 hoặc x = 3.

Bài toán 7.20: Giải các phương trình:

a) $3^{\sqrt{\cos x}} - 2^{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{\cos x}$ b) $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1}$.

Giải

a) Đặt $t = \sqrt{\cos x}$, $0 \le t \le 1$ thì PT: $3^t - 2^t = t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{t}{3^t} = 1$.

Xét $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{t}{3^t}$, $-1 \le t \le 1$ thì $f'(t) = \dfrac{2^t.\ln\frac{2}{3} + 1 - t.\ln 3}{3^t}$.

Xét $g(t) = 2^t.\ln\frac{2}{3} + 1 - t\ln 3$ với $0 \le t \le 1$

$g'(t) = 2^t.\ln 2.\ln\frac{2}{3} - \ln 3 < 0$ nên $f'(t)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

Lập BBT thì $f(t) = 1$ có tối đa 2 nghiệm mà $f(0) = f(1) = 1$ nên PT tương đương $t = 0$ hoặc $t = 1$.

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) ĐK: $2^x \ne k\frac{\pi}{4}$. Đặt $t = \tan 2^x$

PT: $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{t} = t + \frac{4t}{1-t^2}$

$\Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2 \Leftrightarrow t = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$.

Vậy $\tan 2^x = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$, từ đó suy ra nghiệm x.

Bài toán 7.21: Giải phương trình: $2^{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2}\left(2^{\sqrt{3x+1}+1} + \sqrt{2x-1}\right)$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 3x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Phương trình trở thành

$$2^{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{1}{2}(x+1) = 2^{\sqrt{3x+1}+1} + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{1}{2}(x+1-2\sqrt{2x-1}) = 2^{\sqrt{3x+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{1}{2}(3x+1-2x-2\sqrt{2x-1}) = 2^{\sqrt{3x+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{1}{2}(\sqrt{3x+1})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2 = 2^{\sqrt{3x+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2x-1}+2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2 = 2^{\sqrt{3x+1}+1} - \frac{1}{2}(\sqrt{3x+1})^2$$

Ta có $\sqrt{2x-1}+1, \sqrt{3x+1} \geq 1$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t+1} - \frac{1}{2}t^2$, với $t \in [1; +\infty)$

$$f'(t) = 2^{t+1}\ln 2 - t;\ f''(t) = 2^{t+1}(\ln 2)^2 - 1$$

Vì $t \geq 1$ nên $f''(t) \geq (2\ln 2)^2 - 1 > 0$

Suy ra $f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$

Nên $f'(t) \geq f'(1) = 4\ln 2 - 1 > 0, \forall t \geq 1$.

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$

Phương trình $f(\sqrt{2x-1}+1) = f(\sqrt{3x+1})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{2x-1} = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4(2x-1) = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1, x = 5$.

Bài toán 7.22: Giải phương trình:

$$5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} - 4x^3 + 2x^2 - x + 16.$$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = 5^x + 4^x + 3^x + 2^x - \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x}\right) + 4x^3 - 2x^2 + x - 16, x \in \mathbf{R}$

Ta có:

$$f'(x) = 5^x\ln 5 + 4^x\ln 4 + 3^x\ln 3 + 2^x\ln 2 + \left(\frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{3^x} + \frac{\ln 6}{6^x}\right) + 12x^2 - 4x + 1 > 0$$

Suy ra hàm số đồng biến và phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm và $f(1) = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài toán 7.23: Giải phương trình: $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$(2^{2x} - 2.2^x + 1) + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) + \cos^2(2^x + y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow [2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1)]^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \sin(2^x + y - 1) = 1 \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 \end{cases}$$

Vì $\cos(2^x + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$.

Ta có hai trường hợp sau:

- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = 1$ thì $2^x = 0$, vô nghiệm

- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = -1$ thì $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Suy ra $\sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2} - 1 + k2\pi$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 1$, $y = -\frac{\pi}{2} - 1 + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 7.24: Giải phương trình: $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| = 3^{x+1}$.

Giải

Phương trình đã cho xác định với mọi x.

Xét $x < 0$. Khi đó ta có $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| > 3 > 3^{x+1}$ nên phương trình đã cho không có nghiệm trong khoảng $(-\infty;0)$

Xét $x \geq 0$. Phương trình trở thành

$$3^{\sqrt{x^2+1}} + 2x = 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2+1}} - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = 3^{x+1} - (x+1)^2$$

Ta có $\sqrt{x^2+1}$, $x + 1 \geq 1$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - t^2$, với $t \in [1; +\infty)$

$$f'(t) = 3^t \ln 3 - 2t,\ f''(t) = 3^t (\ln 3)^2 - 2$$

Vì $3^t(\ln 3)^2 - 2 \geq 3(\ln 3)^2 - 2 > 0, \forall t \geq 1$, nên $f''(t) > 0, \forall t \geq 1$

Suy ra $f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$

Do đó $f'(t) \geq f'(1) = 3\ln 3 - 2 > 0, \forall t \geq 1$.

nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$

Phương trình: $f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = f(x + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 7.25: Giải phương trình: $\sqrt{5^x - 2x} - \sqrt{2x+1} + 4x.5^x + 4x + 1 = 5^{2x}$.

Giải

Điều kiện $5^x \geq 2x$, $x \geq -\frac{1}{2}$

Đặt $a = \sqrt{5^x - 2x}$, $b = \sqrt{2x+1}$, $a, b \geq 0$.

Ta có: $a^2 = 5^x - 2x$, $b^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5^x - 4x - 1$; $a^2 + b^2 = 5^x + 1$

Do đó $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (5^x + 1)(5^x - 4x - 1) = 5^{2x} - 4x.5^x - 4x - 1$

Phương trình đã cho: $a - b = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \Leftrightarrow (a - b)(1 - (a^2 + b^2)(a + b)) = 0$

- Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì $5^x - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow 5^x = 4x + 1$

Xét $f(x) = 5^x - 4x - 1$, D= **R**

$f'(x) = 5^x.\ln 5 - 4$, $f''(x) = 5^x.\ln^2 5 > 0$

Do đó phương trình có tối đa 2 nghiệm mà $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x = 0$, $x = 1$.

- Nếu $(a^2 + b^2)(a + b) = 1 \Leftrightarrow (5^x + 1)(\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x+1}) = 1$

Vì $\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x+1} \geq \sqrt{(5^x - 2x) + (2x+1)} = \sqrt{5^x + 1}$ và $5^x + 1 > 1$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$, $x = 1$.

BÀI TẬP

Bài tập 7.1: Giải phương trình:

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x^2} = \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+x)}$ b) $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

HD-ĐS

a) $x = -1$, $x = 5$ b) $x = \pm 1$.

Bài tập 7.2: Giải phương trình:

a) $9^x = 5^x + 4^x + 2(\sqrt{20})^x$ b) $3^x.\ 2^{\frac{x+1}{x-1}} = 72$.

HD-ĐS

a) $x = 2$ b) Dùng lôgarit hoá. $x = 2$ và $x = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{\lg 3}$.

Bài tập 7.3: Giải phương trình:

a) $7^{3x} + 9.5^{2x} = 5^{2x} + 9.7^{3x}$ b) $9^{x^2-1} - 36.3^{x^2-3} + 3 = 0$

HD-ĐS

a) $x = 0$. b) $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{2}$.

Bài tập 7.4: Giải phương trình:

a) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$ b) $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

HD-ĐS

a) x = 1 b) x = 0 hoặc x = 1.

Bài tập 7.5: Giải phương trình:

a) $e^{x^2} = \cos x$ b) $16^{x-3} + (x - 6)4^{x-3} + 8 - 2x = 0$.

HD-ĐS

a) x = 0 b) đưa về bâc hai theo $t = 4^{x-3}$, $x = \frac{7}{2}$, x = 3.

Bài tập 7.6: Giải phương trình:

a) $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$ b) $|x-3|^{x^2-x} = 9 - 6x + x^2$.

HD-ĐS

a) Nghiệm duy nhất x =2. b) x = -1, x = 2, x = 4.

Bài tập 7.7: Giải phương trình:

a) $5^{2x} = 3^{2x} + 2.5^x + 2.3^x$ b) $(2+\sqrt{2})^x + (2(2-\sqrt{2}))^x = 1 + 4^x$

HD-ĐS

a) Biến đổi tích số. b) Chia 2 vế cho 4^x.

Bài tập 7.8: Giải phương trình:

a) $x^2 - (3 - 2^x)x + 2(1 - 2^x) = 0$. b) $3^x + 2^x = 3x + 2$.

HD-ĐS

a) PT $\Leftrightarrow$ $(x - 1 + 2^x)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2^x + x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x - 1$ trên **R.** x = 0, x = 2.

b) x = 0, x = 1.

Bài tập 7.9: Giải phương trình: $\frac{2(1+2^{5x})}{1+2^x} + \frac{2^{3x+1}}{1+2^{2x}} = 2^x(1+2^x+2^{2x})$.

HD-ĐS

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{(2^x)^2}{4^x+8^x} + \frac{(4^x)^2}{2^x+8^x} + \frac{(8^x)^2}{2^x+4^x} = \frac{2^x+4^x+8^x}{2}$$

Dùng bất đẳng thức: $\frac{(2^x)^2}{4^x+8^x} + \frac{4^x+8^x}{4} \geq 2^x$;

Dấu = khi $\frac{(2^x)^2}{4^x+8^x} = \frac{4^x+8^x}{4}$. Nghiệm duy nhất x = 0.

8 PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương pháp chung

- Đưa về cùng một cơ số

- Đặt ẩn phụ

- Lôgarit hoá, mũ hoá

- Sử dụng tính chất của hàm số.

Giải phương trình lôgarit

- Phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

- Phương trình lôgarit $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a>0, a\neq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ hay } g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Chú ý:

1) Ngoài 4 phương pháp chính để giải phương trình mũ, lôgrarit, ta có thể dùng định nghĩa, biến đổi thành phương trình tích số, dùng đồ thị, bất đẳng thức,...

2) *Biến đổi lôgarit: Trong điều kiện xác định thì:*

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a\left(\dfrac{1}{c}\right) = -\log_a c$

$\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$ *(với mọi* α*),* $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ $(n \in N^*)$

3) Đổi cơ số: Trong điều kiện xác định:

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b.\log_b x = \log_a x$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b.\log_b a = 1$; $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

Bài toán 8.1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2[x(x - 1)] = 1$ b) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$.

Giải

a) Điều kiện: $x(x - 1) > 0$.

PT: $\log_2[x(x - 1)] = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -1$ hoặc $x = 2$.

b) Điều kiện $x < 4$.

PT: $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)} \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ hoặc $2^x = 8$. Chọn nghiệm $x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 0$.

Bài toán 8.2: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{5-4\log x} + \dfrac{1}{1+\log x} = 3$ b) $5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2\sqrt{x^2}$.

Giải

a) Với $x > 0$, đặt $t = \log x$ thì PT:

$$\frac{1}{5-4\log x} + \frac{1}{1+\log x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3,\ t \neq \frac{5}{4}, t \neq -1$$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \dfrac{1}{2}$ (chọn).

Suy ra nghiệm $x = 10$ hoặc $x = \sqrt{10}$.

b) ĐK: $x < 0$, PT: $5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow 5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2(-x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2(-x)}.(5 - \sqrt{\log_2(-x)}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2(-x)} = 0$ hoặc $\sqrt{\log_2(-x)} = 5 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2^{25}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -1$ hoặc $x = -2^{25}$.

Bài toán 8.3: Giải các phương trình:

a) $\log_2 x + \log_2(x - 1) = 1$ b) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$.

Giải

a) ĐK: $x > 1$, PT $\Leftrightarrow \log_2 x(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Chọn nghiệm $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2$.

b) ĐK: $x > 0$, PT: $(1 + \log_3 2 + \log_4 2).\log_2 x = 1$

$\Leftrightarrow (3 + \log_3 2)\log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \dfrac{1}{3+\log_3 2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}}$.

Bài toán 8.4: Giải các phương trình:

a) $\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3) = 12$ b) $\log_{x-1}4 = 1 + \log_2(x - 1)$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$: PT: $\log_3(3^x - 1)[1 + \log_3(3^x - 1)] = 12$

Đặt $t = \log_3(3^x - t)$ thì PT: $t(1 + t) = 12$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = -4$ hoặc $t = 3$.

$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) = -4$ hoặc $\log_3(3^x - 1) = 3 \Leftrightarrow 3^x - 1 = \dfrac{1}{81}$ hoặc $3^x - 1 = 27$

$\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{82}{81}$ hoặc $3^x = 28 \Leftrightarrow x = \log_3 82 - 4$ hoặc $x = \log_3 28$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \log_3 82 - 4$ hoặc $x = \log_3 28$.

b) ĐK: $x > 1, x \neq 2$, PT: $\dfrac{2}{\log_2(x-1)} = 1 + \log_2(x - 1)$

Đặt $t = \log_2(x - 1)$ thì PT: $\dfrac{2}{t} = 1 + t \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -2$. Giải ra nghiệm $x = \dfrac{5}{3}$ hoặc $x = 3$.

Bài toán 8.5: Giải các phương trình:

a) $2^{\log_3 x^2}.5^{\log_3 x} = 400$ b) $4^{\ln x+1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2+2} = 0$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$, phương trình: $4^{\log_3 x}.5^{\log_3 x} = 400$

$\Leftrightarrow 20^{\log_3 x} = 20^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 9$.

b) ĐK: $x > 0$, PT: $4.2^{2\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} = 0$

Chia cả hai vế cho $3^{2\ln x}$, đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\ln x}$ thì được PT:

$4t^2 - t - 18 = 0$. Chọn nghiệm $t = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = e^{-2}$.

Bài toán 8.6: Giải các phương trình:

a) $x^{\log 4} + 4^{\log x} = 32$ b) $3^{\log_4 x+\frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, ta có: $x^{\log 4} = 4^{\log_4 x^{\log 4}} = 4^{\log 4.\log_4 x} = 4^{\log x}$

nên PT: $2.4^{\log x} = 32 \Leftrightarrow 4^{\log x} = 16 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 100$.

b) ĐK: $x > 0$, đặt $t = \log_4 x$ thì $x = 4^t$

PT: $\sqrt{3}\,.\,3^t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\,3^t = 2^t \Leftrightarrow 4.3^t = \sqrt{3}\,.\,2^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = 4^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 4^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

Bài toán 8.7: Giải các phương trình:

a) $\log_4[(x + 2)(x + 3)] + \frac{1}{2}\log_2\frac{x-2}{x+3} = 2$

b) $\log_4(x + 12).\log_x 2 = 1$.

Giải

a) ĐK: $\begin{cases}(x+2)(x+3) > 0\\ \dfrac{x-2}{x+3} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < -3\\ x > 2\end{array}\right.$

PT: $\log_4\left[(x+2)(x+3)\frac{x-2}{x+3}\right] = \log_4 16 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 16$.

$\Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pm 2\sqrt{5}$.

b) ĐK: $x > 0, x \neq 1$, PT: $\frac{1}{2}\log_2(x + 12)\ \frac{1}{\log_2 x} = 1$.

$\Leftrightarrow \log_2(x + 12) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow x + 12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.

Chọn nghiệm $x = 4$.

Bài toán 8.8: Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{6}\log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$ b) $\frac{\log_3 x}{\log_9 3x} = \frac{\log_{27} 9x}{\log_{81} 27x}$.

Giải

a) ĐK: $x > 2$, phương trình trở thành:

$\frac{1}{6}\log_2(x - 2) + \frac{1}{6}\log_2(3x - 5) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2(x - 2)(3x - 5) = 2$

$\Leftrightarrow (x - 2)(3x - 5) = 4 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = \frac{2}{3}$. Chọn nghiệm $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm là

b) ĐK: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{27}$, đặt $t = \log_3 x$ thì PT:

$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)} \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -4$.

Suy ra nghiệm x = 3 hoặc $x = \frac{1}{81}$.

Bài toán 8.9: Giải các phương trình:

a) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$ b) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

Giải

a) ĐK: x > 0, ta có $\log_2 \frac{x^2}{8} = \log_2 x^2 - \log_2 8 = 2\log_2 x - 3$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 = (-2 - \log_2 x)^2 = (2 + \log_2 x)^2$$

Đặt t = $\log_2 x$ thì PT: $(2 + t)^2 + 2t - 3 = 8 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc t = -7.

Suy ra nghiệm $x = 2^{-7}$ hoặc x = 2.

b) ĐK: x > 0, đặt t = $\log_{\sqrt{2}} x$ thì PT:

$$t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -2.$$

Giải ra nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Bài toán 8.10: Giải các phương trình:

a) $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$. b) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Giải

a) ĐK: x > 1, phương trình trở thành

$$\log_{2^2}\log_2 x + \log_2\log_{2^2} x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\frac{1}{2} + \log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2\log_2 x = 3.$$

$\Leftrightarrow \log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 16.

b) ĐK: x > 0, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$ thì PT:

$$2\log_x 2 + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3$$

Đặt t = $\log_2 x$ thì PT: $\frac{2}{t} + \frac{6}{1 + t} = 3 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\frac{1}{3}$. Suy ra nghiệm $x = 4$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 8.11: Giải các phương trình sau:

a) $\log_5 x.\log_3 x = \log_5 x + \log_3 x$ b) $2\log_2 x.\log_5 x + \log_2 x - 10\log_5 x = 5$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, ta có $x = 1$ là một nghiệm.

Nếu $x \neq 1$ thì PT: $\frac{1}{\log_x 5 \log_x 3} = \frac{1}{\log_x 5} + \frac{1}{\log_x 3}$

$\Leftrightarrow \log_x 5 + \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow \log_x 15 = 1 \Leftrightarrow x = 15$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 15$.

b) ĐK: $x > 0$, PT: $\log_2 x\,(2\log_5 x + 1) - 5(2\log_5 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 5)(2\log_5 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 5$ hoặc $2\log_5 x = -1$

$\Leftrightarrow x = 32$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 32$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 8.12: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(4x^4 - 7x^2 + 1) - \log_2 x = \log_4(2x^2 - 1)^2 + 1$.

b) $\log_2 x \log_3 x \log_5 x = \log_2 x \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x$.

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} 4x^4 - 7x^2 + 1 > 0 \\ 0 < x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(4x^4 - 7x^2 + 1) = \log_2 2x\,|2x^2 - 1|$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 7x^2 + 1 = 2x\,|2x - 1| \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 7 = 2\left|2x - \frac{1}{x}\right|$

Đặt $t = \left|2x - \frac{1}{x}\right|$, $t \geq 0$ và phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Chọn nghiệm $t = 3$.

Với $2x - \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

Với $2x - \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

Chọn nghiệm của phương trình là: $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}, x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

b) ĐK: $x > 0$, phương trình trở thành:

$(lgx)^3 = (lgx)^2(lg2 + lg3 + lg5) \Leftrightarrow (lgx)^2(lgx - lg30) = 0$

$\Leftrightarrow lgx = 0$ hoặc $lgx = lg30 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 30$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1$ hoặc $x = 30$.

Bài toán 8.13: Giải các phương trình

a) $\log_2 x = 3 - x$ b) $\log_3 x + \log_4(2x - 2) = 2$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, vì hàm số vế trái đồng biến, hàm số vế phải nghịch biến và $x = 2$ là nghiệm nên đó là nghiệm duy nhất.

b) ĐK: $x > 1$. Ta có $f(x) = \log_3 x + \log_4(2x - 2)$ là hàm đồng biến.

Khi $x = 3$ thì $f(x) = f(3) = 2$: đúng.

Khi $x > 3$ thì $f(x) > f(3) = 2$: loại.

Và khi $1 < x < 3$ thì $f(x) < f(3) = 2$: loại.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

Bài toán 8.14: Giải các phương trình

a) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$. b) $\log_3(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}) = \frac{2}{3}\log_2\sqrt{x}$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, đặt $\log_3 x = y$ thì $x = 3^y$

PT: $\log_2(1+\sqrt{3^y}) = y \Leftrightarrow 1+\sqrt{3^y} = 2^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$

Ta có $y = 2$ thoả mãn phương trình, vì vế trái là hàm nghịch biến nên PT có nghiệm duy nhất $y = 2$ nên $x = 3^2$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 3^2$.

b) ĐK: $x > 0$, đặt $x = 2^{12y}$ thì PT:

$\log_3(1 + 2^{6y} + 2^{4y}) = \frac{2}{3}\log_2 2^{6y} \Leftrightarrow \log_3(1 + 2^{6y} + 2^{4y}) = 4y$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{6y} + 2^{4y} = 3^{4y} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{81}\right)^y + \left(\frac{64}{81}\right)^y + \left(\frac{16}{81}\right)^y = 1.$

Ta có $y = 1$ thoả mãn và vì hàm số $f(y) = \left(\frac{1}{81}\right)^y + \left(\frac{64}{81}\right)^y + \left(\frac{16}{81}\right)^y$ nghịch biến trên **R** nên $y = 1$ là nghiệm duy nhất, do đó PT cho có nghiệm $x = 2^{12}$.

Bài toán 8.15: Giải phương trình: $\log_2(x + 2) = \log_3(x + 1) + 1$.

Giải

Điều kiện $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(x + 2) - \log_3(x + 1) = 1$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x + 2) - \log_3(x + 1)$, $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)\ln 2} - \frac{1}{(x+1)\ln 3} = \frac{(\ln 3-\ln 2)x-(\ln 4-\ln 3)}{(x+1)(x+2)\ln 2\ln 3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \in (0; 2)$$

Lập BBT thì phương trình $f(x) = 1$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

Mà $x = 0$, $x = 2$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

Bài toán 8.16: Giải các phương trình:

a) $2\log_2 x = x$

b) $\log_2[3\log_2(3x - 1) - 1] = x$.

Giải

a) ĐK: $x > 0$, PT: $\log_2 x = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ thì $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, lập BBT thì $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà

$f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$ nên tập nghiệm $S = \{2; 4\}$.

b) ĐK: $3x - 1 > 0$, $3\log_2(3x - 1) > 1 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$.

Đặt $y = \log_2(3x - 1)$ thì có hệ: $\begin{cases} x = \log_2(3y-1) \\ y = \log_2(3x-1) \end{cases}$

Do đó $\log_2(3x - 1) + x = \log_2(3y - 1) + y$

Xét $f(t) = \log_2(3t - 1) + t$, $t > \frac{1}{3}$

Ta có: $f'(t) = \frac{3}{(3t-1)\ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t > \frac{1}{3}$ nên f là hàm đồng biến, do đó phương trình $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

$\Leftrightarrow x = \log_2(3x - 1) \Leftrightarrow 3x - 1 = 2^x \Leftrightarrow 2^x - 3x + 1 = 0$.

Xét $g(x) = 2^x - 3x - 1$, $x > \frac{1}{3}$

Ta có $g'(x) = 2^x.\ln 2 - 3$, $g''(x) = 2^x.\ln^2 2 > 0$ nên g' đồng biến trên **D.**

Do đó $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm, mà $g(1) = g(3) = 0$

Suy ra tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Bài toán 8.17: Giải các phương trình:

a) $\log_2 x + \log_3(x + 1) = \log_4(x + 2) + \log_5(x + 3)$

b) $\log_3 \dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$

Giải

a) ĐK: $x > 0$. Xét $x = 2$ thì PT thoả mãn:

Xét $x > 2$ thì $\dfrac{x}{2} > \dfrac{x+2}{4} > 1$, $\dfrac{x+1}{3} > \dfrac{x+3}{5} > 1$

nên VT > VP (loại), xét $x < 2$ thì VT < VP (loại)

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Phương trình: $\log_3 \dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = (2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến, nên phương trình

$f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 5) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = -2$

Bài toán 8.18: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(\cot x + \tan 3x) - 1 = \log_2(\tan 3x)$ b) $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$

Giải

a) ĐK $\begin{cases} \cot x + \tan 3x > 0 \\ \tan 3x > 0 \end{cases}$ thì PT: $\cot x + \tan 3x = 2\tan 3x$

$\Leftrightarrow \cot x = \tan 3x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(\dfrac{\pi}{2} - x)$

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

Chọn nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$ và $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) ĐK: $\begin{cases} \cot x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Đặt $\log_2(\cos x) = 2t \Rightarrow \cos x = 4^t \Rightarrow \cos^2 x = 16^t$

Do đó $2\log_3(\cot x) = 2t \Rightarrow \cot x = 3^t \Rightarrow \cot^2 x = 9^t$

nên $9^t = \dfrac{16^t}{1-16^t} \Leftrightarrow 9^t = 144^t + 16^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{144}{9}\right)^t + \left(\dfrac{16}{9}\right)^t = 1$

Suy ra PT có nghiệm duy nhất $t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Chọn nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 8.19: Giải phương trình: $\log_2\left(17\sqrt{x+1} + 34\sqrt{3-x}\right) + x = 2 + \log_2(4^x + 4)$.

Giải

Điều kiện $-1 \le x \le 3$

Khi đó phương trình tương đương với:

$\log_2\left(17\sqrt{x+1} + 34\sqrt{3-x}\right) = \log_2 4(4^x + 4) - \log_2 2^x$

$\Leftrightarrow \log_2\left(17\sqrt{x+1} + 34\sqrt{3-x}\right) = \log_2 4(2^x + 2^{2-x})$

$\Leftrightarrow \left(17\sqrt{x+1} + 34\sqrt{3-x}\right) = 4(2^x + 2^{2-x})$

Xét hàm số $f(x) = 17\sqrt{x+1} + 34\sqrt{3-x}$, $-1 \le x \le 3$

$$f'(x) = \frac{17}{2\sqrt{x+1}} - \frac{34}{2\sqrt{3-x}} = \frac{17\sqrt{3-x} - 34\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}.\sqrt{3-x}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$

Lập BBT thì $f(x) \ge f(3) = 34$

Đặt $2^x = t$, ta có $-1 \le x \le 3$ nên. $\dfrac{1}{2} \le t \le 8$,

Do đó: $4(2^x + 2^{2-x}) = 4\left(t + \dfrac{4}{t}\right)$

Xét hàm số $g(t) = 4\left(t + \dfrac{4}{t}\right)$, với $\dfrac{1}{2} \le t \le 8$

$g'(t) = 4\left(1 - \dfrac{4}{t^2}\right)$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập BBT thì $g(t) \le g(\dfrac{1}{2}) = g(8) = 34$.

Do đó $4(2^x + 2^{2-x}) \le 34$, với $x \in [-1; 3]$

Nên ta có $VP \ge 34 \ge VT$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi x = 3.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

Bài toán 8.20: Giải phương trình: $4(x - 2)[\log_2(x - 3) + \log_3(x - 2)] = 15(x + 1)$.

Giải

Điều kiện x > 3.

Phương trình $\log_2(x - 3) + \log_3(x - 2) - \frac{15}{4}.\frac{x+1}{x-2} = 0$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x - 3) + \log_3(x - 2) - \frac{15}{4}.\frac{x+1}{x-2}$, x >3.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2.(x-3)} + \frac{1}{\ln 3.(x-2)} + \frac{15}{4}.\frac{3}{(x-2)^2} > 0, \forall x > 3$$

Suy ra vế trái là hàm số đồng biến nên phương trình đã cho có không quá một nghiệm và f(11) = 0.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 11.

Bài toán 8.21: Giải phương trình: $(x + 1)\log 4^x = x\log(x + 2^{x+1})$.

Giải

PT: $x\log 4^{x+1} = x\log(x + 2^{x+1}) \Leftrightarrow x = 0$ hay $4^{x+1} = x + 2^{x+1}$.

Ta xét phương trình: $4^{x+1} = 2^{x+1} + x$

Đặt hàm số $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1} - x$, $x \in \mathbf{R}$

Ta có $f'(x) = 4^{x+1}.\ln 4 - 2^{x+1}.\ln 2 - 1$

Vì P < 0 nên phương trình f '(x) = 0 bậc hai theo 2^{x+1} có đúng một nghiệm 2^{x+1} >0 là x_0

Vì $f''(x) = 4^{x+1}\ln^2 4 - 2^{x+1}\ln 2 > 0$ do đó x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f(x).

Suy ra $f(x) \geq f(x_0) > 0$ nên phương trình $4^{x+1} = 2^{x+1} + x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 0.

Bài toán 8.22: Giải phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12).$$

Giải

Điều kiện $x^2 - 2x - 12 > 0$

PT: $\frac{1}{2}\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \frac{1}{2}\log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

$\Leftrightarrow \log_{9+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{8+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 12)$

Đặt $a = 8 + 4\sqrt{5}$ thì $\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12)$.

Đặt $\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12) = t$

$\Leftrightarrow (a + 1)^t = x^2 - 2x - 11$, $a^t = x^2 - 2x - 12$

Suy ra $(a+1)^t = a^t + 1 \Leftrightarrow t = 1$

Do đó: $x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$ hay $x = -2\sqrt{5}$: chọn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2 + 2\sqrt{5}$ hay $x = -2\sqrt{5}$.

Bài toán 8.23: Giải phương trình: $3^{\log_2(3^x-1)} = 2^{\log_3(2^x+1)} + 1$.

Giải

Điều kiện $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $a = \log_2 3$, $y = 2^x$

PT: $3^{\log_2(3^x-1)} = 2^{\log_3(2^x+1)} + 1 \Leftrightarrow \left(3^x - 1\right)^{\log_2 3} = (2^x+1)^{\log_3 2+1}$

$$\Leftrightarrow (y^a - 1)^a = (y+1)^{\frac{1}{a}} + 1 \Leftrightarrow ((y^a - 1)^a - 1)^a - 1 = y$$

Xét hàm số $f(t) = t^a - 1$, $t > 0$ thì PT trên là $f(f(f(y))) = y$

Khảo sát hàm số $f(t) - t = t^a - t - 1$, $t > 0$ ta suy ra được

$f(t) > t, \forall t > 2$; $f(t) < t$, $0 < t < 2$; $f(2) = 2$

Suy ra phương trình $f(f(f(y))) = y$ có nghiệm duy nhất là $y = 2$, suy ra $x = 1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

Bài toán 8.24: Giải phương trình: $\log_{1-x}(2x) + \log_x(2 - 2x) = 0$.

Giải

Điều kiện $0 < x < 1$.

Đặt $a = \log_2(1 - x)$, $b = \log_2 x$. Ta có:

$$a + b = \log_2(1-x) + \log_2 x = \log_2[x(1-x)] \le \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \Rightarrow a + b + 2 \le 0$$

PT: $\dfrac{\log_2 2 + \log_2 x}{\log_2(1-x)} + \dfrac{\log_2 2 + \log_2(1-x)}{\log_2 x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+b}{a} + \dfrac{1+a}{b} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = a + b + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 0$ và $(b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = -1 \Leftrightarrow \log_2(1-x) = \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

BÀI TẬP

Bài tập 8.1: Giải phương trình:

a) $\lg(2x^2 + 21x + 9) = \lg(2x + 1) + 1$ b) $\log_3(9^x + 8) = x + 2$.

HD-ĐS

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $x = 0$, $x = 3\log_3 2$.

Bài tập 8.2: Giải phương trình:

a) $\log_2(4^x + 15.2^x + 27) + 2\log_2 \frac{1}{4.2^x - 3} = 0$

b) $\log_x(9x^2).\log_3^2 x = 12$.

HD-ĐS

a) $x = \log_2 3$

b) $x = 8, x = \frac{1}{27}$.

Bài tập 8.3: Giải phương trình:

a) $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$

b) $x^{\log_5 3} + 4^{\log_5 x} = x$.

HD-ĐS

a) $x = 2$ và $x = \frac{5}{4}$

b) $x = 25$.

Bài tập 8.4: Giải phương trình:

a) $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$

b) $\lg(x^2 - x + 6) + x = \lg(x + 2) + 4$

HD-ĐS

a) $x = 4^4 = 256$.

b) $x = 4$.

Bài tập 8.5: Giải phương trình:

a) $(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 2)\log_2(x^2 - x) = 0$

b) $\lg x - \frac{1}{2}\lg(x - \frac{1}{2}) = \lg(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\lg(x + \frac{1}{8})$.

HD-ĐS

a) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

b) $x = 1$.

Bài tập 8.6: Giải phương trình:

a) $3\log_2 x + 2\log_3 x = \log_2 x.\log_3 x - 6$

b) $\log_2 x \log_3 x \log_5 x = \log_2 x \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x$.

HD-ĐS

a) Biến đổi tích số.

b) $x = 30$.

Bài tập 8.7: Giải phương trình:

a) $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) = 16$

b) $4\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} + 2\log_{4x}(x)^2 = 3\log_{2x}(x^3)$.

HD-ĐS

a) Biến đổi tích số.

b) $x = 1, x = 4, x = \frac{1}{8}$.

Bài tập 8.8: Giải phương trình:

a) $x^{\lg 2x} = 5$ b) $\log_2 x + \log_5(2x+1) = 2$.

HD-ĐS

a) Dùng lôgarit hoá. b) x = 2.

Bài tập 8.9: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x - \sqrt{x^2-1}) + \log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2-1})$

b) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_4(\log_3(\log_2 x))$

HD-ĐS

a) ĐK $x \geq 1$. Đặt $t = x - \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{t}$

PT: $\log_2 t(1 - \log_3 2 + \log_6 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2 t = 0 \Leftrightarrow t = 1$ nên x = 1.

b) ĐK x > 1. PT: $\log_4(\log_3(\log_4 x))^2 = \log_4(\log_3(\log_2 x))$

$\Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 - \log_3(\log_4 x) - \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\log_3 2}}{2}$.

9 ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương trình mũ

- Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Nếu b > 0, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a \neq 1,\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

Phương trình lôgarit

- Phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Dạng: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a>0, a\neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ hay } g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Chú ý:

1) Phương trình bậc hai f(x) = 0 có 2 nghiệm x_1, x_2:

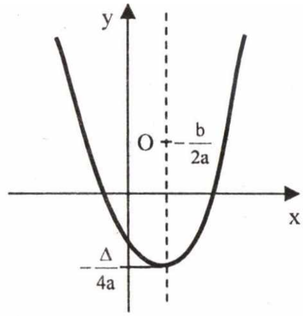
$x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0, P > 0, S > 0;$

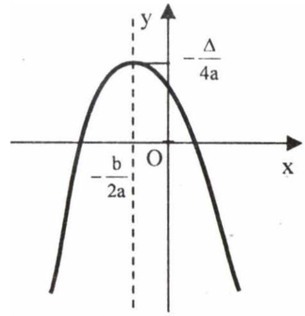
$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0, P > 0, S < 0.$

2) Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là một đường parabol đỉnh $I(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$, trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Parabol có hướng bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.





x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

3) Điều kiện phương trình có nghiệm:

Cho $y = f(x)$ trên D đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: GTLN = M và GTNN = m thì phương trình $f(x) = k$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $m \leq k \leq M$.

4) Nếu phương trình dạng $f(x,m) = 0$ thì đưa về dạng đánh giá tham số 1 bên: $f(x) = m$ hay $f(x) = h(m)$ rồi xét hàm số $y = f(x)$.

Nếu hàm số không đạt GTLN, GTNN thì lập BBT để giải.

Bài toán 9.1: Chứng minh rằng phương trình $4^x(4x^2 + 1) = 1$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Giải

PT: $4^x(4x^2 + 1) - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 4^x(4x^2 + 1) - 1$, D = **R**.

Ta có $f'(x) = 4^x\ln4.(4x^2 + 1) + 8x.4^x = 4^x[\ln4.(4x^2 + 1) + 8x]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln4.(4x^2 + 1) + 8x = 0 \Leftrightarrow (4\ln4)x^2 + 8x + \ln4 = 0 \ (*).$$

PT (*) này có biệt thức $\Delta > 0$ nên có đúng 2 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên của f(x) suy ra phương trình f(x)= 0 có không quá ba nghiệm phân biệt.

Mặt khác: $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(0) = 0$; $f(-3).f(-2) < 0$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt:

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 \in (-3; -2)$.

Bài toán 9.2: Chứng minh rằng phương trình $x^{x+1} = (x+1)^x$ có một nghiệm dương duy nhất.

Giải

Với x > 0, PT: $(x + 1)\ln x = x\ln(x + 1) \Leftrightarrow (x + 1)\ln x - x\ln(x + 1) = 0$

Xét hàm số $f(x) = (x + 1)\ln x - x\ln(x + 1)$, x > 0.

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$$

Nên f ' nghịch biến trên $(0; +\infty)$,

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) < 0, \forall x$ do đó f(x) nghịch biến trên **R** nên f(x) = 0 có tối đa 1 nghiệm.

Mà hàm f(x) liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, $f(2) = 3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln 8 - \ln 9 > 0$ và $f(3) = 4\ln 3 - 3\ln 4 = \ln 81 - \ln 64 > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Cách khác: Xét hàm $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, t > 0.

Bài toán 9.3: Cho 3 phương trình: cosx = x (1); sin(cosx) = x (2); cos(sinx) = x (3). Chứng minh rằng mỗi phương trình có nghiệm duy nhất lần lượt là α, β, γ và thỏa mãn: $\gamma\alpha.\ln\beta < \beta\gamma.\ln\alpha < \alpha\beta.\ln\gamma$.

Giải

Xét hàm số tương ứng với PT (1) là f(x) = x – cosx, D= **R**

Ta có $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0, \forall x$ nên f là hàm đồng biến.

Mà f(0) < 0, f(1) > 0 và f là hàm liên tục nên phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất $\alpha \in (0;1)$.

Chứng minh tương tự ta có 3 nghiệm $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{\ln\beta}{\beta} < \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\gamma}{\gamma}$ (*)

Xét hàm số $g(t) = \frac{\ln t}{t}$, 0 < t < 1.

Ta có $g'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} > 0$ nên hàm số này đồng biến trên (0; 1).

Giả sử $\beta \geq \alpha$ thì $\beta = \sin(\cos\beta) < \cos\beta \leq \cos\alpha = \alpha$, vô lý nên $\beta < \alpha$.

Giả sử $\gamma \leq \alpha$ thì $\gamma = \cos(\sin\gamma) > \cos\gamma \geq \cos\alpha = \alpha$, vô lý nên $\alpha < \gamma$.

Vậy $\beta < \alpha < \gamma$ hay $\frac{\ln\beta}{\beta} < \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\gamma}{\gamma}$.

Bài toán 9.4: Tìm để phương trình: $7^{2x} - 6m.7^x + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = 7^x$, $t > 0$.

Phương trình: $7^{2x} - 6m.7^x + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow t^2 - 6mt + 2 - 2m + 9m^2 = 0, t > 0$ (2).

Điều kiện phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - (2 - 2m + 9m^2) > 0 \\ 6m > 0 \\ 9m^2 - 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 < 0 \\ m > 0 \\ 9m^2 - 2m + 2 > 0 \end{cases}$$

Vì $9m^2 - 2m + 2 > 0, \forall m$ nên $0 < m < 1$. Vậy giá trị cần tìm là $0 < m < 1$.

Bài toán 9.5: Tìm điều kiện để phương trình: $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm.

Giải

Đặt $t = 9^{\sin^2 x}$, vì $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le t \le 9$

PT: $t + \dfrac{9}{t} = m$. Xét $f(t) = t + \dfrac{9}{t}$, $1 \le t \le 9$

$f'(t) = \dfrac{t^2 - 9}{t^2}$; $f'(t) = 0$ khi $t = 0$

BBT:

t	1		3		9
f'		−	0	+	
f	10	↘	6	↗	10

Điều kiện $f(t) = m$ có nghiệm thoả $1 \le t \le 9$ là $6 \le m \le 10$.

Vậy giá trị cần tìm: $6 \le m \le 10$.

Bài toán 9.6: Tìm điều kiện để phương trình $x + \sqrt{12 - 3x^2} = 5^m$ có nghiệm.

Giải

Xét $f(x) = x + \sqrt{12 - 3x^2}$, D = [2; 2]

$$f'(x) = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{\sqrt{12 - 3x^2} - 3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} - 3x = 0$ $(-2 < x < 2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{12-3x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \ge 0 \\ 12-3x^2 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Lập BBT thì $-2 \le f(x) \le 4, \forall x \in [-2; 2]$

Điều kiện để phương trình: $x + \sqrt{12-3x^2} = 5^m$ có nghiệm là

$-2 \le 5^m \le 4 \Leftrightarrow 5^m \le 4 \Leftrightarrow m \le \log_5 4$.

Vậy giá trị cần tìm là $m \le \log_5 4$.

Bài toán 9.7: Tìm điều kiện m để phương trình:

$3(1-m)9^{\cos^2 x} - 2(1-m).3^{\cos^2 x} + 3 - 2m = 0$ có nghiệm.

Giải

Đặt $t = 3^{\cos^2 x}, 0 < t \le 1$.

Phương trình: $3(1-m)9^{\cos^2 x} - 2(1-m).3^{\cos^2 x} + 3 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow 3(1-m).t^2 - 2(1-m).t + 3 - 2m = 0, 0 < t \le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2} = m, 0 < t \le 1 \Leftrightarrow y = 1 + \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 2} = m, 0 < t \le 1$

Xét: $f(t) = 3t^2 - 2t + 2, 0 \le t \le 1$; $f'(t) = 6t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

t	0		1/3		1
f'		-	0	+	
f	1	↘	5/3	↗	3

Do đó: $\dfrac{5}{3} \le f(t) \le 3 \Rightarrow \dfrac{4}{3} \le y \le \dfrac{8}{5}$. Nên $\min y = \dfrac{4}{3}$, $\max y = \dfrac{8}{5}$

Vậy điều kiện để phương trình cho có nghiệm là: $\dfrac{4}{3} \le m \le \dfrac{8}{5}$.

Bài toán 9.8: Tìm điều kiện để phương trình:

$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}, x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$

PT: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2$

Xét $f(t) = t^2 + t$, $1 \le t \le 2$, $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên f đồng biến trên [1; 2]

Điều kiện có nghiệm: $f(1) \le 2m + 2 \le f(2)$

$\Leftrightarrow 2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2.$

Vậy giá trị cần tìm: $0 \le m \le 2$.

Bài toán 9.9: Tìm m để mỗi phương trình: $(m + 1)(\ln x)^2 + 2(m - 1)\ln x + 2m - 3 = 0$ có nghiệm. $x > 0$.

Giải

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \ln x$, $t \in \mathbf{R}$.

PT: $(m + 1)(\ln x)^2 + 2(m - 1)\ln x + 2m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (m + 1)t^2 + 2(m - 1)t + 2m - 3 = 0$

Xét $m = -1$ thì PT: $-4t - 5 = 0$: có nghiệm.

Xét $m \neq -1$, điều kiện PT bậc hai có nghiệm là $\Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow (m - 1)^2 - (m + 1)(2m - 3) \ge 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \le m \le \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $m \neq -1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \le m \le \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Bài toán 9.10: Tìm điều kiện của m để phương trình:

$\sqrt{4\lg y - 2} + 2\sqrt{4 - \lg y} - m = 0$ có nghiệm

Giải

Đặt $x = \lg y$, $y > 0$ thì điều kiện: $\dfrac{1}{2} \le x \le 4$.

Phương trình: $\sqrt{4\lg y - 2} + 2\sqrt{4 - \lg y} - m = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x - 2} + 2\sqrt{4 - x} = m$, $\dfrac{1}{2} \le x \le 4$.

Xét $f(x) = \sqrt{4x - 2} + 2\sqrt{4 - x}$, $D = [\dfrac{1}{2};4]$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{2\sqrt{4-x} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt{4x-2}.\sqrt{4-x}}$$

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - x} = \sqrt{4x - 2}$ $(x \neq 4, x \neq \dfrac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow 4(4 - x) = 4x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Ta có $f(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{14}$, $f(\dfrac{9}{4}) = 2\sqrt{7}$ và $f(4) = \sqrt{14}$

So sánh thì $\min f = \sqrt{14}$, $\max f = 2\sqrt{7}$.

Do đó phương trình có nghiệm khi min f < m < max f.

Vậy giá trị cần tìm là: $\sqrt{14} \le m \le 2\sqrt{7}$.

Bài toán 9.11: Tìm m để phương trình:

$\sqrt{x^2 + x.\lg m + 2} = 2x + 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: m > 0.

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ x^2 + x.\lg m + 2 = (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = x.\lg m,\ x \ge -\frac{1}{2}$$

Vì x = 0 không thoả mãn nên: $\dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x} = \lg m,\ x \ge -\dfrac{1}{2}$

Xét $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x},\ x \ge -\dfrac{1}{2},\ x \ne 0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} > 0$ với $x \ge -\dfrac{1}{2},\ x \ne 0$

BBT:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Điều kiện phương trình cho có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow f(x) = \lg m$ có 2 nghiệm phân biệt $x \ge -\dfrac{1}{2},\ x \ne 0$

$$\Leftrightarrow \lg m \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow m \ge 10^{9/2}.$$

Vậy giá trị cần tìm: $m \ge 10^{9/2}$.

Bài toán 9.12: Tìm điều kiện để phương trình:

$(\sqrt{5} + 1)^x + 2m(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x$ có nghiệm duy nhất.

Giải

PT: $(\sqrt{5} + 1)^x + 2m(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x + 2m\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = 1$

Ta có: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$, đặt $t=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$, $t > 0$

PT: $t+\frac{2m}{t}=1 \Leftrightarrow t^2 - t + 2m = 0$

Xét $t = 0 \Rightarrow m = 0$ thì PT: $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = 1$: thoả mãn

Xét $t \neq 0$, điều kiện có nghiệm $t > 0$: $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $0 < t_1 \leq t_2$

$\Leftrightarrow P < 0$ hoặc $(\Delta \geq 0, P > 0, S > 0) \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m = \frac{1}{8}$.

Vậy: $m \leq 0$ hoặc $m = \frac{1}{8}$.

Cách khác: Xét hàm số và lập bảng biến thiên.

Bài toán 9.13: Tìm điều kiện để phương trình: $\log_{\sqrt{3}}(x+3)=\log_3(ax)$ có nghiệm duy nhất.

Giải

Ta có PT: $2\log_3(x + 3) = \log_3(ax)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ \log_3(x+3)^2=\log_3(ax) \end{cases} \Leftrightarrow (x + 3)^2 = ax,\ x + 3 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = ax,\ x > -3$

Xét $x = 0$: Loại.

Xét $x \neq 0$ thì có: $a=\frac{x^2+6x+9}{x}$, $x > -3$

Đặt $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{x}$, $x > -3$, $x \neq 0$,

Ta có $f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}$, $f'(x) = 0$ thì $x = 3$

BBT:

x	-3		0		3		$+\infty$
f'	0	−	‖	−	0	+	
f	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

Vậy điều kiện PT có nghiệm duy nhất: $a < 0$ hay $a = 12$.

Bài toán 9.14: Tìm điều kiện để phương trình:

$\log_7^2 x = m(\log_7 x - 1)$ vô nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_7 x$, $t \in \mathbb{R}$.

PT: $\log_7^2 x = m(\log_7 x - 1) \Leftrightarrow t^2 = m(t - 1)$

Vì $t = 1$ không là nghiệm nên $m = \dfrac{t^2}{t-1}$.

Xét hàm số: $y = \dfrac{t^2}{t-1} = t + 1 + \dfrac{1}{t-1}$, $t \neq 1$

$$y' = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 2$$

BBT

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4 CT	↗	$+\infty$

$y_{CĐ} = y(0) = 0$, $y_{CT} = y(2) = 4$

Dựa vào BBT thì $y \leq 0$ hay $y \geq 4$ với mọi t.

Vậy điều kiện phương trình cho vô nghiệm là phương trình:

$m = \dfrac{t^2}{t-1}$ vô nghiệm nên giá trị cần tìm là: $0 < m < 4$.

BÀI TẬP

Bài tập 9.1: Tìm m để phương trình: $(m - 5)(\lg x)^2 - 4m\lg x + m - 2 = 0$ có nghiệm.

HD-ĐS

Đặt $t = \lg x$, $t \in \mathbb{R}$

Xét $m = 5$ thì PT: $-20t + 3 = 0$: có nghiệm.

Xét $m \neq 5$, PT bậc hai có nghiệm là $\Delta' \geq 0$, $m \leq -\dfrac{10}{3}$ hoặc $m \geq 1$.

Bài tập 9.2: Tìm m để phương trình: $\dfrac{m.9^x}{3^x - 1} - m.3^x = 2m + 1$ có nghiệm

HD-ĐS

$m < -1$ hoặc $m > -\dfrac{1}{2}$, $m \neq 0$.

Bài tập 9.3: Tìm m để phương trình: $(m^2 + 6m - 16)(\ln x)^2 + (m + 1)\ln x - 5 = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn: $0 < x_1 < 1 < x_2$.

HD-DS

Đưa về PT: $(m^2 + 6m - 16)t^2 + (m + 1)t - 5 = 0$

Có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $P < 0 \Leftrightarrow$ $m < -8$ hoặc $m > 2$.

Bài tập 9.4: Tìm m để phương trình:

$x^3 - 3x + 3(x^2 - 2) + (6 - 2^m)x + 7 - 2^{m+1} = 0$ có nghiệm x mà $|x| \geq 2$.

HD-DS

Phương trình: $(x + 2)2^m = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $|x| \geq 2$.

Khi $x = -2$ thì phương trình không thoả.

Khi $x \neq -2$ thì PT: $2^m = \dfrac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t + 2}$, $m \geq \log_2 \dfrac{27}{4}$.

Bài tập 9.5: Xác định m sao cho phương trình

$t^4 - (\lg m - 1)t^3 + 3t^2 - (\lg m - 1)t + 1 = 0$ có nghiệm $t > 0$

HD-DS

Chia hai vế cho t^2 và biến đổi PT:

$\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2 - (\lg m - 1)\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + 1 = 0$, đặt $x = t + \dfrac{1}{t}$ thì $x \geq 2$

PT: $x^2 - (\lg m - 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x + 1}{x} = \lg m$, $m \geq 10^{7/2}$.

Bài tập 9.6: Tìm tham số để phương trình:

$\lg^2 x + (\lg x + 1)^2 = \dfrac{m}{\lg^2 x + \lg x + 1}$ có nghiệm.

HD-DS

$m \geq \dfrac{3}{8}$.

Bài tập 9.7: Tìm m để phương trình: $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 + x_2 = 3$.

HD-DS

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ và dùng định lý Viet.

Bài tập 9.8: Tìm tham số để phương trình: $\dfrac{1}{39^{x-1}} = 3m - 2$ có nghiệm duy nhất.

HD-DS

Nếu x là nghiệm thì $2 - x$ cũng là nghiệm, $m = 1$.

Bài tập 9.9: Tìm m để phương trình:

$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$

có hai nghiệm thoả mãn: $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

HD-ĐS

$-1 < m < 0,\ \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2}$.

Bài tập 9.10 Tìm a để phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $\log_3(9^x + 9a^3) = x$

HD-ĐS

$0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$

§10 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương pháp chung

- Đưa về cùng một cơ số.

- Đặt ẩn phụ.

- Lôgarit hoá, mũ hoá.

- Sử dụng tính chất của hàm số.

Giải bất phương trình mũ

Nếu m > 0 và a > 1: $a^x < m \Leftrightarrow x < \log_a m$

Nếu m > 0 và 0 < a < 1: $a^x < m \Leftrightarrow x > \log_a m$.

Nếu a > 1: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Nếu 0 < a < 1: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

***Chú ý:** Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ.*

Bài toán 10.1: Giải các bất phương trình sau:

a) $(0,5)^{\frac{1}{x}} \geq 0,0625$ b) $3^{|x-2|} > 9^{|x+1|}$.

Giải

a) ĐK: $x \neq 0$,

BPT: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (vì $0 < \frac{1}{2} < 1$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x \geq \frac{1}{4}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < 0$ hoặc $x \geq \frac{1}{4}$.

b) BPT: $3^{|x-2|} > 3^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x-2| > 2|x+1|$ (vì cơ số $3 > 1$).

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $-4 < x < 0$.

Bài toán 10.2: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x|^{x^2-x-2} < 1$ b) $(3+2\sqrt{2})^x \geq (3-2\sqrt{2})^{2x-5}$.

Giải

a) BPT: $|x|^{x^2-x-2} < 1 \Leftrightarrow |x|^{x^2-x-2} < |x|^0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > 1,\ x^2-x-2<0 \\ 0<|x|<1,\ x^2-x-2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > 1,\ -1<x<2 \\ 0<|x|<1,\ x<-1 \text{ hay } x>2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow |x| > 1, -1 < x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Vậy nghiệm bất phương trình: $1 < x < 2$.

b) BPT: $(3+2\sqrt{2})^x \geq (3-2\sqrt{2})^{2x-5}$

$\Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^x \geq (3+2\sqrt{2})^{5-2x}$ (vì $3+2\sqrt{2} > 1$) $\Leftrightarrow x \geq 5-2x \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x \geq \dfrac{5}{3}$.

Bài toán 10.3: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{1}{3^x+5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$ b) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$.

Giải

a) ĐK: $x \neq -1$, đặt $t = 3^x$, $t > 0$ thì BPT:

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1 \leq t+5 \\ 3t-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \leq 3 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1.$$

Vậy nghiệm bất phương trình: $-1 < x \leq 1$.

b) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ thì BPT:

$$t + \frac{2}{t} - 3 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 < x < 1$.

Bài toán 10.4: Giải các bất phương trình:

a) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x > 4$ b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$.

Giải

a) Ta có: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$

Đặt $t = (2+\sqrt{3})^x$, $t > 0$ thì BPT: $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x > 4$

$\Leftrightarrow t + \dfrac{1}{t} > 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 > 0 \Leftrightarrow t < 2-\sqrt{3}$ hoặc $t > 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 1$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < -1$ hoặc $x > 1$.

b) BPT: $(0,4)^x - 2,5.(0,4)^{-x} - 1,5 > 0$.

Đặt $t = (0,4)^x$, $t > 0$ thì BPT trở thành $t^2 - 1,5t - 2,5 > 0$

$\Leftrightarrow t < -1$ hoặc $t > 2,5$, chọn nghiệm $t > 2,5$ nên $(0,4)^x > 2,5$

$\Leftrightarrow (0,4)^x > (0,4)^{-1} \Leftrightarrow x < -1$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < -1$.

Bài toán 10.5: Giải các bất phương trình:

a) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \le 0$ b) $2^{2x^2-4x-2} - 4.2^{2x-x^2+1} - 2 \le 0$.

Giải

a) Chia 2 vế cho $2^{2x} > 0$, BPT:

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2\right]\left[3\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 1\right] \le 0$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{3}{2}} 2$ (vì cơ số $\frac{3}{2} > 1$).

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < \log_{\frac{3}{2}} 2$.

b) Đặt $t = 2^{x^2-2x-1}$, $t > 0$. Bất phương trình $t^2 - \frac{4}{t} - 2 \le 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 2t - 4 \le 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 2t + 2) \le 0 \Leftrightarrow t \le 2$

Do đó $0 < 2^{x^2-2x-1} \le 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$.

Bài toán 10.6: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$) $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3$.

Giải

a) ĐK: $x \ne 0$, xét $x < 0$ thì VT $< 0 < 4$ đúng

Xét $x > 0$ thì $4^x > 3^x$ nên BPT: $4^x < 4(4^x - 3^x)$

$\Leftrightarrow 4.3^x < 3.4^x \Leftrightarrow 3^{x-1} < 4^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm: $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

b) ĐK: $x \ne \log_3 2$, BPT:

$$\frac{3^x}{3^x - 2} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2.3^x + 6}{3^x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3^x - 3}{3^x - 2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \log_3 2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < \log_3 2$ hay $x > 1$.

Bài toán 10.7: Giải các bất phương trình:

a) $4^x \le 3.2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{8+2^{1+x}-4^x} + 2^{1+x} > 5$.

Giải

a) ĐK: $x \ge 0$, BPT: $2^{2x} - 3.2^{\sqrt{x}}2^x - 4.2^{2\sqrt{x}} \le 0$

Chia hai vế cho $2^{\sqrt{x}}.2^x > 0$. BPT: $2^{x-\sqrt{x}} - 4.2^{\sqrt{x}-x} - 3 \le 0$

Đặt $t = 2^{x-\sqrt{x}}$, $t > 0$ thì BPT: $t - \frac{4}{t} - 3 \le 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 4$

Chọn $0 < t \le 4 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 \le x \le 4$.

b) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ thì BPT: $\sqrt{8+2t-t^2} > 5-2t$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2t<0,\ 8+2t-t^2 \ge 0 \\ 5-2t \ge 0,\ 8+2t-t^2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2} < t \le 4 \\ 1 < t \le \frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Do đó $1 < t \le 4 \Leftrightarrow 1 < 2^x \le 4 \Leftrightarrow 0 < x \le 2$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 < x \le 2$.

Bài toán 10.8: Giải các bất phương trình:

a) $4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} < 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

b) $2^{-x^2-3x-2+4\sqrt{x^2+3x}} < x^2 - 2x + 5$.

Giải

a) ĐK: $x \ge 0$, BPT: $4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} - 2x^2.3^{\sqrt{x}} - 2x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow (3 + x - 2x^2)3^{\sqrt{x}} - 2(x - 2x^2 + 3) < 0 \Leftrightarrow (-2x^2 + x + 3)(3^{\sqrt{x}} - 2) < 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_3^2 2 \\ x \ge 0 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x > \log_3^2 2 \\ x \ge 0 \\ x < -1 \text{ hay } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm BPT: $0 \le x < \log_3^2 2$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.

b) ĐK: $x^2 + 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -3$ hoặc $x \ge 0$.

Xét $x \le -3$ thì VT < 0 < VP: đúng.

Xét $x \ge 0$ thì VP = $(x - 1)^2 + 4 \ge 4$,

$$VT = 2^{2-(\sqrt{x^2+3x}-2)^2} \le 4 \text{ nên có nghiệm } \forall x \ne 1.$$

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; 3] \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Bài toán 10.9: Giải các bất phương trình sau:

a) $2^{x+2} + 3^{x+2} \le 3^{2x+1} + 2^{2x+1}$ b) $\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \ge 0$.

Giải

a) Nếu x = 1 thì bất phương trình thỏa mãn

- Nếu $x > 1 \Rightarrow x + 2 < 2x + 1$ thì

$2^{x+2} < 2^{2x+1}$, $3^{x+2} < 3^{2x+1} \Rightarrow 2^{x+2} + 3^{x+2} < 2^{2x+1} + 3^{2x+1}$, thỏa mãn

- Nếu x < 1 thì bất đẳng thức ở trên đổi chiều và không thỏa mãn đề bài.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge 1$.

b) Vì $f(x) = 2^{1-x} - 2x + 1 = -2x + 1 + \dfrac{2}{2^x}$ là hàm nghịch biến

và $f(1) = 0$, $f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ nên f(x) cùng dấu với 1 - x.

Hàm số $g(x) = 2^x - 1$ là hàm đồng biến và $g(0) = 0$ nên $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, do đó g(x) cùng dấu với x.

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{1-x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 1$.

Vậy tập nghiệm của BPT là (0; 1].

Bài toán 10.10: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x + 4 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^x}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3^x - x}}$

Giải

a) Điều kiện xác định của hàm số là: $x + 4 - (\dfrac{1}{3})^x \ge 0 \Leftrightarrow x + 4 \ge (\dfrac{1}{3})^x$

Xét x < -1 thì VT < 3 < VP: loại

Xét $x \ge -1$ thì VT $\ge 3 \ge$ VP: thoả mãn.

Vậy tập xác định $D = [-1; +\infty)$.

b) ĐK: $3^x - x > 0 \Leftrightarrow 3^x > x$.

Xét $f(x) = 3^x - x$, $x \in \mathbf{R}$ thì $f'(x) = 3^x.\ln 3 - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 = 1 \Leftrightarrow x = -\log_3(\ln 3)$.

Lập BBT thì $f(x) > 0$, $\forall x$ nên tập xác định $D = \mathbf{R}$.

BÀI TẬP

Bài tập 10.1: Giải bất phương trình:

a) $32^{\frac{x+5}{x-1}} > 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$ b) $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x.30^x$.

HD-ĐS

a) $x < \frac{5}{6}$ hoặc $1 < x < 3$ b) $\frac{1}{2\log_6 5} < x < \log_6 5$.

Bài tập 10.2: Giải bất phương trình:

a) $27^x + 12^x \le 2.8^x$ b) $32.4^x + 1 < 18.2^x$.

HD-ĐS

a) $x \le 0$ b) $-4 < x < -1$.

Bài tập 10.3: Giải bất phương trình:

a) $9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}-1} + 4^{\frac{1}{x}} < 0$ b) $1 + 2^{x+2} + 3^{x+1} < 6^x$.

HD-ĐS

a) $x < -1$ hoặc $x > 1$ b) $x > 2$.

Bài tập 10.4: Giải bất phương trình:

a) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ b) $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

HD-ĐS

a) $x > 0$. b) $-1 < x < 1$.

Bài tập 10.5: Giải bất phương trình:

a) $2.4^{-\frac{1}{x}} - 6^{-\frac{1}{x}} < 3.9^{-\frac{1}{x}}$ b) $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 84 \ge 0$

HD-ĐS

a) Chia số hạng rồi đặt ẩn phụ. b) Đặt $t = (\sqrt[10]{3})^x$, $t > 0$.

Bài tập 10.6: Giải cácphương trình:

a) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x < 14$ b) $9^x + x > 83$

HD-ĐS

a) Tích 2 cơ số bằng 1. b) $x > 2$.

Bài tập 10.7: Giải bất phương trình:

a) $3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} \ge 1$ b) $\sqrt{2(5^x+4)} - \sqrt{5^x - 3} \le \sqrt{5^x + 3}$.

HD-ĐS

a) $|x| \ge 2$. b) $x \ge 1$.

Bài tập 10.8: Giải bất phương trình:

a) $2^x.5^{x-1} < \frac{1}{5}.10^{2-x}$ b) $x^2 + 3^{\log_2 x} \ge x^{\log_2 5}$

HD-ĐS

a) Dùng lôgarit hoá. b) $t = \log_2 x$ thì $x = 2^t$.

11 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương pháp chung

- Đưa về cùng một cơ số.

- Đặt ẩn phụ.

- Lôgarit hoá, mũ hoá.

- Sử dụng tính chất của hàm số.

Giải bất phương trình lôgarit

Nếu $a > 1$: $\log_a x < m \Leftrightarrow 0 < x < a^m$

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a x < m \Leftrightarrow x > a^m$

Nếu $a > 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

Chú ý: *Điều kiện xác định của logarit và tính đồng biến, nghịch biến của hàm số logarit.*

Bài toán 11.1: Giải các bất phương trình:

a) $\log_{\sqrt{2}}(3-2x) > 1$ b) $\log_{0,2}(x^2 - 4) \geq -1$.

Giải

a) Điều kiện: $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. Vì $\sqrt{2} > 1$ nên bất phương trình tương đương với $3 - 2x > \sqrt{2} \Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ (thoả mãn).

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < \frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

b) ĐK: $x < -2$ hoặc $x > 2$, vì $0,2 < 1$ nên BPT:

$x^2 - 4 \leq (0,2)^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3$

Kết hợp điều kiện thì nghiệm $-3 \leq x < -2$ hoặc $2 < x \leq 3$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $-3 \leq x < -2$ hoặc $2 < x \leq 3$.

Bài toán 11.2: Giải các bất phương trình:

a) $\log_2 \log_{0.5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \le 2$ b) $\log_3(16^x - 2.12^x) \le 2x + 1$.

Giải

a) Vì cơ số 2 > 1 nên BPT tương đương:

$0 < \log_{0.5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \le 4 \Leftrightarrow 1 > 2^x - \frac{15}{16} \ge 0,5^4 \Leftrightarrow \frac{31}{16} > 2^x \ge 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{31}{16} > x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \log_2 31 - 4$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 \le x < \log_2 31 - 4$.

b) Vì cơ số 3 > 1 nên BPT tương đương:

$0 < 16^x - 2.12^x \le 3^{2x+1} \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3$.

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, $t > 0$ thì $0 < t^2 - 2t \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t - 3 \le 0 \\ t^2 - 2t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le t \le 3 \\ t < 0 \text{ hay } t > 2 \end{cases}$.

Chọn $2 < t \le 3$. Do đó $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}} 2 < x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $\log_{\frac{4}{3}} 2 < x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$.

Bài toán 11.3: Giải các bất phương trình:

a) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \le 0$ b) $\ln|x - 2| + \ln|x + 4| \le 3\ln 2$.

Giải

a) ĐK $x > 0$, đặt $t = \log_{0.2}x$ ta có BPT:

$t^2 - t - 6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 3 \Leftrightarrow -2 \le \log_{0.2}x \le 3$.

$\Leftrightarrow (0,2)^3 \le x \le 25$ (vì cơ số $0,2 < 1$).

Vậy nghiệm bất phương trình: $0,008 \le x \le 25$.

b) ĐK: $x \ne -4$, $x \ne 2$, BPT: $\ln|(x - 2)(x + 4)| \le \ln 8$

$\Leftrightarrow |x^2 + 2x - 8| \le 8 \Leftrightarrow -8 \le x^2 + 2x - 8 \le 8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \ge 0 \\ x^2 + 2x - 16 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ hay } x \ge 0 \\ -1 - \sqrt{17} \le x \le -1 + \sqrt{17} \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \le x \le -2$ hoặc $0 \le x \le -1 + \sqrt{17}$: chọn.

Vậy nghiệm bất phương trình:

$-1 - \sqrt{17} \le x \le -2$ hoặc $0 \le x \le -1 + \sqrt{17}$.

Bài toán 11.4: Giải các bất phương trình:

a) $\log_3 x > \log_x 3$ b) $\log(x^2 - x - 2) < 2\log(3 - x)$.

Giải

a) ĐK: $x > 0, x \neq 1$, BPT $\Leftrightarrow \log_3 x > \dfrac{1}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_3 x - \dfrac{1}{\log_3 x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3^2 x - 1}{\log_3 x} > 0$

$\Leftrightarrow -1 < \log_3 x < 0$ hoặc $\log_3 x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $\dfrac{1}{3} < x < 1$ hoặc $x > 3$.

b) BPT: $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 < (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hay } x > 2 \\ x < 3 \\ x < \dfrac{11}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x < -1$ hoặc $2 < x < \dfrac{11}{5}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x < -1$ hoặc $2 < x < \dfrac{11}{5}$.

Bài toán 11.5: Giải các bất phương trình:

a) $\log_3 \dfrac{1-2x}{x} \le 0$ b) $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$,

Giải

a) Vì $3 > 1$ nên BPT $\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1-2x}{x} \le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x} > 0 \\ \dfrac{1-2x}{x} - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x} > 0 \\ \dfrac{1-3x}{x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

b) ĐK: $x > 0$, BPT tương đương:

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{1-(\log_2 x)^2} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^{-4(1+\log_2 x)}$ (vì cơ số $\dfrac{5}{4} > 1$)

$\Leftrightarrow 1 - (\log_2 x)^2 < -4(1 + \log_2 x) \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x < -1$ hoặc $\log_2 x > 5 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 32$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 < x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 32$.

Bài toán 11.6: Giải các bất phương trình:

a) $(2x - 7)\ln(x + 1) > 0$ b) $2.x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$.

Giải

a) BPT: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-7>0\\ \ln(x+1)>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-7<0\\ \ln(x+1)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{7}{2}\\ x+1>1\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{7}{2}\\ 0<x+1<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{7}{2}\\ \begin{cases}x<\frac{7}{2}\\ -1<x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{7}{2}\\ -1<x<0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm $S = (-1; 0) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$

b) ĐK: $x > 0$, lôgarit hoá theo cơ số $2 > 1$:

$\log_2\left(2^{\frac{1}{2}\log_2 x}\right) \geq \log_2\left(2^{\frac{3}{2}\log_2 x}\right) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\log_2^2 x \geq \frac{3}{2}\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \leq 1$ hay $\log_2 x \geq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$ hoặc $x \geq 4$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $0 < x \leq 2$ hoặc $x \geq 4$.

Bài toán 11.7: Giải các bất phương trình:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0$ b) $\log_2(x - 2) - 2 > \log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$.

Giải

a) ĐK: $x^2 - 6x + 5 > 0$ và $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 5$.

BPT: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq -\log_3(2 - x)^2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq (2 - x)^2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $x \geq \frac{1}{2}$.

b) ĐK: $x > 2$, BPT: $\log_2(x - 2) - 2 > 6\log_{2^{-3}}\sqrt{3x-5}$.

$\Leftrightarrow \log_2(x - 2) + \log_2(3x- 5) > 2 \Leftrightarrow \log_2((x - 2)(3x - 5)) > \log_2 4$

$\Leftrightarrow (x - 2)(3x - 5) > 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 > 0$

Giải ra và chọn nghiệm $x > 3$.

Bài toán 11.8: Giải các bất phương trình:

a) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leq 1$ b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$, đặt $t = \log_4 x$, BPT: $4t - \dfrac{33}{t} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4t^2 - t - 33}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(4t+11)(t-3)}{t} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq -\frac{11}{4} \text{ hoặc } 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x \leq -\dfrac{11}{4} \\ 0 < \log_4 x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 4^{-\frac{11}{4}} \\ 1 < x \leq 64 \end{array}\right..$$

b) Đặt $t = 6^x$, $t > 0$ thì BPT:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6t - t^2\right) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - t^2 > 0 \\ 6t - t^2 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ 5 \leq t < 6 \end{cases}$$

Từ đó giải ra tập nghiệm $S = (-\infty; 0] \cup (\log_6 5; 1)$

Bài toán 11.9: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{1}{5 - \log x} + \dfrac{2}{1 + \log x} < 1$ b) $\log_2(x^2 + 2x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) > \log_2^2(x-1)$.

Giải

a) Đặt $t = \log x$, $t \neq 5$, $t \neq -1$, BPT:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} < 1 \Leftrightarrow \frac{t + 1 + 10 - 2t}{5 + 4t - t^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - 4t - 5} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t-3)}{(t+1)(t-5)} > 0 \Leftrightarrow t < -1 \text{ hoặc } 2 < t < 3 \text{ hoặc } t > 5.$$

Do đó $\log x < -1$ hoặc $2 < \log x < 3$ hoặc $\log x > 5$.

Vậy nghiệm: $x < \dfrac{1}{10}$ hoặc $100 < x < 1000$ hoặc $x > 100\,000$.

b) ĐK: $x^2 + 2x - 3 > 0$, $x + 3 > 0$, $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

BPT: $\log_2(x - 1)(x + 3) - \log_2(x + 3) > \log_2^2(x - 1)$

$\Leftrightarrow \log_2^2(x - 1) - \log_2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2(x - 1) < 1$

$\Leftrightarrow 1 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 3$ (chọn).

Vậy nghiệm bất phương trình: $2 < x < 3$.

Bài toán 11.10: Giải các bất phương trình:

a) $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$ b) $\log_x[\log_2(4^x - 6)] \le 1$.

Giải

a) ĐK: $x > 0, x \ne 1, \frac{4x+5}{6-5x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{6}{5}, x \ne 1$.

Nếu $1 < x < \frac{6}{5}$ thì BPT $\Leftrightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{4x+5}{6-5x} - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+5x-6+5x}{(6-5x)x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x} < 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 10x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$ (loại)

Nếu $0 < x < 1$ thì BPT $\Leftrightarrow \frac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x} > 0$ chọn $\frac{1}{2} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm $S = (\frac{1}{2}; 1)$.

b) ĐK: $x > 0, x \ne 1, 4^x - 6 > 1 \Leftrightarrow x > \log_4 7$

Vì $x > \log_4 7 > 1$ nên BPT: $\log_2(4^x - 6) \le x$.

$\Leftrightarrow 4^x - 6 \le 2^x \Leftrightarrow 4^x - 2^x - 6 \le 0$

$\Leftrightarrow -2 \le 2^x \le 3 \Leftrightarrow x \le \log_2 3$.

Kết hợp thì tập nghiệm $S = (\log_4 7; \log_2 3]$.

Bài toán 11.11: Giải các bất phương trình:

a) $\log_x 4.\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \ge 2$ b) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1} > 0$.

Giải

a) ĐK: $x > 0, x \ne 1, \frac{5-12x}{12x-8} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{12} < x < \frac{2}{3}$.

BPT $\frac{2}{\log_2 x}.\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \ge 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \le \log_2 x$

$\Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} \le x \Leftrightarrow \frac{(6x+5)(1-2x)}{12x-8} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le x \le \frac{1}{2}$ hay $x > \frac{2}{3}$.

Kết hợp ĐK thì nghiệm: $\frac{5}{12} < x \le \frac{1}{2}$.

b) ĐK: $x > -3$, $x \neq -1$. Nếu $-3 < x < -1$ thì BPT:

$2\log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x+3) < 0 \Leftrightarrow 3\log_3(x+3) - 2\log_2(x+3) < 0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3) - 2\log_2 3\log_3(x+3) < 0 \Leftrightarrow \log_3(x+3).[3-\log_2 9] < 0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 1$. Do đó $-2 < x < -1$.

Nếu $x > -1$ thì BPT $\Leftrightarrow \log_3(x+3) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ (loại).

Vậy tập nghiệm $S = (-2; -1)$.

Bài toán 11.12: Giải các bất phương trình:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$ b) $\dfrac{1}{2}\log_2(4+x) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - \sqrt[4]{16-x}) \leq 0$.

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1$ (hàm nghịch biến)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0,\ 0 < x^2 - 3x + 2,\ x^2 - 4x + 2 \leq 0 \\ x < 0,\ x^2 - 3x + 2 < 0,\ x^2 - 4x + 2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x \leq 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy: $S = [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$

b) Điều kiện: $\begin{cases} -4 < x \leq 16 \\ 4 - \sqrt[4]{16-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x \leq 16$

BPT: $\log_2 \sqrt{4+x} \leq \log_2(4 - \sqrt[4]{16-x}) \Leftrightarrow \sqrt{4+x} - 2 \leq 2 - \sqrt[4]{16-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4+x}+2} \leq \frac{x}{(2+\sqrt[4]{16-x})(4+\sqrt{16-x})}$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(2+\sqrt[4]{16-x}\right)\left(4+\sqrt{16-x}\right) - \left(\sqrt{4+x}+2\right)\right] \leq 0$$

Với $-4 < x \leq 16$ ta có: $(2+\sqrt[4]{16-x})(4+\sqrt{16-x}) \geq 8 > \sqrt{4+x} + 2$

nên $(2+\sqrt[4]{16-x})(4 + \sqrt{16-x}) - (\sqrt{4+x} + 2) > 0$

Do đó $x \leq 0$. Kết hợp thì nghiệm bất phương trình là $-4 < x \leq 0$.

Bài toán 11.13: Giải các bất phương trình:

$\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

Giải

BPT $\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < 1 + \log_5 16 + \log_5(2^{x-2} + 1)$

$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 80(2^{x-2} + 1)$

$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1)$ (hàm đồng biến)

$\Leftrightarrow 4^x - 20.2^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm $S = (2; 4)$.

Bài toán 11.14: Giải bất phương trình: $\log_2 x < 6 - x$.

Giải

Điều kiện: $x > 0$.

Xét $x > 4$ thì $\log_2 x > 2$ còn $6 - x < 2$ (loại)

Xét $0 < x \le 4$ thì $\log_2 x \le 2 \le 6 - x$ nên BPT nghiệm đúng.

Vậy tập nghiệm $S = (0; 4]$.

Bài toán 11.15: Giải bất phương trình: $\log_2 \dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x - \sqrt{x})$.

Giải

Điều kiện $x \ge 0$. Bất phương trình tương đương với

$$2 + \log_2(x + 1) > 2(x - \sqrt{x}) + \log_2(\sqrt{x} + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 1) - 2x > \log_2(\sqrt{x} + 2) - 2(\sqrt{x} + 1)$$

Ta có x, $\sqrt{x} + 1$ đều thuộc $[0; +\infty)$,

Xét hàm số $f(t) = \log_2(t + 1) - 2t$, $t \in [0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 2} - 2 = \frac{1-(t+1)2\ln 2}{(t+1)\ln 2}$$

Vì $(t + 1)2\ln 2 \ge 2\ln 2 > 1$, với mọi $t \in [0; +\infty)$

nên $f'(t) < 0$, với mọi $t \in [0; +\infty)$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Bất phương trình: $f(x) > f(\sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow x < \sqrt{x} + 1$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \le x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 11.16: Giải bất phương trình: $\dfrac{3\ln x}{x^3 - 1} \le \dfrac{x+1}{x^3 + x}$.

Giải

Điều kiện $x > 0$, $x \ne 1$, bất phương trình tương đương

$$(x-1)\left(\frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x\right) > 0$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x, x > 0$

thì $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^3 + x} - 3\ln x$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(4x^3+3x^2-1)(x^3+1)-3x^2(x^4+x^3-x-1)}{(x^3+x)^2} - 3 = \dfrac{(x^3-1)(x-1)^3}{(x^3+x)^2}$

Khi x>1 thì f '(x) >0 nên f(x) đồng biến: x>1 suy ra f(x) > f(1) =0

Do đó (x-1) f(x) > 0.

Tương tự khi 0 <x <1 thì f '(x) < 0 nên f(x) nghịch biến:

x > 1 suy ra f(x) < f(1) =0. Do đó (x-1) f(x) > 0.

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi x>0, x≠1.

Bài toán 11.17: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$ b) $y = \sqrt{\log_{0,5}(-x^2+x+6)} + \dfrac{1}{x^2+2x}$.

Giải

a) Điều kiện xác định của hàm số: $\log(x^2 - 5x + 16) < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 5x + 16 < 10 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Vậy tập xác định D = (2; 3).

b) ĐK: $\begin{cases} \log_{0,5}(-x^2+x+6) \geq 0 \\ x^2+2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -x^2+x+6 \leq 1 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases}$

Giải ra được tập xác định $D = \left(-2; \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}; 3\right)$.

BÀI TẬP

Bài tập 11.1: Giải bất phương trình:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$ b) $\log_x(x^2 + x - 2) > 1$.

HD-ĐS

a) $S = [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$ b) $x > \sqrt{2}$.

Bài tập 11.2: Giải bất phương trình:

a) $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0$ b) $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

HD-ĐS

a) $-4 < x < -3$ hoặc $x > 8$ b) $\dfrac{3}{4} < x \leq 3$.

Bài tập 11.3: Giải bất phương trình:

a) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$. b) $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} > 2.3^{\lg x^2+2}$.

HD-ĐS

a) $2 < x < 4$ b) $0 < x < \frac{1}{100}$.

Bài tập 11.4: Giải bất phương trình:

a) $\log_2\left[\log_{0,5}(2^x - \frac{15}{16})\right] \le 2$ b) $\sqrt{\lg x} > \lg\sqrt{x}$.

HD-ĐS

a) $0 \le x < \log_2 31 - 4$. b) $1 < x < 10\,000$.

Bài tập 11.5: Giải bất phương trình:

a) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 \le 0$ b) $(\frac{1}{2})^{\log_3(\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - \frac{4}{5}))} < 1$.

HD-ĐS

a) $0 < x < \frac{1}{16}, \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}, x > \frac{1}{2}$ b) Mũ hóa.

Bài tập 11.6: Giải bất phương trình:

a) $\log_4(19 - 2^x).\log_2\frac{19 - 2^x}{8} \le -1$ b) $\log_3 \log_4 \frac{3x-1}{x+1} \le \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{3x-1}$

HD-ĐS

a) Đưa về cùng cơ số. b) $x \le -5, x > 1$.

Bài tập 11.7: Giải bất phương trình:

a) $\log_2 x + \log_3 x - 1 < \log_2 x.\log_3 x$ b) $(x+1)\log^2_{\frac{1}{2}} x + (2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \ge 0$.

HD-ĐS

a) Biến đổi tích số. b) $0 < x \le 2, x \ge 4$.

§12 ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Giải bất phương trình mũ

Nếu $m > 0$ và $a > 1$: $a^x < m \Leftrightarrow x < \log_a m$

Nếu $m > 0$ và $0 < a < 1$: $a^x < m \Leftrightarrow x > \log_a m$.

Nếu $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Nếu $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Giải bất phương trình lôgarit

Nếu $a > 1$: $\log_a x < m \Leftrightarrow 0 < x < a^m$

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a x < m \Leftrightarrow x > a^m$

Nếu $a > 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

Điều kiện về nghiệm bất phương trình:

Cho $y = f(x)$ *trên D đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: GTLN = M và GTNN = m thì:*

Bất phương trình $f(x) \ge k$ *có nghiệm* $\Leftrightarrow k \le M$

Bất phương trình $f(x) \le k$ *có nghiệm* $\Leftrightarrow k \ge m$

Bất phương trình $f(x) \ge k$ *có nghiệm mọi x thuộc D* $\Leftrightarrow k \le m$

Bất phương trình $f(x) \le k$ *có nghiệm mọi x thuộc D* $\Leftrightarrow k \ge M$.

Chú ý:

1) Dấu nhị thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$, $a \ne 0$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		*trái dấu a*	0	*cùng dấu a*	

2) Dấu tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$

Nếu $\Delta < 0$ *thì f(x) luôn cùng dấu với a*

Nếu $\Delta = 0$ *thì f(x) luôn cùng dấu với a, trừ nghiệm kép*

Nếu $\Delta > 0$ *thì dấu "trong trái – ngoài cùng"*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*cùng dấu a*	0	*trái dấu a*	0	*cùng dấu a*	

3) Nếu bất phương trình dạng $f(x,m) > 0$, $f(x,m) \ge 0$, $f(x,m) < 0$, $f(x,m) \le 0$ *và nếu đưa được về dạng đánh giá tham số 1 bên thì xét hàm số* $y = g(x)$.

4) Nếu hàm số không đạt GTLN, GTNN thì lập BBT để giải.

Bài toán 12.1: Tìm tham số m để bất phương trình: $49^x - 5.7^x + m \le 0$ có nghiệm.

Giải

Đặt $t = 7^x$, $t > 0$ thì BPT:

$$49^x - 5.7^x + m \le 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + m \le 0, t > 0$$

Xét $f(t) = t^2 - 5t + m$, $t > 0$

Điều kiện $f(t) \le 0$ có nghiệm $t > 0$ là:

$$\min_{t>0} f(t) \le 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{25-4m}{4} \le 0 \Leftrightarrow m \le \frac{25}{4}.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m \le \frac{25}{4}$.

Bài toán 12.2: Tìm tham số m để bất phương trình:

$x^2 - (m + 3)x + 3m < (m - x)\log_2 x$ có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

BPT: $x^2 - (m + 3)x + 3m < (m - x)\log_2 x$

$\Leftrightarrow (x - m)(x - 3) < (m - x)\log_2 x \Leftrightarrow (x - m)(x - 3 + \log_2 x) < 0$

Để ý: $f(x) = x - 3 + \log_2 x$, $x > 0$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x\ln 2} > 0$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 0$

Do đó, bất phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} x > m, x - 3 + \log_2 x < 0 \\ x < m, x - 3 + \log_2 x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > m,\ 0 < x < 2 \\ x < m,\ x > 2 \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra điều kiện có nghiệm là $m \ne 2$.

Bài toán 12.3: Tìm m để bất phương trình: $5(\ln x)^2 - \ln x + m \le 0$ có nghiệm $x > 0$.

Giải

Với $x > 0$ đặt $t = \ln x$, $t \in \mathbf{R}$

Bất phương trình: $5(\ln x)^2 - \ln x + m \le 0$ (1)

$\Leftrightarrow 5t^2 - t + m \le 0$ (2)

Điều kiện bất phương trình (1) có nghiệm $x > 0$ là bất phương trình (2) có nghiệm t.

Vì $a = 5 > 0$ nên BPT $f(t) \le 0$ có nghiệm khi $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 - 20m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{20}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m \le \frac{1}{20}$.

Cách khác: Xét BPT vô nghiệm tức là $f(t) \ge 0, \forall x$ rồi chuyển qua điều kiện có nghiệm.

Bài toán 12.4: Tìm điều kiện của m để bất phương trình:

$\sin^3 x + \cos^3 x \ge \lg m$ có nghiệm

Giải

Điều kiện $m > 0$.

Xét $f(x) = \sin^3x + \cos^3x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x)$

Đặt $t = \sin x + \cos x$; $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có $h(t) = t\left[1 - \dfrac{(t^2-1)}{2}\right] = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$ với $|t| \le \sqrt{2}$

$h'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
h'		-	0	+	0	-	
h		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$

Vì hàm số lẻ nên max $f(x) = 1$.

Bất phương trình có nghiệm khi: $\lg m \le \max f(x) \Leftrightarrow \lg m \le 1 \Leftrightarrow 0 < m \le 10$.

Vậy điều kiện bất phương trình có nghiệm là $0 < m \le 10$.

Bài toán 12.5: Tìm điều kiện của m để bất phương trình:

$\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x - 4 + 5^m \ge 0$ có nghiệm.

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = -t^4 + 2t^2$

Bất phương trình: $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x - 4 + 5^m \ge 0$

$\Leftrightarrow -t^4 + 2t^3 - t^2 + 5^m - 1 \ge 0; (|t| \le \sqrt{2})$

Xét $f(t) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + 5^m - 1$

$f'(t) = -2t(2t^2 - 3t + 1)$;

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 0; \dfrac{1}{2}; 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$
f'		+	0	-	0	+	0	-	
f		$\nearrow$	5^m-1	$\searrow$		$\nearrow$	5^m-1	$\searrow$	

Từ BBT suy ra điều kiện có nghiệm là: $5^m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy giá trị cần tìm là $m \geq 0$.

Bài toán 12.6: Tìm m để bất phương trình: $25^x - 2(m + 1).5^x - 2m - 3 > 0$ được nghiệm đúng với mọi x.

Giải

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$. Bất phương trình:

$$25^x - 2(m + 1).5^x - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 2(m + 1)t - 2m - 3 > 0, t > 0.$$

Bài toán đưa về tìm m để bất phương trình:

$$f(t) = t^2 - 2(m + 1)t - 2m - 3 > 0 \text{ được nghiệm đúng } \forall t > 0.$$

TTB2 f(t) có 2 nghiệm $t = -1$, $t = 2m - 3$ và $a = 1 > 0$.

Nếu $m = -2$ thì có nghiệm kép.

$$f(t) = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2 > 0, \forall t \neq -1: \text{chọn}$$

Nếu $m \neq -2$ thì $f(t) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow 2m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$ $(m \neq -2)$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Bài toán 12.7: Hãy tìm m sao cho bất phương trình: $(m - 1).9^t + 2.3^t + m + 1 > 0$ được nghiệm đúng với mọi t.

Giải

Đặt $x = 3^t$, $x > 0$. Bất phương trình:

$$(m - 1).9^t + 2.3^t + m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)x^2 + 2x + m + 1 > 0, x > 0.$$

Bài toán đưa về tìm m sao cho bất phương trình:

$$f(x) = (m - 1)x^2 + 2x + m + 1 > 0 \text{ được nghiệm đúng } \forall x > 0.$$

- Xét $m = 1$: $f(x) = 2x + 2 > 0, \forall x > -1$: chọn
- Xét $m < 1$: TTB2 có $\Delta' = 1 - (m - 1)(m + 1) = 2 - m^2$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $f(x) \leq 0, \forall x$: loại

Nếu $\Delta' > 0$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$: loại

- Xét $m > 1$:

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 2$. Chọn $m > \sqrt{2}$. Ta có $f(x) > 0, \forall x$: chọn

Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 2$. Chọn $1 < m \leq \sqrt{2}$.

Vì $a = m - 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \geq 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+1}{m-1} \geq 0 \\ \dfrac{-2}{m-1} < 0 \end{cases}$$: đúng vì $m > 1$. Vậy giá trị cần tìm là $m \geq 1$.

Bài toán 12.8: Xác định m sao cho bất phương trình: $4^{\sin^2 x} - 2.2^{\sin^2 x} + 1 - m^2 \le 0$ được nghiệm đúng với mọi x.

Giải

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, $1 \le t \le 2$.

Bất phương trình: $4^{\sin^2 x} - 2.2^{\sin^2 x} + 1 - m^2 \le 0$ (1)

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 - m^2 \le 0,\ 1 \le t \le 2.$ (2)

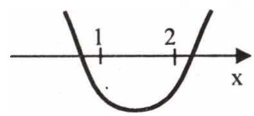
Điều kiện bất phương trình (1) được nghiệm đúng với mọi x là

bất phương trình: $f(t) = t^2 - 2t + 1 - m^2 \le 0$ được nghiệm đúng $\forall t \in [1; 2]$.

Ta có: $y = f(t) = t^2 - 2t + 1 - m^2$ là hàm bậc hai có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên, do đó:

$f(t) \le 0,\ \forall t \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 \le 0 \\ 1 - m^2 \le 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow m^2 \ge 1 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

Cách khác: $f(t) \le 0,\ \forall t \in [1; 2] \Leftrightarrow m^2 \ge (t - 1)^2,\ \forall t \in [1; 2]$.

$\Leftrightarrow m^2 \ge \max\limits_{1 \le t \le 2}(t-1)^2 \Leftrightarrow m^2 \ge 1 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

Bài toán 12.9: Tìm tham số để bất phương trình: $3^x - (2m + 5)(\sqrt{3})^x + m^2 + 5m > 0$ có nghiệm với mọi x.

Giải

Đặt $t = (\sqrt{3})^x$, $t > 0$.

BPT: $3^x - (2m + 5)(\sqrt{3})^x + m^2 + 5m > 0 \Leftrightarrow t^2 - (2m + 5)t + m^2 + 5m > 0,\ t > 0.$

Bài toán trở thành tìm m để:

$t^2 - (2m + 5)t + m^2 + 5m > 0,\ \forall t > 0$

Ta có: $a = 1 > 0$ và $\Delta = (2m + 5)^2 - 4(m^2 + 5m) = 25 > 0,\ \forall m$

Nên điều kiện $f(t) > 0,\ \forall t > 0$ là: $t_1 < t_2 \le 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \ge 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m \ge 0 \\ 2m + 5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le -5 \quad \text{hay } m \ge 0 \\ m \le -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le -5.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m \le -5$.

Bài toán 12.10: Tìm m để bất phương trình:

$$(\ln x+\frac{1}{\ln x})^2+(1-3m)(\ln x+\frac{1}{\ln x})+3m-2>0$$

Nghiệm đúng với mọi x > 0, x ≠ 1.

Giải

Điều kiện: x >0, x ≠ 1. Đặt $t=\ln x+\frac{1}{\ln x}$, $|t|\geq 2$.

Bất phương trình: $(\ln x+\frac{1}{\ln x})^2+(1-3m)(\ln x+\frac{1}{\ln x})+3m-2>0$ (1)

$\Leftrightarrow t^2 + (1 - 3m)t + 3m - 2 > 0$ (2)

BPT (1) nghiệm đúng với mọi x > 0

$\Leftrightarrow$ BPT (2) nghiệm đúng với mọi t mà $|t| \geq 2$.

BPT (2) $\Leftrightarrow$ (t - 1)(t - 3m + 2) > 0

Tam thức bậc hai có 2 nghiệm t = 1 và x =3m - 2

Xét 3m - 2 = 1 $\Leftrightarrow$ m = 1 thì $f(t) = (t - 1)^2 > 0, \forall t \neq 1$

$\Rightarrow f(t) > 0, \forall t$ mà $|t| \geq 2$.

Xét 3m - 2 > 1 $\Leftrightarrow$ m > 1 thì $\Rightarrow$ f(t) > 0 $\Leftrightarrow$ t < 1 hoặc t > 3m - 2.

Điều kiện f(t) > 0, ∀t mà $|t| \geq 2$ là 3m - 2 < 2 $\Leftrightarrow$ m < $\frac{4}{3}$

Kết hợp thì $1 < m < \frac{4}{3}$.

Xét 3m - 2 < 1 $\Leftrightarrow$ m < 1 thì f(t) > 0 $\Leftrightarrow$ t < 3m - 2 hoặc t > 1.

Điều kiện f(t) > 0, ∀t mà $|t| \geq 2$ là 3m - 2 > -2 $\Leftrightarrow$ m > 0

Kết hợp thì 0 < m < 1. Vậy điều kiện cần tìm là: $0 < m < \frac{4}{3}$.

Cách khác: Đánh giá tham số m một bên rồi xét hàm số.

Bài toán 12.11: Tìm tham số để bất phương trình:

$1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ có nghiệm với mọi x.

Giải

BPT: $\log_5 5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m>0 \end{cases} \text{(hàm đồng biến)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2-4x-m+5\geq 0 & (1) \\ mx^2+4x+m>0 & (2) \end{cases}$$

Ta tìm m để hệ thoả mãn với mọi x:

Xét m = 5 thì (1): $-4x \ge 0, \forall x$: loại

Xét m = 0 thì (2): $4x > 0, \forall x$: loại

Xét $m \ne 5, m \ne 0$ thì điều kiện

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0,\ 5-m>0 \\ \Delta_2 < 0,\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-(5-m)^2 \le 0, m<5 \\ 4-m^2<0, \quad m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 3.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $2 < m \le 3$.

Bài toán 12.12: Tìm m để bất phương trình:

$m(\ln u)^4 + 2m(\ln u)^3 - 4(\ln u)^2 - 2m.\ln u + m > 0$ nghiệm đúng với mọi u dương.

Giải

Đặt $x = \ln u$, $x \in \mathbf{R}$.

Bất phương trình:

$$m(\ln u)^4 + 2m(\ln u)^3 - 4(\ln u)^2 - 2m.\ln u + m > 0$$

$$\Leftrightarrow mx^4 + 2mx^3 - 4x^2 - 2mx + m > 0.$$

Bài toán đưa về tìm m để $mx^4 + 2mx^3 - 4x^2 - 2mx + m > 0, \forall x$.

Xét x = 0 thì m > 0.

Xét $x \ne 0$, cho 2 vế cho $x^2 > 0$

BPT: $mx^2 + 2mx - 4 - \frac{2m}{x} + \frac{m}{x^2} > 0 \Leftrightarrow m\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2m\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 > 0$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì $x^2 - tx - 1 = 0$.

Vì phương trình này có $\Delta = t^2 + 4 > 0, \forall t$ nên $t \in \mathbf{R}$.

Ta có: $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Bài toán trở thành tìm m để: $m(t^2 + 2) + 2mt - 4 > 0, \forall t$

$$\Leftrightarrow mt^2 + 2mt + 2m - 4 > 0, \forall t \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - m(2m-4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \text{ hay } m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Vậy giá trị cần tìm là: m > 4.

Cách khác: Đánh giá tham số m một bên rồi xét hàm số.

Bài toán 12.13: Xác định các số thực a > 0 sao cho bất phương trình: $a^{\cos 2x} \ge 2\cos^2 x$ nghiệm đúng với mọi x

Giải

Đặt $t = 2\cos^2 x \Rightarrow 0 \le t \le 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm a > 0 sao cho: $a^{t-1} \ge t, \forall t \in [0; 2]$

Với t = 0 thì bất đẳng thức đúng và không phụ thuộc vào a.

Với $0 < t \le 2$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow (t-1)\ln a \ge \ln t$

- Nếu t = 1 thì bất đẳng thức đúng.

- Nếu $t \in (0; 1)$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln a \le \dfrac{\ln t}{t-1}$

Vì bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (0; 1)$ nên $\ln a \le \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln t}{t-1} = 1$.

- Nếu $t \in (1; 2)$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln a \ge \dfrac{\ln t}{t-1}$

Vì bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (1; 2)$ nên $\ln a \ge \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln t}{t-1} = 1$

Do đó, ta cần phải có $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.

Thử lại, với a = e, ta cần chứng minh $t - 1 \ge \ln t, \forall t \in (0; 2]$

Xét hàm số $f(u) = u - 1 - \ln u$, $u \in (0; 2]$, ta có:

$f'(u) = 1 - \dfrac{1}{u} = \dfrac{u-1}{u}$, $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1$.

$f''(u) = \dfrac{1}{u^2} > 0$ nên f(u) đạt giá trị nhỏ nhất tại u = 1.

Ta có $f(u) \ge f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$ nên ta được $t - 1 \ge \ln t, \forall t \in (0; 2]$ là đúng.

Vậy giá trị cần tìm là a = e.

BÀI TẬP

Bài tập 12.1: Tìm m để bất phương trình có nghiệm

$x^2 - (m + 3)x + 3m < (m - 2)\log_2 x$

HD-ĐS

$m \ne 2$.

Bài tập 12.2: Tìm m để bất phương trình:

$\ln^2 x + |\ln x + m| < 2$ có nghiệm.

HD-ĐS

$-\dfrac{9}{4} < m < \dfrac{9}{4}$.

Bài tập 12.3: Tìm điều kiện của m để bất phương trình:

$\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + 2^m - 5 \ge 0$ có nghiệm

HD-ĐS

Đặt t = sinx + cosx, $|t| \leq \sqrt{2}$ và sin2x = t^2 - 1

$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = -t^4 + 2t^2$

Bất phương trình: $-t^4 + 2t^3 - t^2 + 2^m - 2 \leq 0; (|t| \leq \sqrt{2})$

Xét $f(t) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + m + 3$, $m \geq 1$.

Bài tập 12.4: Tìm điều kiện để bất phương trình:

$\dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x} <$ lgm có nghiệm.

HD-ĐS

Đặt t = $\sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1$ thì:

$$VT = \frac{3(1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2(1-\sin^2 x)} = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2} = 1 + \frac{1}{3t^2 - 2t + 2}$$

Xét: $f(t) = 3t^2 - 2t + 2$, $0 \leq t \leq 1$.gm $\geq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow m \geq 10^{4/3}$.

Bài tập 12.5: Tìm m để bất phương trình thoả với mọi x >0:

a) $(m-2)\ln^2 x - 2(m-1)\ln x + m - 1 \leq 0$

b) $m\lg^2 x + 12\lg x - 5 \leq 0$

HD-ĐS

a) $m \leq 1$ b) $m \leq -\dfrac{36}{5}$.

Bài tập 12.6: Định m để bất phương trình thoả với moi x >0:

$$(\lg x + 2)(\lg x + 4)(\lg^2 x + 6\lg x + 10) \geq m.$$

HD-ĐS

$m \leq -1$

Bài tập 12.7: Định m để bất phương trình thoả với mọi x >0:

$(\ln x)^4 + m(\ln x)^3 + (\ln x)^2 + m(\ln x) + 1 > 0$

HD-ĐS

Dùng đạo hàm, đánh giá m một bên, $|m| \leq \dfrac{3}{2}$

Bài tập 12.8: Tìm m để bất phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\log_a 3 - \log_a(1 + \sqrt{x^2 + ax + 5}).\log_5(x^2 + ax + 6) \geq 0$$

HD-ĐS

Đặt t = $\sqrt{x^2 + ax + 5}$

Bài tập 12.9: Tìm m để bất phương trình có nghiệm:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \le m\log_2(2+\sqrt{4-x})$$

HD-ĐS

m ≥ $\sqrt{3}$.

Bài tập 12.10: Tìm m để mọi nghiệm của bất phương trình: $(\frac{1}{3})^{\frac{2}{x}} + 3(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}+1} > 12$

cũng là nghiệm bất phương trình: $(m-2)^2.x^2 - 3(m-6)x - m - 1 < 0$

HD-ĐS

-1 ≤ m ≤ 5.

13 HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương pháp chung

Việc giải hệ phương trình mũ cũng giống như giải các hệ phương trình đại số với các biến đổi về biểu thức mũ. Thông thường là rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ, biến đổi tích, đánh giá, dùng hàm số,..... và phối hợp với việc đưa về cùng một cơ số, lôgarit hoá,...

Biến đổi luỹ thừa

Với các số a > 0, b > 0, α và β tuỳ ý, ta có:

$$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta};\ a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta};\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

$$(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha;\ (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$$

Hệ đối xứng loại I

$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$, *trong đó F_1 và F_2 là các biểu thức đối xứng đối với x và y.*

Đặt x + y = S và xy = P rồi biến đổi về hệ phương trình theo S và P. Giải hệ phương trình đó ta tìm được các nghiệm (S; P), chọn các nghiệm thoả mãn điều kiện $S^2 \ge 4P$. Từ đó giải ra nghiệm (x; y).

Hệ đối xứng loại II

$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(y,x)=0 \end{cases}$, *trong đó F là biểu thức đối với x và y.*

Thông thường ta giải hệ bằng cách giữ lại một phương trình và đem hai phương trình trong hệ "trừ cho nhau" để đưa về phương trình tích số

$$(x-y).A(x,y) = 0.$$

Hệ đẳng cấp (thuần nhất)i

Dạng $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d & (1) \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có thể biến đổi thành tích số, hoặc xét y = 0, xét $y \neq 0$ rồi chia hai vế cho y^2, tạo ẩn phụ $t = \frac{x}{y}$ hoặc lập biệt thức Δ để tính ẩn này theo ẩn kia. Thế vào (1) để giải tiếp.

Dạng $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d & (1) \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' & (2) \end{cases}$

Tạo hệ số tự do ở vế phải bằng 0, bằng cách nhân (1) với d', (2) với d rồi trừ nhau để đưa về dạng trên. Hoặc xét x = 0, xét $x \neq 0$, chia 2 vế cho x^2 hay đặt y = kx, đưa về giải theo ẩn k....

Hệ đẳng cấp (thuần nhất) bậc n: Xét x = 0, xét $x \neq 0$, chia 2 vế cho x^n hay đặt y = kx, đưa về giải theo ẩn k. Hoặc ngược lại, xét y = 0, xét $y \neq 0$, và đặt x = ky.

Bài toán 13.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = 2^x$, $v = 3^y$ thì u, v > 0.

Ta có hệ: $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.u + 2v = 2,75 \\ u - v = -0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0,25 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Bài toán 13.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x + 2.3^{x+y} = 55 \\ 3.2^x + 3^{x+y+1} = 84 \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = 2^x$, $v = 3^{x+y}$ thì u, v > 0.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2^x + 2.3^{x+y} = 55 \\ 3.2^x + 3^{x+y+1} = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v = 55 \\ 3u + 3v = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài toán 13.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1} = 2 \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = 2^{x+y}$, $v = 3^y$ thì u, v > 0.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = \log_2 3 \\ y = \log_3 2 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm (0; 1) và ($\log_2 3 - \log_3 2$; $\log_3 2$).

Bài toán 13.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2} - 4.3^y = -32 \\ (\sqrt{2})^{x^2} - 2(\sqrt{3})^y = -4 \end{cases}$.

Giải

Đặt $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x^2} = u \\ \left(\sqrt{3}\right)^y = v \end{cases}$ (u, v > 0)

Hệ trở thành: $\begin{cases} u^2 - 4v^2 = -32 \\ u - 2v = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-2v)(u+2v) = -32 \\ u-2v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v = 8 \\ u-2v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x^2} = 2 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: (x, y) = ($\sqrt{2}$; 2), ($-\sqrt{2}$; 2).

Bài toán 13.5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases}$.

Giải

Hệ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 4^{-2x} + 4^{-2}.4^{2x} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Cách khác: Đặt $u = 4^x$, $v = 4^y$ thì $x + y = 1 \Leftrightarrow uv = 4$.

Bài toán 13.6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} & (1) \\ y^{x+y} = x^3 & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x, y > 0.

Ta có (2) $\Leftrightarrow x = y^{\frac{x+y}{3}}$ nên

$(1) \Leftrightarrow y^{\frac{1}{3}(x+y)^2} = y^{12}$. Xét y = 1 thì x = 1: đúng.

Xét $y \neq 1$ thì $\frac{1}{3}(x+y)^2 = 12 \Leftrightarrow x + y = 6$

Do đó $y^6 = x^3 \Leftrightarrow x = y^2$ nên $y^2 + y - 6 = 0$

Chọn $y = 2 \Rightarrow x = 4$. Vậy tập nghiệm: S = {(1; 1), (4; 2)}.

Bài toán 13.7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 & (1) \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $8x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0$, $xy \geq 0$, $y \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} - 3y\right) + \left(\sqrt{xy} - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{(x-y)y}{\sqrt{xy} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{8x+5y}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{y}{\sqrt{xy} + y}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình nên: (1): $x^4 - 4x + 2^{x^2-2x+4} = 5$

Ta thấy rằng $2^{x^2-2x+4} = 2^{(x-1)^2+3} \geq 2^3 = 8$, suy ra

$5 - (x^4 - 4x) = 2^{x^2-2x+4} \geq 8 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (x^2 + 2x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó y = 1. Thử lại thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là x = y = 1.

Bài toán 13.8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^x - e^y = 45(y-x) \\ \sqrt{x^2 + x + y + 4} - \sqrt{y^2 - y - x + 4} = 2(\sqrt{3} - 1) \end{cases}.$$

Giải

Phương trình (1): $e^x - e^y = 45(y - x)$.

Khi x > y thì VT > 0 > VP: loại,

Khi x < y thì VT < 0 < VP: loại,

Khi x = y thì VT = 0 = VP: đúng. Khi đó PT(2):

$$\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}=2(\sqrt{3}-1)$$

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}$ trên **R**.

$$f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}-\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+3}}$$

Xét hàm số g(t) = $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}$ trên **R**, $g'(t)=\dfrac{3}{(t^2+3)\sqrt{t^2+3}}>0$

nên hàm số g(t) đồng biến trên **R**, do đó:

$$x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}>\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+3}}\Rightarrow f'(x)>0$$

nên hàm số f(x) đồng biến trên **R**, do đó:

$$\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}=2(\sqrt{3}-1)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2.$$

Suy ra y = 2. Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

Bài toán 13.9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}5^x-5^y=(x^4+y^4+5)(y^5-x^5)\\2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3y+1+\sqrt[3]{y^2+2}\end{cases}.$$

Giải

Phương trình (1): $5^x-5^y=(x^4+y^4+5)(y^5-x^5)$.

Khi x > y thì VT > 0 > VP: loại,

Khi x < y thì VT < 0 < VP: loại,

Khi x = y thì VT = 0 = VP: đúng. Khi đó PT(2):

$$2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+1+\sqrt[3]{x^2+2}$$

Xét hàm số: f(t) = t + $\sqrt[3]{t+1}$ trên **R**,

$f'(t)=1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}}>0$ nên hàm số f(t) đồng biến trên **R**,

do đó: PT: $f(2x^3-3x)=f(x^2+1)\Leftrightarrow 2x^3-3x=x^2+1$

$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x-1=0\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})(2x^2-2x-2)=0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ *hay* $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Suy ra tương ứng: $y = -\frac{1}{2}$ *hay* $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Bài toán 13.10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 2^y + 2y = 3 + x \end{cases}$.

Giải

Trừ 2 phương trình vế theo vế thì được: $2^x + 3x = 2^y + 3y$

Xét $f(t) = 2^t + 3t$, $t \in \mathbf{R}$ thì $f'(t) = 2^t.\ln 2 + 3 > 0$, $\forall x$ nên f đồng biến trên **R**.

Ta có PT: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Do đó $2^x + 2x = 3 + x \Leftrightarrow 2^x + x - 3 = 0$

Xét hàm $g(x) = 2^x + x - 3$, $x \in \mathbf{R}$,

$g'(x) = 2^x.\ln 2 + 1 > 0$ nên g đồng biến trên **R**

Ta có $g(1) = 0$ từ đó suy ra hệ có nghiệm (1; 1).

Bài toán 13.11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 2^y - 2 = 3x - 3^y \end{cases}$.

Giải

Trừ 2 phương trình vế theo vế thì được: $(2^x - 2^y) + (3^x - 3^y) + 3(x - y) = 0$.

Xét $x > y$ thì VT > 0 (loại),

Xét $x < y$ thì VT < 0 (loại).

Xét $x = y = t$ thì được: $2^t + 3^t - 3t - 2 = 0$.

Đặt $f(t) = 2^t + 3^t - 3t - 2$, $t \in \mathbf{R}$. Ta có:

$f'(t) = 2^t.\ln 2 + 3^t.\ln 3 - 3$, $f''(t) = 2^t.\ln^2 2 + 3^t.\ln^2 3 > 0$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên **R** nên $f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà $f(0) = f(1) = 0$ nên hệ có 2 nghiệm (0; 0) và (1; 1).

Bài toán 13.12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1 & (1) \\ 4x + y + 1 = 2^{2-2x+y} & (2) \end{cases}$

Giải

PT (1) biến đổi thành: $x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}-y$ và $y+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}-x$

Cộng lại thì được $2(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 3x + 1 = 2^{2-3x} \Leftrightarrow 8^x(3x + 1) = 4$

PT này có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$ nên $y = -\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm: $S = \{(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})\}$

Bài toán 13.13: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y & (1) \\ e^y - e^{y-x} = x & (2) \end{cases}$

Giải

Nếu x = 0 thì (1): $1 - e^{-y} = y \Leftrightarrow 1 - e^{-y} - y = 0$.

Bằng cách xét $f(y) = 1 - e^{-y} - y$ thì phương trình f(y) = 0 có nghiệm duy nhất y = 0, do đó x = y = z = 0.

Nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$. Đặt $f(t) = \frac{t.e^t}{e^t - 1}$, $t \neq 0$ thì hệ:

$$\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \dfrac{y.e^y}{e^y - 1} \\ e^y = \dfrac{x.e^x}{e^x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = f(y) \\ e^y = f(x) \end{cases}$$

Ta có $f'(t) = \frac{e^t(e^t - t - 1)}{(e^t - 1)^2} > 0, \forall t \neq 0$.

Lập BBT thì $f(t) < 1, \forall t < 0$ và $f(t) > 1, \forall t > 0$ nên hệ tương đương x = y = t, do đó $e^t - t - 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Bài toán 13.14: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (y + 1)\sqrt{y^2 + 2y + 3} = 0 \\ 30^{x-y} - 5 = 41(x - y) - 4^{x-y+1} \end{cases}$$

Giải

Đặt a = x - y, PT (2) trở thành: $30^a + 4^{a+1} - 41a - 5 = 0$

Xét $f(a) = 30^a + 4^{a+1} - 41a - 5$, $a \in \mathbf{R}$

$f'(a) = 30^a\ln 30 + 4^{a+1}\ln 4 - 41$

$f''(a) = 30^a\ln^2 30 + 4^{a+1}\ln^2 4 > 0, \forall a$

Khi đó f(a) có không quá một cực trị hay f(a) = 0 có không quá hai nghiệm.
Mà f(0) = f(1) = 0 nên a = 0 hay a = 1

Với x - y = 1 $\Leftrightarrow$ y + 1 = x, (1) $\Leftrightarrow$ $2x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)=0 \Leftrightarrow x = 0$

Suy ra (x, y) = (0, -1) là nghiệm hệ đã cho

Với x - y = 0 $\Leftrightarrow$ x = y

$$(1) \Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{2+x^2}\right)+(y+1)\left(1+\sqrt{(y+1)^2+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{2+x^2}\right)+(x+1)\left(1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right)=0$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2}, u>0 \\ v=\sqrt{x^2+2x+3}, v>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=x^2+2 \\ v^2=x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-v^2=2x+1 \\ x^2=\dfrac{v^2-u^2-1}{2} \end{cases}$

Phương trình (1) trở thành

$$(u-v)\left[(u+v)\left(1+\frac{v+u}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow v - u = 0 \text{ (vì } u > 0, v > 0 \text{)}$$

Khi đó ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Suy ra nghiệm của hệ (x; y) = $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy hệ PT có hai nghiệm: (0; -1); $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài toán 13.15: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4-4x+2^{xy-2x+4}=5 \\ 2^x+x^3=y^3+2^y \end{cases}$.

Giải

Xét hàm số: $f(t) = 2^t + t^3$, D = **R**.

$\Rightarrow f'(t) = 2^t\ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in$ **R**

$\Rightarrow$ hàm số f(t) đồng biến trên **R**.

Do đó từ PT (2): f(x) = f(y) $\Leftrightarrow$ x = y.

Thay x = y vào phương trình (1)

$$x^4-4x+2^{x^2-2x+4}=5 \Leftrightarrow x^4-4x=5-2^{(x-1)^2+3} \quad (3)$$

Đặt $g(x) = x^4 - 4x \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Lập BBT suy ra $x^4 - 4x \geq -3$. Mặt khác: $2^{(x-1)^2+3} \geq 8 \Rightarrow 5-2^{(x-1)^2+3} \leq -3$

Dấu = ở phương trình (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 1

Vậy hệ đã cho có nghiệm x = y = 1.

Bài toán 13.16: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{x+3y-2}+6.3^{x^2+4x-2}=3^{5y-3x}+2.3^{x^2+2y+1} \\ 1+2\sqrt{x+y-1}=3.\sqrt[3]{3y-2x} \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $x + y - 1 \geq 0$

PT (1) $\Leftrightarrow \left(3^{4x-2+3y-3x}+6.3^{x^2+4x-2}\right)-\left(3^{2y+3y-3x}+2.3^{x^2+1+2y}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3^{4x-2}-3^{2y}\right)\left(27^{y-x}+6.3^{x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3^{4x-2}-3^{2y}=0 \Leftrightarrow 4x-2=2y \Leftrightarrow y=2x-1$

Thay vào (2) ta có: $1+2\sqrt{3x-2}=3.\sqrt[3]{4x-3}, x \geq \dfrac{2}{3}$

Đặt $a=\sqrt{3x-2} \geq 0,\ b=\sqrt[3]{4x-3}$

Ta có hệ $\begin{cases} 1+2a=3b \\ 4a^2-3b^3=1 \end{cases}$ nên $a=\dfrac{3b-1}{2}$ thay vào ta được:

$$3b^3 - 9b^2 + 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b^2 -3b +2) = 0 \left[\begin{array}{l} b=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1}{2} \\ b=1 \Rightarrow a=1 \\ b=2 \Rightarrow a=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Với $b = 0, a = \dfrac{-1}{2}$ không thỏa mãn

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Với $\begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{4} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm là $(1; 1)$, $\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{9}{2}\right)$.

Bài toán 13.17: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y \geq -2 \\ 2^x+2^y \leq 1 \end{cases}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $1 \geq 2^x + 2^y \geq 2.\sqrt{2^x.2^y} = 2\sqrt{2^{x+y}} \geq 2\sqrt{2^{-2}} = 1$

nên $x = y$ và $x + y = -2 \Leftrightarrow x = y = -1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Bài toán 13.18: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^{4032} + x^{2016} > 2016^{2x} + 2016^{x} & (1) \\ x^{4030} + x^{2015} < 2015^{2x} + 2015^{x} & (2) \end{cases}$

Giải

Đặt 2016 = y thì

$(1) \Leftrightarrow x^{2y} - y^{2x} + x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow (x^y - y^x)(x^y + y^x) + x^y - y^x > 0$

$\Leftrightarrow (x^y - y^z)(x^y + y^x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^y > y^x$

$\Leftrightarrow y\ln x > x\ln y \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln y}{y} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln 2016}{2016}$

Đặt 2015 = z thì (2) $\Leftrightarrow x^{2z} + x^z < z^{2x} + z^x$

Biến đổi tương tự ta được: $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015}$

Do đó hệ tương đương: $\dfrac{\ln 2016}{2016} < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $t > 3 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2} < 0, \forall t > 3$

Suy ra hàm số này nghịch biến trên $(3; +\infty)$

Do đó, $\dfrac{\ln 2016}{2016} < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015} \Leftrightarrow 2015 < x < 2016.$

Đây chính là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

BÀI TẬP

Bài tập 13.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5 \\ 4^x - 6.3^y + 2 = 0 \end{cases}$.

HD-ĐS

$x = 2, y = 1$

Bài tập 13.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$

HD-ĐS

Đánh giá 2 vế của (1), (2; 2) và (-2; -2).

Bài tập 13.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$

HD-ĐS

Rút gọn VT của phương trình (2) trước.

Bài tập 13.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x - 3^y = (y^3 - x^3)(3xy + 2) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

HD-ĐS

Đánh giá 2 vế của (1) thì x = y. $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Bài tập 13.5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = (5^x - 5^y)(x^2 + 3y^4 + 1) \\ 9x^2 - 54y + 72 = \dfrac{1}{|2x-5|} - \dfrac{1}{|y-1|} \end{cases}.$$

HD-ĐS

Đánh giá 2 vế của (1) thì x = y. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$.

Bài tập 13.6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2 + y^2) = y^4(y^2 + 1) \\ 2^x + 2^{y^2} = 6 \end{cases}$.

HD-ĐS

PT (1)

$$\Leftrightarrow (x - y^2)\left[(x + \frac{1}{3}y^2)^2 + \frac{3}{4}y^4 + y^2\right] = 0 \Leftrightarrow x = y^2 \, hay \; x = y = 0$$

Với x = y = 0: loại.Với $x = y^2$ thì PT(2): $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

Bài tập 13.7: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + y \geq -2 \\ 9^x + 9^y \leq \dfrac{2}{9} \end{cases}$

HD-ĐS

Dùng bất đẳng thức Côsi, (-1;-1).

Bài tập 13.8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5^x - 4y = 1 \\ 5^y - 4x = 1 \end{cases}$

HD-ĐS

Dùng đạo hàm để đánh giá, (1;-1).

14
HỆ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương pháp chung

Việc giải hệ phương trình lôgarit cũng giống như giải các hệ phương trình đại số với các biến đổi về biểu thức lôgarit. Thông thường là rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ, biến đổi tích, đánh giá, dùng hàm số,..... và phối hợp với việc đưa về cùng một cơ số, mũ hoá,..

Biến đổi lôgarit

Trong điều kiện xác định thì:

$log_a(b.c) = log_a b + log_a c$

$log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c$, $log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -log_a c$

$log_a b^\alpha = \alpha log_a b$ *(với mọi α),* $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ $(n \in N^*)$.

Đổi cơ số

Trong điều kiện xác định:

$log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *hay* $log_a b.\ log_b x = log_a x$

$log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ *hay* $log_a b.log_b a = 1$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} log_a b$.

Bài toán 14.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$.

Giải

ĐK x > 0, y > 0, hệ: $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 xy = \log_4 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 36 \end{cases}$

Từ đó giải được 2 nghiệm (2; 18) và (18; 2).

Bài toán 14.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}.$$

Giải

ĐK: y > x, y > 0. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1 \Leftrightarrow -\log_4(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1$$

$$\Leftrightarrow \log_4\frac{y-x}{y}=-1 \Leftrightarrow x=\frac{3y}{4}$$

Thế vào (2) thì giải được y = ±4, chọn y = 4.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

Bài toán 14.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9x^2-y^2=5 \\ \log_5(3x+y)-\log_5(3x-y)=1 \end{cases}$.

Giải

Hệ: $\begin{cases} 9x^2-y^2=5 \\ \log_5(3x+y)-\log_5(3x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-y^2=5 \\ \log_5(3x+y)=\log_5 5(3x-y) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-y^2=5 \\ 3x+y>0,\ 3x-y>0 \\ 3x+y=5(3x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y>0,\ 3x-y>0 \\ (3x+y)(3x-y)=5 \\ 3x+y=5(3x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Bài toán 14.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ \log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x ± y > 0.

Hệ PT: $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ \log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=1 \\ \log_2(x+y)-\log_3 2.\log_2(x-y)=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y)=1 \\ \log_2(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (chọn).}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bài toán 14.5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x-y) = 5-\log_2(x+y) \\ \dfrac{\log x - \log 4}{\log y - \log 3} = -1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x > y > 0.

Hệ PT: $\begin{cases} \log_2(x-y) = 5-\log_2(x+y) \\ \dfrac{\log x - \log 4}{\log y - \log 3} = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{y} \\ \dfrac{144}{y^2} - y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{y} \\ y^4 + 32y^2 - 144 = 0 \end{cases}$$

Từ đó giải được nghiệm x = 6, y = 2.

Bài toán 14.6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y.\log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x > 0, đặt $u = \log_2 x$ và $v = 3^y$ (y > 0).

Hệ PT: $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y.\log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v = 15 \\ uv = 2u + 3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u - 15 \\ 2u^2 - 23u + 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \dfrac{5}{2} \\ v = -10 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Từ đó giải ra nghiệm (x;y)= (512; 1).

Bài toán 14.7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x, y > 0. Hệ PT:

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ xy = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 32 \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 64 \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$.

Bài toán 14.8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_y(6y+4x) = 2 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x, y > 0, x, y ≠ 1.

Hệ PT: $\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_y(6y+4x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y = x^2 \\ 6y+4x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y = x^2 \\ (x-y)(x+y-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 10x = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 2-x \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$.

Bài toán 14.9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{-x}.2^y = 1152 & (1) \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x + y > 0. Ta có (2) ⇔ x + y = 5 ⇔ y = 5 - x.

Thế (1): $3^{-x}.\ 2^{5-x} = 1152 \Leftrightarrow 6^{-x} = 36 \Leftrightarrow x = -2$. Do đó y = 7. Thử lại đúng.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$.

Bài toán 14.10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x.8^{-y} = 2\sqrt{2} & (1) \\ \log_9 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3(9y) & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: x, y > 0. Ta có (1) ⇔ $2^{x-3y} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - 3y = \frac{3}{2}$.

và (2) ⇔ $-\log_3 x + 1 = \log_3(9y) \Leftrightarrow \log_3(xy) = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{3}$.

Từ đó có tập nghiệm: $S = \{(2; \frac{1}{6})\}$.

Bài toán 14.11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: xy > 0, hệ PT:

$$\begin{cases}\log_2(x^2+y^2)=1+\log_2(xy)\\ 3^{x^2-xy+y^2}=81\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=2xy\\ x^2-xy+y^2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ y=\pm 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=-2\end{array}\right. \text{(chọn).}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Bài toán 14.12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^3=(x+1)(y+2)\\ \log_2(y^2+1)=1+\log_2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $2+\dfrac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}$ hoặc $x>0$

PT(2): $\log_2(y^2+1)=\log_2\left(4+\dfrac{2}{x}\right) \Leftrightarrow y^2+1=4+\dfrac{2}{x}$ hay $y^2x=3x+2$

Hệ trở thành $\begin{cases}x^2+y^3=xy+2x+y+2\\ y^2x=3x+2\end{cases}$

Trừ hai phương trình: $x^2+y^3=xy+2x+y+y^2x-3x$

$\Leftrightarrow x(x-y)+y^2(y-x)+x-y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-y^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x+1=y^2\end{array}\right.$

Với $x=y$ ta có $x=y=-1$ hoặc $x=y=2$

Với $x+1=y^2$ ta có $(x+1)x=3x+2 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$

$\Leftrightarrow\ x=1-\sqrt{3}$ hoặc $x=1+\sqrt{3}$

Suy ra nghiệm (x; y) của hệ là:

$(-1;-1)$, $(2;2)$, $(1-\sqrt{3};\pm\sqrt{2-\sqrt{3}})$, $(1+\sqrt{3};\pm\sqrt{2+\sqrt{3}})$.

Bài toán 14.13: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=\log_3(x+2)\\ 3^{y-1}+6=5.3^{\frac{1}{x}}\end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x>0$, $y>0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$\log_3(xy) = \log_3(x+2) \Leftrightarrow xy = x + 2 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{2}{x}$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$3^{\frac{2}{x}} - 5.3^{\frac{1}{x}} + 6 = 0 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} = 3 \text{ hoặc } 3^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \log_2 3$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$x = 1, y = 3$ hoặc $x = \log_2 3, y = 1 + 2\log_3 2$.

Bài toán 14.14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^{1-y} = 4 \\ \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0, y > 0$.

Ta có $\frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \Leftrightarrow \log_3|x| = \log_3 y \Leftrightarrow |x| = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$

Với $x = y$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$3^x + 3^{1-x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Chọn $x = 1$ nên $y = 1$.

Với $x = -y$, thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$3^x + 3^{1+x} = 4 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = 1$.

Bài toán 14.15: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^x + 2^{x+1}\log_3 y = 3 \\ 2^x + \log_3 y.\log_3 3y = 3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $y > 0$.

Đặt $u = 2^x$, $v = \log_3 y$, $u > 0$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2 + 2uv = 3 \\ u + v(v+1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2uv = 3 \\ v^2 + u + v = 3 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình ta được

$$u^2 + 2uv + v^2 + u + v = 6 \Leftrightarrow (u+v)^2 + (u+v) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 2 \\ u + v = -3 \end{array}\right.$$

Với $u + v = 2$, ta có $v^2 = 1$

Do đó $\left[\begin{array}{l} u=1, v=1 \\ u=3, v=-1 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} x=0, y=3 \\ x=\log_2 3, y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với u + v = -3, ta có $v^2 = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3+\sqrt{6} \\ u=-3-\sqrt{6} \end{array}\right.$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ là (0; 3), $\left(\log_2 3; \dfrac{1}{3}\right)$.

Bài toán 14.16: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy+y-2x+2)+\log_{2+y}(x-1)^2=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}.$$

Giải

Đặt $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy+y-2x+2)+\log_{2+y}(x-1)^2=6 & (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 \neq 1-x>0 \\ 1 \neq 2+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq x<1 \\ -2<y \neq -1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 2\log_{1-x}(1-x)(y+2) + 2\log_{2+y}(1-x) = 6$

$\Leftrightarrow 2 + 2\log_{1-x}(y+2) + 2\log_{2+y}(1-x) = 6$

Đặt $t = \log_{1-x}(y-2)$ ta được

$\Leftrightarrow 2 + 2t + \dfrac{2}{t} = 6 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Do đó: y + 2 = 1 - x thế vào (2) ta được

$$\log_{1-x}(4-x) - \log_{1-x}(x+4) = 1 \Leftrightarrow \log_{1-x}\frac{4-x}{4+x}=1 \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x=0$$

$\Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$ (loại) $\Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x; y) = (-2;1).

Bài toán 14.17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{x}{y}-\log_x^2 y=1 \\ \log_2(x^2-y^2)=1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0<xy \neq 1, 0<x \neq 1 \\ y>0, x^2>y^2 \end{cases}$

Với y = 1 thay vào hệ đã cho ta được $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$.

Với $0 < y \neq 1$ ta có phương trình: $\log_{xy}\dfrac{x}{y} - \log_x^2 y = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_x(xy)} - \frac{1}{\log_y(xy)} - \log_x^2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\log_x y} - \frac{1}{1+\log_y x} - \log_x^2 y = 1$$

Đặt $t = \log_x y$ khi đó ta được phương trình

$$\frac{1}{1+t} - \frac{t}{t+1} - t^2 = 1 \Leftrightarrow t^3 + t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + t + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow t = 0$ nên có $y = 1$ (loại)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\sqrt{3}; 1)$.

Bài toán 14.18: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_3(2x - y + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x = 1 \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases}$.

Giải

Hệ phương trình $\begin{cases} \log_3(2x - y + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x = 1 & (1) \\ 2^x + 2^y = 5 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x > 0$, $2x - y + 2 > 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_3(2x - y + 2) = \log_3 x + 1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x - y + 2) = \log_3 3x \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$

Thế vào phương trình (2) ta được

$$2^x + 2^{2-x} = 5 \Leftrightarrow 2^x + \frac{4}{2^x} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

Chọn nghiệm $(x;y) = (2; 0)$.

Bài toán 14.19: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 & (1) \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x, y > 0$ ta có:

$(2) \Leftrightarrow \log_4 \dfrac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = 4y$ nên (1):

$$(4y)^{\log_8 y} + y^{\log_8 4y} = 4 \Leftrightarrow 4^{\log_8 y}.y^{\log_8 y} + y^{\log_8 4}.y^{\log_8 y} = 4$$

$$\Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}}.y^{\log_8 y} + y^{\frac{2}{3}}.y^{\log_8 y} = 4 \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}+\log_8 y} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + \log_8 y\right)\log_8 y = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\log_8^2 y + 2\log_8 y - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_8 y = -1 \text{ } hay \text{ } \log_8 y = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{8}$ *hay* $y = 2$. Do đó $x = \dfrac{1}{2}$ *hay* $x = 8$

Vậy hệ PT có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}\right), (8, 2)$

Bài toán 14.20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5.2^{\frac{y}{x}} & (1) \\ \log_3 x + \log_5 y = \log_5 x.\log_3 y & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện xác định x, y > 0.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{y}} + 4.2^{\frac{2x}{y} - \frac{y}{x}} = 5.2^{\frac{y}{x}}$

Đặt $a = 2^{\frac{x}{y}}$, $b = 2^{\frac{y}{x}}$, thì a, b > 0. Ta có:

$$a + \frac{4a^2}{b} = 5b \Leftrightarrow 5b^2 - 4a^2 - ab = 0 \Leftrightarrow (a - b)(4a + 5b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra $2^{\frac{x}{y}} = 2^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$.

Nên (2) $\Leftrightarrow \log_3 x + \log_5 x = \log_5 x.\log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_5 3) = \log_3 x.\log_5 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 0$ hay $\log_5 x = \log_5 15 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 15$

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm là (x; y) = (1;1), (15;15)

Bài toán 14.21: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 y & (1) \\ x^2 + 2\cos x = y^2 + 2\cos y & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$, $y > 0$.

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0$: loại nên $x > 0$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2\cos t$, $t > 0$

$f'(t) = 2t - 2\sin t = 2(t - \sin t) > 0, \forall t > 0$ nên hàm số này đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình (1) $\log_3 x = \log_2(1 + \sqrt{x})$

Đặt $\log_3 x = \log_2(1 + \sqrt{x}) = t \Rightarrow \sqrt{x} = (\sqrt{3})^t = 2^t - 1$.

Suy ra $(\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\dfrac{1}{2}\right)^t = 1$

Vế trái là hàm nghịch biến nên phương trình này có không quá một nghiệm mà t = 2 thỏa mãn nên nghiệm duy nhất là t = 2.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là (x, y) = (9;9)

Bài toán 14.22: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3x+\ln(2x+1)=y \\ y^2+3y+\ln(2y+1)=x \end{cases}$.

Giải

Điều kiện x, y > $-\dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số f(x) = $t^2 + 3t + \ln(2t+1)$, $t > -\dfrac{1}{2}$

$$f'(t) = 2t + 3 + \frac{2}{2t+1} > 0,\ \forall t > -\frac{1}{2} \text{ nên f là hàm đồng biến}$$

Giả sử $x \geq y$ thì từ hệ trên suy ra $f(y) \geq f(x) \Rightarrow y \geq x$

Do đó nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì x = y.

Ta cần chứng minh phương trình $x^2 + 2x + \ln(2x+1) = 0$ có nghiệm duy nhất

Vì vế trái là hàm đồng biến nên phương trình này có không quá một nghiệm mà x = 0 thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là x = y = 0.

Bài toán 14.23: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y-x)(x^2-xy+y^2) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện: x > 0, y > 0

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 > 0,\ \forall x, y > 0$

PT (1): $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y-x)(x^2-xy+y^2)$

Xét $x > y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x < \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} VT(1) > 0 \\ VP(1) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ PT(1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm

Xét $x < y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} VT(1) < 0 \\ VP(1) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ PT(1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm

Xét x = y thay vào hệ ta có: $\begin{cases} 0 = 0 \\ x^2 + x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$

Vậy nghiệm của hệ là (x; y) = $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Bài toán 14.24: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x - 3^y = (\ln y - \ln x)(xy + 1) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x, y > 0 nên xy + 1 > 0.

Vì cơ số 3 > 1, e > 1 nên với (1):

Nếu x > y thì VT > 0 > VP, nếu x < y thì VT < 0 < VP,

Nếu x = y thì thoả mãn.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = 1$, chọn $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Bài toán 14.25: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 - y^5 = (\lg y - \lg x)(2x + 3y + 1) & (1) \\ 9x^2 - 54y + 72 = \dfrac{1}{|2x-5|} - \dfrac{1}{|y-1|} & (2) \end{cases}$.

Giải

ĐK: x >0, y > 0 và $x \neq \dfrac{5}{2}$, $y \neq 1$

PT(1): $x^5 - y^5 = (\lg y - \lg x)(2x + 3y + 1)$.

Ta có 2x + 3y + 1 > 0 và cơ số 10 > 1 nên:

Nếu x > y thì VT > 0 > VP: loại,

Nếu x < y thì VT < 0 < VP: loại,

Nếu x = y thì VT = 0 = VP: thoả mãn. Khi đó PT(2):

$$9x^2 - 54x + 72 = \frac{1}{|2x-5|} - \frac{1}{|x-1|} \Leftrightarrow 3(2x-5)^2 - \frac{1}{|2x-5|} = 3(x-1)^2 - \frac{1}{|x-1|}$$

Xét $f(t) = 3t^2 - \dfrac{1}{t}$ với t > 0. Ta có:

$f'(t) = 6t + \dfrac{1}{t^2} > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình: $f(|2x - 5|) = f(|x - 1|) \Leftrightarrow |2x - 5| = |x - 1|$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0.$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$ (chọn).

Suy ra tương ứng $y = 2$ hoặc $y = 4$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$

Bài toán 14.26: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = (\lg y - \lg x)(x + y + e) & (1) \\ 4|2x - 1|(y^2 - y + 1) = x^3 - 6x^2 + 10x + 5y - 14 & (2) \end{cases}.$$

Giải

ĐK: $x > 0, y > 0$.

PT(1): $\ln x - \ln y = (\lg y - \lg x)(x + y + e)$.

Ta có $x + y + e > 0$ và cơ số $e > 1$, $10 > 1$ nên:

Nếu $x > y$ thì VT > 0 > VP: loại,

Nếu $x < y$ thì VT < 0 < VP: loại,

Nếu $x = y$ thì VT = 0 = VP: thoả mãn. Khi đó PT(2):

$4|2x - 1|(x^2 - x + 1) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14.$

$\Leftrightarrow |2x - 1|.[(2x - 1)^2 + 3] = (x - 2)^3 + 3x - 6$

$\Leftrightarrow |2x - 1|^3 + 3|2x - 1| = (x - 2)^3 + 3(x - 2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $D = \mathbf{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ nên f đồng biến trên $\mathbf{R}$.

PT: $f(|2x - 1|) = f(x - 2) \Leftrightarrow |2x - 1| = x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$ (VN).

Vậy hệ cho vô nghiệm.

Bài toán 14.27: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{2x-y} - 2^{y+1} - 2^x = 0 \\ \log_2(x^2 - y) - \log_2(y + 1) + (x - 1)^2 = 0 \end{cases}.$

Giải

Điều kiện: $x^2 - y > 0$, $y + 1 > 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$2^{2(x - y)} - 2^{x - y} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{x - y} = 2 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1.$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$\log_2(x^2 - x + 1) - \log_2 x + (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = \log_2 x + x.$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0 \text{ với mọi } t > 0.$$

nên phương trình $f(x^2 - x + 1) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của hệ là $x = 1$, $y = 0$.

Bài toán 14.28: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\sqrt{1+3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2\sqrt{1+3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = \sin x$, $v = \cos y$, ĐK: $0 < u, v \le 1$.

Hệ: $\begin{cases} \log_2\sqrt{1+3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2\sqrt{1+3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(1+3u) = 2\log_3(3v) \\ \log_2(1+3v) = 2\log_3(3u) \end{cases}$

Do đó $\log_2(1 + 3u) + 2\log_3(3u) = \log_2(1 + 3v) + 2\log_3(3v)$

Xét $f(t) = \log_2(1 + 3t) + 2\log_3(3t)$, $0 < t \le 1$.

$f'(t) = \dfrac{3}{(1+3t)\ln 2} + \dfrac{2}{t\ln 3} > 0$ nên f đồng biến trên $(0; 1]$,

do đó PT $\Leftrightarrow u = v = t$.

Ta có PT: $\log_2(1 + 3t) = 2\log_3(3t)$, giải ra nghiệm duy nhất $t = 1$ nên

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbf{Z}).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = m2\pi \end{cases}$ $(k, m \in \mathbf{Z})$.

Bài toán 14.29: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2) \end{cases}$.

Giải

Đặt $t = 2x - y$ thì (1) $\Leftrightarrow (1 + 4^t).5^{1-t} = 1 + 2^{t+1}$

$\Leftrightarrow 1 + 4^t = (1 + 2^{t+1})\, 5^{t-1} \Leftrightarrow (1 - 5^{t-1}) + 4(4^{t-1} - 10^{t-1}) = 0$

Xét $t > 1$ thì VT > 0, xét $t < 1$ thì VT < 0

Xét $t = 1$ thì VT $= 0$ nên chỉ có nghiệm $t = 1$

$\Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = y + 1$.

Thế vào (2): $y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$.

Xét hàm $f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$, D = **R** thì

$$f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2(y+1)^2+1}{y^2+y+1} > 0, \forall y$$

Do đó f(y) là hàm đồng biến trên **R**,

Ta có f(-1) = 0 nên y = -1 là nghiệm duy nhất. Suy ra x = 0.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Bài toán 14.30: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 5x - 3y + 4 = 0 \\ \log_{12}(x-1) + \log_{12}(y-3) = 1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x > 1 và y > 3

Ta có: $x^2 - y^2 + 5x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (x+2) = (y+1)^2 + (y+1)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $(0; +\infty)$

Vì $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$

nên (1) $\Leftrightarrow f(x+2) = f(y+1) \Leftrightarrow x + 2 = y + 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.

Do đó $\log_{12}(x-1) + \log_{12}(y-3) = 1$

$\Leftrightarrow \log_{12}(x-1) + \log_{12}(x-2) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$. Chọn $x = 5 \Rightarrow y = 6$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là x = 5, y = 6.

Bài toán 14.31: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(2x+y+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2y+1) = 0 \\ x^2 + 3x - y + \ln(y+1) = 0 \end{cases}$.

Giải

Hệ PT: $\begin{cases} \log_2(2x+y+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2y+1) = 0 & (1) \\ x^2 + 3x - y + \ln(y+1) = 0 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: 2x + y + 1 > 0; x + 2y + 1 > 0; y + 1 > 0

(1) $\Rightarrow \log_2(2x + y + 1) - \log_2(x + 2y + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x + y + 1 = x + 2y + 1 \Rightarrow x = y$

Thay vào phương trình (2) ta được $x^2 + 2x + \ln(x+1) = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$, x > -1

Ta có $f'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Mà f(0) = 0 nên PT có nghiệm duy nhất $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Kiểm tra điều kiện thấy nghiệm thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (0;0).

Bài toán 14.32: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + y^3 - y^2 + y = x^2 + 1 \\ (6x + y)\log^2_{\frac{1}{2}}(x + y) + (x - y)\log_{\sqrt{2}}(x + y)^3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện: $x + y > 0$, $x \geq y$.

Từ PT (1) ta có: $(y - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Thế vào PT(2) ta được PT:

$$(6x + 1)\log^2_2(x + 1) + 6(x - 1)\log_2(x + 1) - 7 = 0$$

Với $x = -\frac{1}{6}$ không phải là nghiệm

Với $x \neq -\frac{1}{6}$ thì PT bậc hai có 2 nghiệm: $\log_2(x+1) = -1$ hay $\log_2(x+1) = \frac{7}{6x+1}$

Xét $\log_2(x + 1) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ nghiệm $(x, y) = \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Xét $\log_2(x + 1) = \frac{7}{6x+1}$ với $x \in \left(-1;-\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$

Khi $x \in \left(-1;-\frac{1}{6}\right)$ thì VT là hàm số f(x) đồng biến, VP là hàm g(x) nghịch biến mà $f\left(-\frac{3}{4}\right) = g\left(-\frac{3}{4}\right)$ nên $x = -\frac{3}{4}$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

Khi $x \in \left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$ thì VT là hàm số f(x) đồng biến, VP là hàm g(x) nghịch biến mà $f(1) = g(1)$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm: $\left(-\frac{3}{4};1\right); (1;1), \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Bài toán 14.33: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} = \dfrac{2}{xy+1} & (1) \\ \log_2\dfrac{x}{2}\log_3\dfrac{y}{3} = 1 & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x, y > 0$

(1): $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} = \dfrac{2}{xy+1}$

$\Leftrightarrow (xy + 1)(x^2 + y^2 + 2) = 2(x^2 + 1)(y^2 + 1)$

$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2xy + x^2 + y^2 + 2 = 2x^2y^2 + 2(x^2 + y^2) + 2$

$\Leftrightarrow xy(x - y)^2 = (x - y)^2 \Leftrightarrow (x - y)^2(xy - 1) = 0$

- Nếu x = y thì x = y = 1 là nghiệm

Xét trường hợp $x = y \neq 1$ thì:

(1): $(\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x.\log_3 x = \log_2 x + \log_3 x$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow \log_x 6 = 1 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6$$

- Nếu xy = 1 thì $y = \frac{1}{x}$ và $x \neq 1$, ta có

$$\log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{1}{3x} = 1 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x + 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x.\ \log_3 x = \log_3 x - \log_2 x \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_3 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_x 2 - \log_x 3x = 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là (x; y) = (1; 1), (6; 6), $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 14.34: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{y^2 + 1} & (1) \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện x + 2y + 6 > 0, x + y + 2 > 0

PT(1): $e^{x^2}(x^2 + 1) = e^{y^2}(y^2 + 1)$

Xét hàm số $f(t) = e^t(t + 1)$, $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = e^t + e^t(t + 1) = e^t(t + 2) > 0$ nên f là hàm đồng biến.

Phương trình $f(x^2) = f(y^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$

- Nếu x = y thì phương trình (2) trở thành

$3\log_3(3x + 6) = 2\log_2(2x + 2) + 1 \Leftrightarrow \log_3(x + 2) = \log_2(x + 1)$

Đặt $\log_3(x + 2) = \log_2(x + 1) = t$ thì

$$x + 2 = 3^t,\ x + 1 = 2^t \Rightarrow 3^t = 2^t + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$$

Vế trái là hàm số nghịch biến nên phương trình này có không quá một nghiệm thực.

Ta lại thấy t = 1 thỏa mãn nên phương trình có nghiệm duy nhất là t = 1, suy ra $x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Tương ứng, ta có y = 1 và nghiệm (x, y) = (1, 1) thỏa mãn điều kiện xác định.

- Nếu x = -y thì

$(2) \Leftrightarrow 3\log_3(6 - x) = 2\log_2 2 + 1 \Leftrightarrow \log_3(6 - x) = 1$

$\Leftrightarrow 6 - x = 3 \Leftrightarrow x = 3$

Suy ra y = -3 và nghiệm (x, y) = (3, -3) cũng thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là (x, y) = (1, 1), (3;-3).

Bài toán 14.35: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 3y \ge 2 - \log_4 3 \\ \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1}) \le \ln 2 \end{cases}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si:

$$\ln 2 \ge \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1}) \ge \ln 2\sqrt{4^{x+y-1}.3.4^{2y-1}} = \ln 2\sqrt{4^{x+3y-2-\log_4 3}}$$

$$\ge \ln(2\sqrt{4^0}) = \ln 2$$

Do đó dấu = xảy ra nên: $\begin{cases} x + 3y = 2 - \log_4 3 \\ 4^{x+y-1} = 3.4^{2y-1} = 1 \end{cases}$

Giải được: $x = \frac{1}{2}\log_4 12$, $y = \frac{1}{2}\log_4 \frac{4}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\log_4 12 \\ y = \frac{1}{2}\log_4 \frac{4}{3} \end{cases}$.

BÀI TẬP

Bài tập 14.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$.

HD-ĐS

(1; 1) và (2; 2)

Bài tập 14.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 - 3x - y = 20 + \log_y x \end{cases}$

HD-ĐS

PT(1) $\Leftrightarrow$ x = y >0, khác 1.

Bài tập 14.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

HD-ĐS

x = 3, y = 4.

Bài tập 14.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ \log_2(x+y) - \log_5(x-y) = 0 \end{cases}$

HD-ĐS

Lôgarit hoá PT(1) theo cơ số 2.

Bài tập 14.5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^7 + 7x^5 = 5y^7 + 7y^5 \\ \ln x + 2\ln y = 6 \end{cases}$

HD-ĐS

Xét $f(t) = 5t^7 + 7t^5$, $t \in \mathbf{R}$ thì $f'(t) = 35t^6 + 35t^4 \geq 0$, $\forall$ t nên f đồng biến trên **R**.
Do đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. ĐS $x = y = e^2$.

Bài tập 14.6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \ln(2x+5) - \ln(y-1) = 0 \\ (y-1)\left[(x+y)^2 - 1\right] = |x+y|(y^2 - 2y) \end{cases}$

HD-ĐS

$(2) \Leftrightarrow |x+y| - \dfrac{1}{|x+y|} = y - 1 - \dfrac{1}{y-1}$

Xét $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$, $D = (0; +\infty)$ thì $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} > 0, \forall t \in D$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D nên $|x+y| = y - 1$.

Bài tập 14.7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \lg x - \lg y = (y-x)(x^2 + xy + y^2) \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

HD-ĐS

x = 1, y = 1

Bài tập 14.8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$

HD-ĐS

Biến đổi lôgarit về cơ số 2.

Bài tập 14.9: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \log_3(x+2) < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16 \end{cases}$

HD-ĐS

Hệ tương đương: $\begin{cases} 0 < x+2 < 27 \\ 0 < x^2 + 2x - 8 \le 16 \end{cases}$.

Bài tập 14.10: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \log_x(x+2) > 2 \\ (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7.2^x + 12) \end{cases}$

HD-ĐS

$1 < x < 2$.

15 ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp chung

Đưa điều kiện nghiệm của hệ phương trình về điều kiện nghiệm của phương trình một ẩn. Sau đó dùng phương trình bậc hai, định lý Viet, đồ thị parabol, bất đẳng thức,... hay dùng hàm số để đánh giá.

Điều kiện phương trình có nghiệm:

Cho y = f(x) trên D đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: GTLN = M và

GTNN = m thì phương trình f(x) = k có nghiệm $\Leftrightarrow$ $m \le k \le M$.

Chú ý:

1) Việc giải hệ phương trình mũ, lôgarit cũng giống như giải các hệ phương trình đại số với các biến đổi về biểu thức mũ, lôgarit. Thông thường là rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ, biến đổi tích, đánh giá, dùng hàm số,..... và phối hợp với việc đưa về cùng một cơ số, mũ hóa, lôgarit hoá,...

2) Nếu phương trình dạng f(x,m) =0 thì đưa về dạng đánh giá tham số 1 bên: f(x) = m hay f(x) = h(m) rồi xét hàm số y = f(x). Nếu hàm số không đạt GTLN, GTNN thì lập BBT để giải.

3) Tính chất duy nhất của nghiệm (x;y) trong hệ phương trình đặc biệt. Để giải phần thuận, ta giả sử (x, y) là một nghiệm thì xem xét (-x, y), (x;-y) hay (-x;-y) có phải cũng là nghiệm hay không để đồng nhất 2 nghiệm đó bằng nhau.

4) Bất phương trình mũ:

Nếu a > 1: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Nếu 0 < a < 1: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

5) Bất phương trình lôgarit:

Nếu a > 1: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

6) Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } a'^2 + b'^2 \neq 0)$$

Lập các định thức: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b;$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b;\ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Khi $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

Khi $D = 0$, $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm

Khi $D = D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ thoả mãn điều kiện: $ax + by = c$.

Bài toán 15.1: Tìm tham số a để hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a+1)\ln x - \ln y = a+1 \\ \ln x + (a-1)\ln y = 2 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Giải

Điều kiện: x >0, y >0.

Đặt u =lnx, v = lny.

Hệ PT: $\begin{cases} (a+1)\ln x - \ln y = a+1 \\ \ln x + (a-1)\ln y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)u - v = a+1 \\ u + (a-1)v = 2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi hệ mới có nghiệm.

Ta có các định thức: $D = a^2$, $D_u = a^2 + 1 \neq 0$

Hệ có nghiệm khi $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

Vậy giá trị cần tìm là: $a \neq 0$.

Bài toán 15.2: Tìm tham số a để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\lg x - a\lg y = 5 \\ \lg x + \lg y = 7 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Giải

Điều kiện: x > 0, y > 0. Đặt u =lgx, v = lgy.

Hệ PT: $\begin{cases} 2\lg x - a\lg y = 5 \\ \lg x + \lg y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - a.v = 5 \\ u + v = 7 \end{cases}$

Hệ cho vô nghiệm khi và chỉ khi hệ mới vô nghiệm.

Ta có các định thức: $D = 2 + a$, $D_u = 5 + 7a$, $D_v = 9 \neq 0$

Hệ vô nghiệm khi $D = 0 \Leftrightarrow a = -2$. Vậy giá trị cần tìm là: $a = -2$.

Bài toán 15.3: Tìm a, b để hệ phương trình: $\begin{cases} 3.3^x + a.3^y = 5 \\ 2.3^x + 3^y = b \end{cases}$ có vô số nghiệm.

Giải

Đặt $u = 3^x$, $v = 3^y$ với $u,v > 0$.

Hệ PT: $\begin{cases} 3.3^x + a.3^y = 5 \\ 2.3^x + 3^y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + av = 5 \\ 2u + v = b \end{cases}$

Hệ cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi hệ mới có vô số nghiệm.

Ta có các định thức: $D = 3 - 2a$, $D_u = 5 - ab$, $D_v = 3b - 10$.

Điều kiện hệ có vô số nghiệm: $D = D_u = D_v = 0$

$$\Leftrightarrow 3 - 2a = 5 - ab = 3b - 10 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \text{ và } b = \frac{10}{3}.$$

Vậy giá trị cần tìm là $a = \frac{3}{2}$ và $b = \frac{10}{3}$.

Bài toán 15.4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \lg xy + \lg^2 x + \lg^2 y = 8 \\ \lg x.\lg y(\lg x + 1)(\lg y + 1) = m \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x, y > 0$. Đặt $u = \lg x$, $v = \lg y$.

Hệ: $\begin{cases} \lg xy + \lg^2 x + \lg^2 y = 8 \\ \lg x.\lg y(\lg x + 1)(\lg y + 1) = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v + u^2 + v^2 = 8 \\ uv(u+1)(v+1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^2 + u) + (v^2 + v) = 8 \\ (u^2 + u)(v^2 + v) = m \end{cases}$$

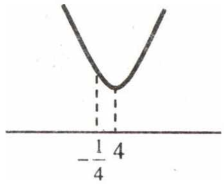
Đặt $X = u^2 + u$; $Y = v^2 + v$

Vì $t^2 + t = -\frac{1}{4} + (t + \frac{1}{2})^2 \geq -\frac{1}{4}$ nên điều kiện $X, Y \geq -\frac{1}{4}$.

Trong điều kiện đó thì hệ tương đương: $\begin{cases} X + Y = 8 \\ XY = m \end{cases}$

Do đó X, Y là các nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 8X + m = 0 \text{ với } X \geq -\frac{1}{4}$$



Ta có: $X^2 - 8X = -m$.

Xét parabol $Y = F(X) = X^2 - 8X,\ X \geq -\frac{1}{4}$

Điều kiện đường thẳng $Y = -m$ cắt (P) tại điểm có hoành độ

$X \geq -\frac{1}{4}$ là: $f(4) \leq -m \leq f(-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16$.

Vậy giá trị cần tìm là: $-\frac{33}{16} \leq m \leq 16$.

Cách khác: dùng đạo hàm để đánh giá hàm số theo một biến.

Bài toán 15.5: Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 5\ln x + 6\ln y = m \\ \ln^2 x - 4\ln^2 y - 4 = 0 \end{cases}$

có một cặp nghiệm duy nhất, tìm cặp nghiệm đó.

Giải

Điều kiện: x, y > 0. Đặt u = lnx, v = lny.

Hệ: $\begin{cases} 5\ln x + 6\ln y = m \\ \ln^2 x - 4\ln^2 y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 6v = m & (1) \\ u^2 - 4v^2 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow u = \frac{m - 6v}{5}$. Thế vào (2) ta được: $64v^2 + 12mv + 100 - m^2 = 0$ (3)

Hệ có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có một nghiệm duy nhất: $\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 36m^2 - 64(100 - m^2) = 0 \Leftrightarrow 100(m^2 - 64) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 8$.

Với $m = -8 \Rightarrow v = -\frac{6m}{64} = \frac{3}{4} \Rightarrow u = -\frac{5}{2}$: nghiệm hệ $\left(e^{-5/2}; e^{3/4}\right)$

Với $m = 8 \Rightarrow v = -\frac{6m}{64} = -\frac{3}{4} \Rightarrow u = \frac{5}{2}$: nghiệm hệ $\left(e^{5/4}; e^{-3/4}\right)$.

Bài toán 15.6: Định m để hệ phương trình:

$\begin{cases} \log_3^2 x - m\log_3 x.\log_3 y + \log_3^2 y = m^2 - 3m + 2 \\ \log_3^2 x + 2\log_3 x.\log_3 y + m\log_3^2 y = m^2 - 4m + 3 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất

Giải

Điều kiện: x, y >0. Đặt $u = \log_3 x$; $v = \log_3 y$.

Hệ: $\begin{cases} \log_3^2 x - m\log_3 x.\log_3 y + \log_3^2 y = m^2 - 3m + 2 \\ \log_3^2 x + 2\log_3 x.\log_3 y + m\log_3^2 y = m^2 - 4m + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - muv + v^2 = m^2 - 3m + 2 & (1) \\ u^2 + 2uv + mv^2 = m^2 - 4m + 3 & (2) \end{cases}$

Nếu (u;v) là nghiệm của hệ thì (-u; -v) cũng là một nghiệm. Hệ có một nghiệm duy nhất điều kiện cần là: $u = -u$ và $v = -v \Rightarrow u = v = 0$

Thế vào hệ thì được $\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Đảo lại, khi $m = 1$.

Hệ trở thành: $\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 0 & (3) \\ u^2 + 2uv + v^2 = 0 & (4) \end{cases}$

Từ (4) suy ra: $(u+v)^2 = 0$ nên $u = -v$ thế vào (3): $3u^2 = 0$

$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow v = 0$ nên hệ có một nghiệm duy nhất (1;1).

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 1$.

Bài toán 15.7: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7^x - 7^y = 49(y^3 - x^3) \\ \sqrt[4]{x^2 + 2y + 4} = m + \sqrt{y+1} \end{cases}$$ có đúng một nghiệm.

Giải

Xét PT(1): $7^x - 7^y = 49(y - x)(y^2 + yx + x^2)$:

Khi $x > y$ thì VT > 0 > VP: loại,

Khi $x < y$ thì VT < 0 < VP: loại,

Khi $x = y$ thì VT = VP = 0: chọn.

Do đó PT(2): $\sqrt[4]{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x+1} = m$.

Bài toán đưa về tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng một nghiệm

$$\sqrt[4]{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x+1} = m.$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$, phương trình trở thành $\sqrt[4]{t^4 + 3} - t = m$ (*)

Nhận xét ứng với mỗi nghiệm không âm của phương trình (*) có đúng một nghiệm của phương trình đã cho, do đó phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng một nghiệm không âm.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{t^4 + 3} - t$ với $t \geq 0$, $f'(t) = \dfrac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4+3)^3}} - 1 < 0$.

Mà $f(0) = \sqrt[4]{3}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0$ nên có bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
f'(t)	-	
f(t)	$\sqrt[4]{3}$ ↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị cần tìm của m là $0 < m \leq \sqrt[4]{3}$.

Bài toán 15.8: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = (y^5 - x^5)(x^2 + xy + y^2 + 5) \\ \sqrt{x+1} - 3my = 1 + 12m \end{cases}$$ có nghiệm.

Giải

Điều kiện: x >0, y >0.

Xét PT(1): $\ln x - \ln y = (y^5 - x^5)\left[(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5\right]$:

Khi x > y thì VT > 0 > VP: loại,

Khi x < y thì VT < 0 < VP: loại,

Khi x = y thì VT = VP = 0: chọn.

Khi đó x = y = t > 0 nên PT(2): $\sqrt{t+1} - 3mt = 1 + 12m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)} = m$.

Xét $f(t) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)}$ với t > 0. Ta có $f'(t) = \frac{2 - t + 2\sqrt{1+t}}{6(t+4)^2.\sqrt{1+t}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 8$.

BBT

x	0		8		+∞
f'		+	0	+	
f	0	↗	1/18	↘	0

Do đó điều kiện hệ có nghiệm: $0 < m \le \frac{1}{18}$.

Vậy giá trị cần tìm: $0 < m \le \frac{1}{18}$.

Bài toán 15.9: Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} \log_x(3x + my) = 2 \\ \log_y(3y + mx) = 2 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: x > 0, x ≠ 1 và y > 0, y ≠ 1.

Hệ PT: $\begin{cases} \log_x(3x + my) = 2 \\ \log_y(3y + mx) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + my = x^2 \\ 3y + mx = y^2 \end{cases} \Rightarrow (x - y)(3 - m) = x^2 - y^2$

$\Rightarrow (x - y)(x + y + m - 3) = 0 \Rightarrow y = x$ hoặc $y = 3 - x - m$.

Xét y = x ta có phương trình: $x^2 - (3 + m)x = 0$ nên chọn x = 3 + m.

Điều kiện có nghiệm là m > -3, m ≠ -2 (1)

Xét y = 3 - x - m ta có phương trình: $x^2 + (m - 3)x + m(m - 3) = 0$

Vì $\Delta = -3(m - 3)(m + 1) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$ thoả (1)

Nên suy ra điều kiện có nghiệm là m > -3 và m ≠ -2.

Vậy giá trị cần tìm: m > -3 và m ≠ -2.

Bài toán 15.10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2.\lg x + \lg y = 5 \\ \lg x - 2.\lg y = 10a + 5 \end{cases}$.

Định a để hệ có nghiệm (x; y) thỏa T = lgx. lgy lớn nhất.

Giải

Điều kiện: x >0, y > 0. Đặt u = lgx, v = lgy.

Hệ phương trình: $\begin{cases} 2.\lg x + \lg y = 5 \\ \lg x - 2.\lg y = 10a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 5 \\ u - 2v = 10a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2a + 3 \\ v = -4a - 1 \end{cases}$

Ta có T = lgx. lgy = u.v

$$= (2a + 3)(-4a - 1) = -8a^2 - 14a - 3 = \frac{25}{8} - 2\left(2a + \frac{7}{4}\right)^2 \le \frac{25}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = -\frac{7}{8}$.

Vậy max $T = \frac{25}{8}$ đạt được khi $a = -\frac{7}{8}$.

Bài toán 15.11: Tìm a để hệ phương trình: $\begin{cases} \ln x + \ln y = 6 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = a \end{cases}$

Sau có nghiệm sao cho $S = \ln^4 x + \ln^4 y$ bé nhất.

Giải

Điều kiện: x, y > 0. Đặt u = lnx, v = lny.

Hệ $\begin{cases} \ln x + \ln y = 6 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^2 + v^2 = a \end{cases}$

Ta có $S = u + v = 6$ và $P = uv = \frac{1}{2}[(u + v)^2 - (u^2 + v^2)] = \frac{1}{2}(36 - a)$

Do đó u; v là hai nghiệm của PT: $X^2 - 6X + \frac{1}{2}(36 - a) = 0$

Điều kiện có nghiệm là: $\Delta' = \frac{a}{2} - 9 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 18$

Khi đó: $S = \ln^4 x + \ln^4 y$

$$= u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = a^2 - \frac{1}{2}(36 - a)^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + 72a - 1296) = \frac{1}{2}[(a - 18)(a + 90) + 324]$$

Vì $a \geq 18$ nên: $S = u^4 + v^4 \geq \frac{324}{2} = 162$. Vậy min S = 162 đạt được khi a = 18.

Bài toán 15.12: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ có nghiệm duy nhất.

Giải

Giả sử (x, y) là một nghiệm thì (-x, y) cũng là nghiệm, mà hệ có nghiệm duy nhất nên x = 0.

Do đó: $\begin{cases} 1 + 0 = y + 2m \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ 2m = 1 - y \end{cases}$

Khi $y = -1 \Rightarrow m = 1$. Khi $y = 1 \Rightarrow m = 0$

Đảo lại, với m = 1 thì hệ: $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Hệ này không nghiệm duy nhất vì (0; -1), (1; 0) đều là nghiệm.

Với m = 0 thì hệ: $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow |x| \leq 1$, $|y| \leq 1$

Và (1): $y = 2^{|x|} + |x| - x^2 = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \geq 2^{|x|} \geq 1$

Do đó y = 1 và x = 0: nghiệm duy nhất.

Vậy giá trị cần tìm: m = 0.

Bài toán 15.13: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq -1$. PT (1): $7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x-2} - 1) \leq 2017(1 - x)$

- Nếu x = 1 thì bất phương trình thỏa
- Nếu x < 1 thì $7^{2x-2} - 1 < 0$, $1 - x > 0$ thì BPT thỏa
- Nếu x > 1 thì $7^{2x-2} - 1 > 0$, $1 - x < 0$ thì BPT không thỏa
- Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì (2): $m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$

Xét $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$, $x \in [-1; 1]$.

Lập BBT thì min f(x) = -2 nên bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -2$

Vậy điều kiện cần tìm là $m \geq -2$.

Bài toán 15.14: Chứng minh rằng hệ phương trình: $\begin{cases} e^x = 2017 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (1) \\ e^y = 2017 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & (2) \end{cases}$

có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện xác định $|x|, |y| > 1$.

Từ hai PT của hệ, ta có $e^x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$, $|t| > 1$.

$f'(t) = e^t + \dfrac{1}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} > 0$ nên f là hàm đồng biến

Do đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Ta xét phương trình: $e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2017 = 0$

Lập hàm số $g(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}} - 2017$, $|t| > 1$, ta chứng minh $g(t) = 0$ có hai nghiệm trong khoảng $(1, +\infty)$.

BÀI TẬP

Bài tập 15.1: Tìm a, b để hệ phương trình: $\begin{cases} 3\lg x + a\lg y = 5 \\ 2\lg x + \lg y = b \end{cases}$ có vô số nghiệm dương.

HD-ĐS

$D = -3 - a$, $D_u = -(a + b)$, $D_v = 3b - a^2$, a tùy ý, $b = 3$.

Bài tập 15.2: Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_m(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = m \end{cases}$ có nghiệm.

HD-ĐS

Biến đổi lôgarit về cơ số 2.

Bài tập 15.3: Tìm m để hệ phương trình:

$\begin{cases} m.\log_2 x + 8.\log_2 y + 4 - 4m = 0 \\ (m-1).\log_2 x + (m+2).\log_2 y + 4 - 3m = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

HD-ĐS

$m = 4$.

Bài tập 15.4: Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \log_3 x^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

HD-ĐS

Biến đổi (1) lôgarit về cơ số 3, m > 0.

Bài tập 15.5: Tìm m để hệ phương trình:

$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = m \\ \log_5^2 x + \log_5^2 y = 6 - m^2 \end{cases}$ có nghiệm

HD-ĐS

Đưa về bậc 2 theo một ẩn, $-2 \le m \le 2$.

Bài tập 15.6: Xác định a để hệ phương trình: $\begin{cases} \ln^2 x - \ln^2 y = 0 \\ (\ln x - a)^2 + \ln^2 y = 1 \end{cases}$

có đúng 3 nghiệm; có đúng 2 nghiệm.

HD-ĐS

Hệ: $\begin{cases} \ln y = \pm \ln x \\ 2\ln^2 x - 2a\ln x + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$, $a = \pm 1$; $a = \pm\sqrt{2}$.

Bài tập 15.7: Tìm a để hệ phương trình: $\begin{cases} \lg \dfrac{x}{y} = a(1 + \lg x \lg y) \\ 2 + \lg xy + \lg x.\lg y = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

HD-ĐS

Từ (2) suy ra $\lg x = -\dfrac{2 + \lg y}{1 + \lg y}$, thế vào (1):

$(a - 1)\lg^2 y + (a - 2)\lg y - (a + 2) = 0$, dùng hàm số, $|a| \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $a \neq -1$.

Bài tập 15.8: Tìm a để hệ phương trình:

$\begin{cases} a^x + a^y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = b^2 - b + 1 \end{cases}$ có nghiệm $\forall b \in [0;1]$

HD-ĐS

Mũ hóa PT(2), $0 < a < \dfrac{1}{32\sqrt[3]{2}}$.

NS HỒNG ÂN

Nhà sách HỒNG ÂN
www.nhasachhongan.com.vn
Email: nhasachhongan@hotmail.com
20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM
ĐT: 38246706 - 39107371 - 39107095 • Fax: 39107053
Điểm đến của tri thức

Quý khách ở xa liên hệ: **www.hongantructuyen.vn**
để chúng tôi được phục vụ.

Mời bạn tìm đọc:

Để xác định sách chính phẩm, chúng tôi in chìm ở bìa 1 và 4 chữ: "NS. HỒNG ÂN"

5

Hàm số-phương trình-mũ-l
FAHASA
TTS-NH
1 120140 269378
DN02009
55,000VND